This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

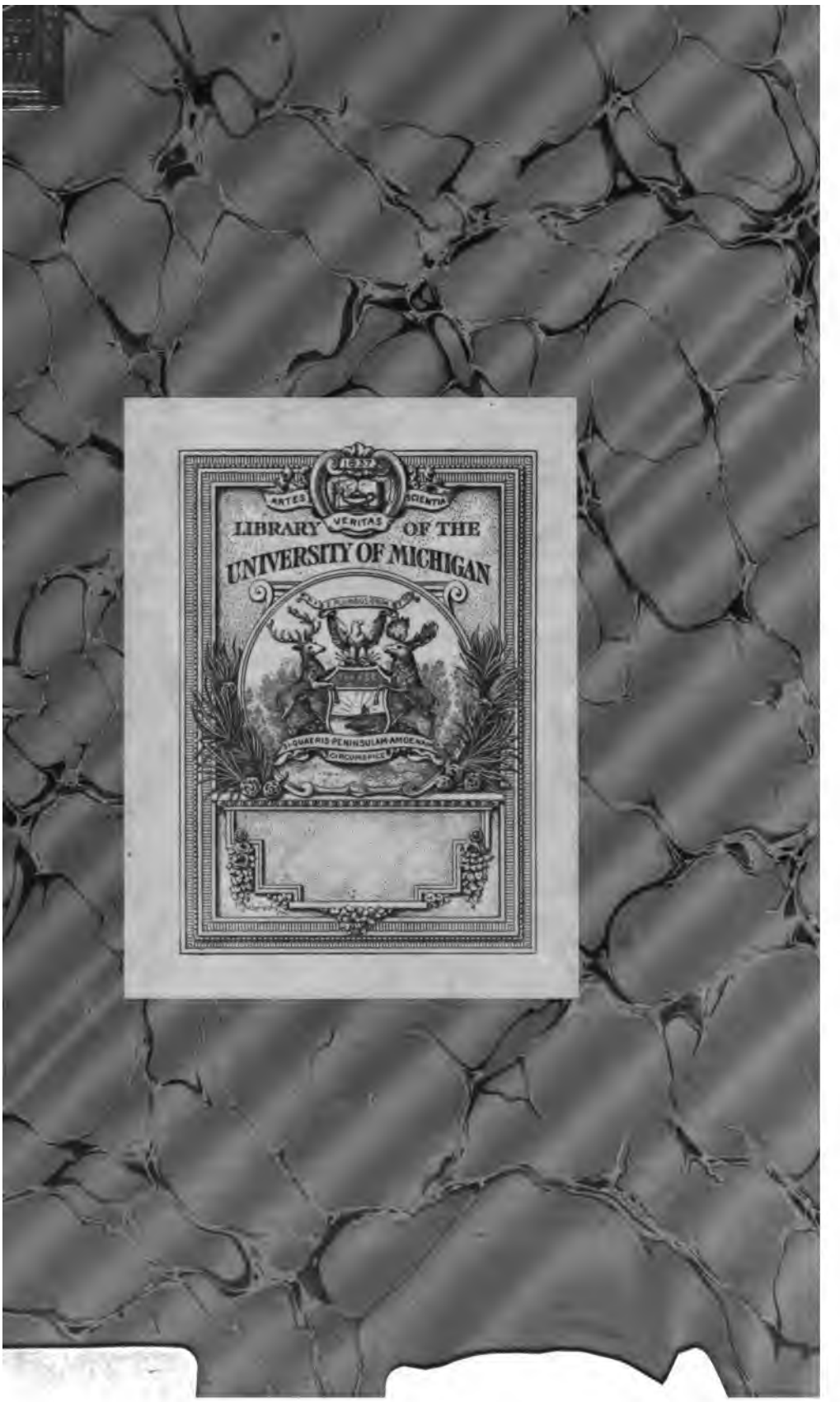
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

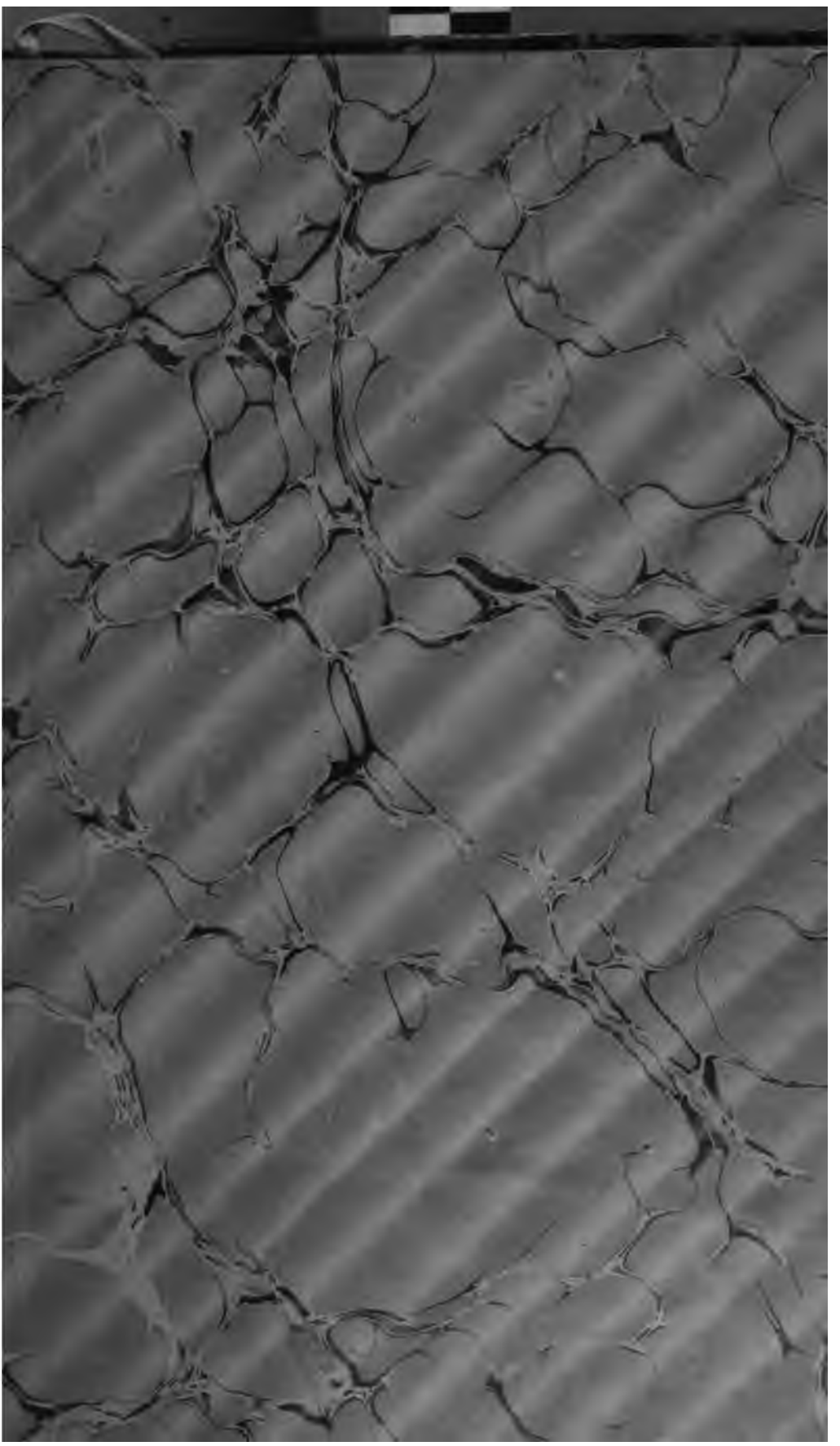
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



46
.B7.

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

TOME V

A PARIS

CHEZ J.-B. BAILLIÈRE

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE MÉDECINE

rue Hautefeuille, 19.

A Londres, chez H. Baillière, 219, Regent Street. — A New-York, chez H. Baillière, 290, Broadway

A Madrid, chez Bailly-Baillière, calle del Principe, 11

A BORDEAUX

CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE

Fossés du Chapeau-Rouge, 34

1867

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

Composition du Bureau pour l'année 1866-1867.

MM. HENRI GINTRAC, *président.*
O. DE LACOLONGE ✱, *vice-président.*
AD. MÉTADIER, *secrétaire.*
P. VERGELY, *secrétaire-adjoint.*
HOÜEL, *archiviste.*
MICÉ, *trésorier.*
BERT,
JEANNEL ✱,
ROYER,
SANSAS, } *membres du Conseil.*

Membres titulaires.

MM. ABADIE, licencié ès sciences.
ABRIA ✱, doyen de la Faculté des Sciences.
ALEXANDRE, pharmacien, membre de la Société Chimique de Paris.
AZAM, professeur à l'École de Médecine.
BAUDRIMONT ✱, agrégé libre de la Faculté de Médecine de Paris, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
BAUDRIMONT (Édouard), chef des travaux de physique et de chimie à la Faculté des Sciences.
BÉRO, ingénieur civil, ancien élève de l'École Centrale des Arts et Manufactures.
BERT, professeur à la Faculté des Sciences.
BILLIOT, licencié ès sciences mathématiques et physiques.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour Impériale.
CHATARD, docteur en médecine.
COLOT, licencié ès sciences.
DANNECY, pharmacien en chef de l'Hôpital Saint-André.
DELMAS, docteur en médecine.
DOUAUD, docteur en médecine.
DUPUY, professeur au Lycée Impérial.
GINTRAC (Henry), professeur à l'École de Médecine.
GLOTIN ✱, ancien officier de la Marine Impériale.
GUÉPIN, docteur en médecine.
GUESTIER (Daniel), négociant.
HOÜEL, professeur à la Faculté des Sciences.
HUMBLOT, professeur au Lycée Impérial.
JEANNEL ✱, professeur à l'École de Médecine.
LACOLONGE (DE) ✱, chef d'escadron d'artillerie en retraite.
LADEVI-ROCHE, licencié ès sciences.

240692

MM. LAGRANDVAL (DE), professeur au Lycée Impérial.
LANDE, interne adjoint à l'Hôpital Saint-André.
LANELONGUE, docteur en médecine.
LANGLADE (DE), ingénieur civil, ancien élève de l'École Polytechnique.
LAVERGNE (comte DE) ✱.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences.
LINDER ✱, ingénieur au Corps Impérial des Mines.
LUZUN, docteur en médecine.
MANÈS ✱, officier de l'armée.
MARX, docteur en médecine.
MÉTADIER (Ad.), docteur en médecine, licencié ès sciences.
MÉTADIER (P.), professeur à l'École de Médecine.
MICÉ, licencié ès sciences, professeur à l'École de Médecine.
MORISOT, professeur au Lycée Impérial.
ORÉ, docteur ès sciences, professeur à l'École de Médecine, chirurgien en chef de l'hôpital Saint-André.
PÉRIER, pharmacien à Pauillac (Gironde).
PERRENS, professeur à l'École de Médecine.
PICKMAN, manufacturier à Séville.
PRAT, pharmacien à Bordeaux.
RAGAIN, conducteur des Ponts-et-Chaussées.
REIMONENCQ, docteur en médecine.
ROYER, licencié ès sciences mathématiques et physiques, chef d'institution.
SAMY, préparateur à la Faculté des Sciences.
SANSAS, avocat à la Cour Impériale.
SENTEX, docteur en médecine, chef interne à l'hôpital Saint-André.
SERRÉ-GUINO, professeur au Lycée Impérial.
SIRECH, médecin à Saint-André-de-Cubzac (Gironde).
SOLLES, docteur en médecine.
SOUS, docteur en médecine.
VALAT, ancien recteur.
VERGELY, docteur en médecine.

Membres correspondants.

MM. BOUÉ, régent de physique au collége de Sarlat (Dordogne).
BURGADE, docteur en médecine, à Libourne.
DELBOS, docteur ès sciences, directeur de l'École des Sciences appliquées de Mulhouse.
GARRIGAT, docteur en médecine.
KEMMERER DE SAINT-MARTIN, docteur en médecine, île de Ré.
LE BESGUE ✱, correspondant de l'Institut de France (Académie des Sciences), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
MONTESQUIOU (Louis DE), docteur en médecine, près d'Agen.
MUSSET, docteur ès sciences, chef d'institution à Toulouse.
RAMEY (Eugène), naturaliste à Paris.
RODET, ingénieur de la Manufacture des Tabacs de Paris, ancien élève de l'École Polytechnique.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1866-1867.

Président : M. Henri GINTRAC. — *Secrétaires* : MM. Ad. MÉTADIER et VERGELY.

Séance du 15 novembre. — La Société procède au renouvellement du Bureau.

Sont élus, pour l'année 1866-67 :

Président	M. le Dr HENRI GINTRAC.
Vice-Président	M. O. DE LACOLONGE.
Secrétaire	M. le Dr AD. MÉTADIER.
Secrétaire adjoint	M. le Dr P. VERGELY.
Archiviste	M. VALAT.
Trésorier	M. le Dr MICÉ.
Membres du Conseil d'administration.	MM. BERT, HÖUEL, JEANNEL, ROYER, SANSAS.

Séance du 13 décembre. — Sont élus Membres titulaires : MM. DE LARRET, DE LAGRANDVAL, P. MÉTADIER.

— M. PRAT expose une nouvelle méthode pour le dosage de l'azote. Ce travail doit faire l'objet d'un Mémoire qui sera imprimé dans les Actes de la Société.

— M. de LACOLONGE présente à la Société deux modèles de montres solaires, l'un fabriqué à Baréges, l'autre sortant des ateliers de M. Robert, à Paris.

Séance du 24 janvier. — Sont élus Membres titulaires : MM. HUMBLOT et PERRENS.

— M. SERRÉ expose une analyse des travaux de M. Sainte-Claire-Deville sur les phénomènes de dissociation.

— M. HOUEL donne lecture d'une Notice historique sur la représentation géométrique des quantités imaginaires.

Le premier essai qui ait été tenté dans cette voie est dû à un géo-

mètre prussien, Heinrich Kühn, né à Königsberg en 1690, docteur en droit, professeur au Gymnase de Danzig, membre étranger (pensionné) de l'Académie de Saint-Pétersbourg, mort à Danzig en 1769.

Avant d'étudier le travail de Kühn sur les imaginaires, M. Hoüel donne quelques détails sur la première production de cet auteur, qui se rattache à l'histoire scientifique de la ville de Bordeaux, et qui est un curieux spécimen des idées qui avaient cours dans la première moitié du XVIII^e^ siècle.

Il s'agit d'un Mémoire couronné en 1741 par l'Académie de Bordeaux, et ayant pour titre : *Meditationes de origine fontium et aquæ putealis*. Ce travail a été imprimé dans le Recueil des Prix de l'Académie, accompagné d'une traduction française. Il comprend, texte et traduction, 248 pages in-4°.

Rappelons d'abord qu'à l'époque où ce Mémoire a été composé, la question de la forme de la Terre n'était pas encore définitivement résolue. D'un côté, les déductions théoriques d'Huygens et de Newton lui donnaient une forme aplatie vers les pôles; de l'autre, des mesures inexactes de la méridienne de France, exécutées par Cassini, semblaient indiquer au contraire un allongement dans le sens du diamètre polaire. L'Académie des Sciences de Paris venait d'envoyer, en Laponie et au Pérou, deux Commissions chargées de décider de quel côté se trouvait la vérité. Kühn n'a pas besoin de faire un aussi long voyage pour trancher la question.

Il commence sa dissertation par poser les théorèmes suivants :

1° Un lieu quelconque d'un fleuve est d'autant plus *bas*, c'est à dire d'autant plus rapproché du centre de la terre, que ce lieu est plus éloigné de la source.

2° Le lieu de la source est le plus élevé de tous ceux du fleuve.

3° L'embouchure du fleuve dans la mer est le lieu le plus bas.

4° Les lits des fleuves sont inclinés vers la mer.

5° Étant connue la longueur d'un fleuve depuis l'embouchure jusqu'aux sources de tous les affluents qui le composent (ou jusqu'à un lieu intermédiaire quelconque), si l'on détermine, en outre, à l'aide du nivellement, la pente moyenne du fleuve, on pourra trouver de combien chacune des sources (ou chaque point intermédiaire) est élevée au dessus de l'embouchure, c'est à dire plus éloignée du centre de la terre.

Cette proposition est loin de paraître aussi claire que les quatre précédentes.

6° Si les eaux du même fleuve se partagent quelque part en plusieurs bras qui se rendent dans la même mer ou dans des mers différentes, on pourra découvrir si la surface de la mer à l'une des

embouchures est plus haute ou plus basse qu'à l'autre, et déterminer quelle est la différence de niveau.

Ici l'auteur redresse l'erreur des personnes qui s'imaginent que la mer est plus haute que le continent, parce qu'elle leur semble telle, vue du rivage. Après avoir étayé son opinion d'un grand nombre de preuves, il expose l'expérience fondamentale qui sert de base à toute sa théorie géodésique. Voici le texte même de ce passage :

« *Cum mensura declivitatis aquarum sit ratio, quam habet distantia linearum horizontalium verarum per terminos, a quo et ad quem ductarum, seu altitudo lapsus aquarum* A *ad veram longitudinem viæ fluminis inter hos terminos interceptam* L; *posita autem* L = 100 *pedibus Parisinis, per experimenta a libratoribus, occasione aquæductuum molendinariorum, toties facta, vix unquam reperiatur* A *minor, sed frequentissime major dimidio pede Parisino : patet, ubi, in integra declivitate inter fontem et ostium fluminis circiter assignanda, excessum potius quam defectum vitare cupimus, mensuram declivitatis mediæ, hoc est* $\frac{A}{L}$, *tuto poni posse* $\frac{1/2}{100} = \frac{1}{200}$. »

Une conséquence immédiate de ce principe, c'est que le Danube ayant environ 2,800 kilomètres de cours, sa source est à 14,000 mètres au dessus de la mer Noire, c'est à dire à une hauteur triple de celle que nous attribuons maintenant au Mont-Blanc.

La longueur du fleuve Jaune est de 4,200 kilomètres; la hauteur de sa source au dessus des mers de Chine est donc de 21,000 mètres, ou deux fois et demie la hauteur de l'Himalaya, environ $\frac{1}{300}$ du rayon terrestre.

Ces résultats surprenants ne sont incompatibles ni avec la théorie de Newton, ni avec celle de Cassini. Cependant l'auteur a de fortes raisons pour adopter cette dernière, qu'il estime *ad hypothesim naturæ propius accedere.*

Il remarque d'abord que la salure de la mer va en croissant du pôle à l'équateur, et par suite la densité de l'eau. Donc la mer doit être plus haute au pôle qu'à l'équateur.

Comme preuve, Pierre le Grand a fait construire un canal qui joint le Volga à la Néva. Or, d'après le calcul de Kühn, le milieu du canal est à 40,500 pieds au dessus de la mer Caspienne, et à 9,000 pieds au dessus de l'embouchure de la Néva. Donc la différence de niveau entre le golfe de Finlande et la mer Caspienne est de 31,500 pieds; et encore la mer Caspienne, comme toutes les mers intérieures fermées, est-elle beaucoup plus haute que la mer Noire, et celle-ci beaucoup plus haute encore que la Méditerranée.

De même, l'embouchure de la Trave est de 3,200 pieds plus haute que celle de l'Elbe; l'embouchure de la Seine, de 1,000 pieds plus haute que celle de la Loire, etc.

Kühn croit que la mer Morte se décharge dans la mer Rouge par un canal souterrain. Il rapporte, d'après un auteur arabe, l'histoire d'un dauphin qui a passé en quelques jours de la mer Rouge dans la Méditerranée.

Cet extrait est plus que suffisant pour donner une idée de ce qu'était la physique du globe en 1740.

M. Houël passe ensuite à l'exposé du travail de Kühn sur les quantités imaginaires. Cet exposé se trouve dans un Mémoire inséré au commencement du 5e volume des Actes de la Société.

De l'examen des recherches de Kühn, il résulte que cet auteur n'a fait que poser la question sans la résoudre. Le véritable créateur de la théorie géométrique des imaginaires est le génevois Robert Argand, dont l'ouvrage a paru en 1806, à Paris, et a été suivi, quelques années plus tard, de plusieurs Notes sur le même sujet, publiées dans les *Annales de Mathématiques* de Gergonne.

Ces idées, reprises plus tard et complétées par Mourey et Warren, en 1828, ont été finalement adoptées par Cauchy, qui a consacré à leur exposition une partie du tome IV de ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique.*

M. Houël ne croit pas que les indications données par Gauss dans la seconde partie de sa *Theoria residuorum biquadraticorum* (Gœttingue, 1831) donnent le droit d'attribuer à ce grand géomètre l'invention d'une théorie dont les fondements avaient été posés vingt-cinq ans auparavant, et qui avait reçu en 1828 un développement complet, grâce aux travaux de Mourey et de Warren.

Séance du 7 février. — M. Morisot donne l'explication d'une nouvelle pile qu'il a fait construire, et qui présente l'avantage d'un amorcement facile. (Voir la Note insérée t. IV, 1er cahier (suite), p. 13.)

Cette pile, dont M. Morisot donne une description détaillée, est faite en terre de porcelaine opaque, et composée d'éléments semblables à ceux de la pile de Bunsen, mais disposés différemment. La lumière électrique pourrait être obtenue facilement au moyen de cette pile.

— Pour M. Baudrimont, cette pile n'est autre qu'une grande pile de Wollaston, qu'on plongerait dans une auge particulière.

— M. Morisot a constaté que sa pile donne des résultats avantageux; la surface est de beaucoup moindre que dans les autres piles; on

peut amorcer continuellement et retirer le sulfate de zinc produit. M. Morisot a encore l'intention d'essayer des liquides autres que l'acide sulfurique étendu, tels que ceux qui mettent en activité les piles de Daniell et de Grove. Il espère montrer cette pile à la Société dans une prochaine séance.

— M. Houel continue la communication commencée dans la précédente séance sur la théorie géométrique des quantités imaginaires.

Séance du 21 février. — M. Sansas fait hommage à la Société d'une brochure sur les *Origines du Christianisme à Bordeaux.*

— M. Linder rend compte sommairement du premier cahier des *Mémoires de la Société d'Histoire naturelle de Brême.*

— M. Linder donne ensuite lecture d'un extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin (août 1866), intitulé : *Note sur la formation du protoxyde d'azote par la réaction de l'acide sulfureux sur l'acide azotique et sur l'acide azoteux,* par le Dr R. Weber.

1° Action de l'acide sulfureux sur le bioxyde d'azote.

D'après M. Pelouze, le protoxyde d'azote se formerait très facilement en introduisant un peu d'eau dans un mélange de deux volumes de bioxyde d'azote et d'un volume d'acide sulfureux; les trois volumes se réduiraient à un seul, qui serait du protoxyde d'azote. Le Dr Weber conteste ce fait, et voici l'expérience sur laquelle il s'appuie : Introduisez, dit-il, dans une éprouvette préparée sur la cuve à mercure, 150 centimètres cubes de bioxyde d'azote, 75 centimètres cubes d'acide sulfureux et 4 centimètres cubes d'eau, avec lesquels vous mouillez les parois de l'éprouvette; un ou deux jours après, vos 225 centimètres cubes de gaz se seront réduits à 150 centimètres cubes; au bout d'une dizaine de jours, à 130. Si vous traitez vos 130 centimètres cubes par une dissolution de sulfate de protoxyde de fer, une grande quantité sera absorbée; donc ils se composent, en partie seulement, de protoxyde d'azote, l'autre partie étant restée à l'état de bioxyde d'azote et d'acide sulfureux.

La réaction indiquée par M. Pelouze est, comme on voit, loin de se faire d'une manière aussi rapide que l'indique ce savant chimiste.

Le Dr Weber ajoute qu'il est facile, d'ailleurs, de prouver la décomposition du bioxyde d'azote par l'acide sulfureux; il suffit pour cela de verser une dissolution aqueuse suffisamment étendue d'acide sulfureux dans une dissolution brune de bioxyde d'azote dans le sulfate de protoxyde de fer. Cette dissolution se décolore assez promptement, surtout lorsqu'on a soin de la chauffer.

2° Action de SO^2 sur AzO^4.

La même réaction a lieu avec l'acide hypoazotique. On peut la considérer comme une conséquence de la composition chimique de cet acide, dont deux équivalents sont comme la somme d'un équivalent d'acide azoteux et d'un équivalent d'acide azotique.

$$2\,AzO^4 = AzO^3 + AzO^5.$$

3° Action de SO^2 sur AzO^3.

M. Weber a pris des poids déterminés d'azotite d'argent desséché avec soin, de façon à ne porter aucune altération à sa composition; il les a dissous dans l'eau bouillante, puis décomposés par le chlorure de potassium. La liqueur filtrée étendue d'eau et sursaturée d'acide chlorhydrique, a été traitée dans une cornue par une dissolution aqueuse d'acide sulfureux et de chlorure de baryum, puis mise à l'abri du contact de l'air au moyen d'une fermeture hermétique. Le lendemain, le dépôt, séparé de la liqueur surnageante au moyen d'une pipette, a été analysé par la méthode ordinaire. On a formé ainsi le tableau suivant :

Azotite d'argent employé.	Sulfate de baryte donné par l'analyse.	Acide sulfurique donné par l'analyse.	Acide sulfurique calculé.
0,917	1,340	0,460	0,238
0,818	1,100	0,378	0,212
0,722	1,120	0,385	0,187
0,760	1,152	0,396	0,197
0,992	1,383	0,475	0,257

Il résulte du tableau que les poids d'acide sulfurique obtenus par l'analyse sont presque le double de ceux que l'on eût dû obtenir si l'acide nitreux s'était transformé en bioxyde d'azote, d'après la formule $AzO^3 + SO^2 = AzO^2 + SO^3$.

Pour éviter les chances d'erreur, le chimiste allemand a vérifié la pureté de l'azotite d'argent qu'il avait employé. Or, il trouve que l'argent fourni par la calcination de 0,807 de ce sel était de 0,566, alors que le calcul donnait 0,562.

Voici comment opère Weber, quand il veut recueillir le protoxyde d'azote qui se produit dans la réaction. Il verse une dissolution d'azotite de potasse dans une cornue munie d'un tube de dégagement, dont l'extrémité plonge dans la cuve à eau; il sature la liqueur refroidie avec de l'acide chlorhydrique ou de l'acide sulfurique étendu d'eau; puis il y ajoute une quantité suffisante d'une dissolution

aqueuse d'acide sulfureux, et chauffe d'abord doucement, puis davantage.

Une précaution indispensable à prendre dans cette opération, c'est que la dissolution d'azotite soit assez étendue; sinon, l'on obtiendrait du bioxyde d'azote au lieu de protoxyde.

On obtient également du bioxyde d'azote en traitant la dissolution d'azotite de potasse par un courant prolongé d'acide sulfureux gazeux.

4° Action de SO^2 sur AzO^5.

Le protoxyde d'azote se produit également lorsqu'on fait réagir l'acide sulfureux sur l'acide azotique; mais il est essentiel que ce dernier soit assez étendu d'eau.

A cet effet, Weber fait un mélange d'un volume d'acide azotique pur, dont la densité est 1.25, et d'*au moins* 5 volumes d'eau, dans une cornue munie d'un tube de dégagement; il le sature d'acide sulfureux en dissolution aqueuse et chauffe légèrement. Il se dégage bientôt du gaz que l'on recueille sur la cuve à eau, dans une éprouvette *ad hoc*, après avoir laissé durer le dégagement assez longtemps à l'air libre pour être sûr qu'il ne s'y trouve plus d'air mêlé. Ce gaz, préalablement agité avec une dissolution de sulfate de protoxyde de fer, présente tous les caractères du protoxyde d'azote.

Lorsque l'acide nitrique est plus concentré que dans le mélange qui vient d'être indiqué, on obtient du bioxyde d'azote.

Du reste, la formation du protoxyde d'azote est beaucoup plus facile avec l'acide azoteux qu'avec l'acide azotique.

5° Action de SO^2 *gazeux* sur un mélange d'acide azotique et d'acide sulfurique.

Lorsque, dans le mélange, l'acide sulfurique n'est pas trop concentré, le gaz produit par la réaction de l'acide sulfureux gazeux est du bioxyde d'azote.

Si l'acide sulfurique approche au contraire du degré de concentration de l'acide sulfurique anglais, le mélange se colore en bleu et peut être conservé, sans altération de couleur, dans une atmosphère d'acide sulfureux.

— A la suite de cette lecture, M. LINDER donne l'analyse d'une étude sur la flore fossile du terrain carbonifère de Portugal, publiée en portugais et en français par la Commission géologique de Portugal.

L'auteur, M. Antonio Gomes, a remarqué que des 67 espèces et variétés appartenant aux terrains houillers du Portugal, et dont il a

fait l'énumération, 27 sont communes à la flore houillère de la France, 44 à celle de l'Allemagne, 26 à celle de l'Angleterre, 10 à l'Amérique du Nord; 10 seulement ont paru nouvelles à l'auteur, et il n'a pu pour le moment les rapporter à aucune de ces flores : ce qui prouve encore une fois, ajoute M. Antonio Gomes, combien ces flores, dans l'Europe, participent les unes des autres, qu'elles ont été toutes contemporaines, et combien l'aire de leur commune végétation a été vaste.

De nouvelles espèces ont été ajoutées par l'auteur. Enfin, il a, comme addition, parlé du terrain silurien. L'ouvrage est remarquable par son exécution typographique et les belles planches dont il est orné.

Séance du 7 mars. — M. BAUDRIMONT demande si la Société des Sciences physiques et naturelles ne pourrait pas donner à M. Laliman, auteur d'une brochure sur l'agrandissement du canal du Midi, une espèce de mission qui lui permettrait d'assister à la séance des Sociétés savantes et d'exposer ses vues à ce sujet.

Une courte discussion s'engage, et il est décidé que la brochure de M. Laliman sera renvoyée à une Commission composée de MM. Valat, Linder et Royer, pour juger s'il y a lieu de faire droit à cette demande

— M. SANSAS ne croit pas qu'il y ait lieu de s'occuper de cette question, à moins qu'elle ne soit envisagée au point de vue des difficultés physiques à vaincre pour le tracé du canal. Le côté politique et commercial ne rentre pas dans les attributions de la Société.

— M. VALAT demande s'il ne serait pas possible de porter l'attention de la Société ou du public sur la question de la création d'un port de refuge à Arcachon.

— M. LINDER rend compte d'un ouvrage de géologie publié par la Commission géologique de Portugal, dû à M. Pereira da Costa, et intitulé : *De l'existence de l'Homme aux époques anciennes dans la vallée du Tage.*

L'auteur rappelle les diverses divisions qu'on a faites des époques géologiques. C'est seulement, dit-il, dans la période quaternaire qu'on a trouvé des animaux : l'ours des cavernes, l'hyène des cavernes, mammouth, etc.

M. Lartet a caractérisé les périodes et les a désignées par les animaux qu'on y rencontre : l'âge de l'aurochs, de l'arena, etc.

L'auteur du Mémoire n'élucide pas la question; peut-être la rend-il plus obscure.

Voici les conclusions du Mémoire :

1° Le *Cabeço d'Arruda* est une station humaine antérieure à l'occupation du pays par les celtiques.

Suivant M. Linder, l'auteur ne le prouve pas.

2° Cet endroit fut aussi un lieu de sépulture.

On enterrait les hommes partout.

3° La race des individus qui y furent enterrés offre les caractères de la plus ancienne race dont on ait recueilli les restes.

4° L'état arriéré de la civilisation dans lequel vivaient ces individus se voit dans l'imperfection et dans le peu de variété des objets d'art qu'on y a trouvés. Ces objets ne ressemblent pas aux plus anciens vestiges de l'industrie humaine, et tels qu'ils sont, ils révèlent, sans en être la preuve, une antiquité fort reculée.

5° Les objets qui ont été trouvés accompagnant dans l'Europe centrale les restes de l'homme ou les produits de son industrie, ne sont pas une raison pour conclure que le dépôt, faute de ces restes, n'est pas ancien.

6° Enfin, tout ce que l'on peut affirmer, sans crainte de se tromper, c'est que la formation du dépôt de *Cabeço d'Arruda* est antérieur à l'établissement des Celtiques dans ce pays.

Ces conclusions ne semblent pas inattaquables à M. Linder.

— M. P. Bert fait une communication sur le chloroforme.

Lorsqu'un élément anatomique perd ses propriétés, il est excité; aussi M. Bert a voulu voir si c'est en raison de ce fait que se produit l'excitation lorsqu'on anesthésie les malades par le chloroforme.

Inutile de rappeler les détails de cette période d'excitation; ils sont connus de tous ceux qui ont vu employer le chloroforme. Cette période d'excitation se produit aussi bien chez les animaux que chez l'homme. M. Bert pense que cela est dû à la douleur que les vapeurs de ce liquide amènent en irritant les muqueuses nasale et laryngienne. Pour le prouver, il a fait l'expérience suivante : il a ouvert la trachée d'un lapin et y a introduit un tube contenant du coton imbibé de chloroforme. L'animal s'est endormi tranquillement, sans avoir présenté le moindre phénomène d'excitation. Dans une autre expérience, M. Bert avait pratiqué une section à la partie médiane de la moëlle d'un lapin; l'animal chloroformisé présenta des phénomènes d'excitation dans les membres supérieurs; les membres inférieurs devinrent peu à peu insensibles, sans être agités de mouvements désordonnés.

Si les cellules médullaires du lapin ne sont pas excitées, il est probable que celles de l'homme ne le sont pas non plus. Il se pourrait que la perversion de la sensibilité causée par le chloroforme provoquât dans le cerveau des notions erronées, d'où modification dans les

associations des cellules qui réagissent d'une façon désordonnée. Il faut donc séparer dans l'excitation chloroformique deux faits : l'un qui est dû à l'excitation de la muqueuse nasale, l'autre à des rêves; de là, ces exemples de la transformation des sensations. A ce propos, M. Bert rapporte le récit d'un homme qui, sous l'influence de l'éthérisation, croyait que ses héritiers voulaient l'obliger à signer un testament, alors qu'on le cathétérisait, traduisant ainsi une violence physique par une violence morale.

M. JEANNEL se range à l'opinion de M. Bert; il croit qu'on peut empêcher cette période d'excitation, qui est un obstacle, ou du moins un retard apporté à l'anesthésie complète. Il pense qu'il serait utile que le chirurgien, avant de commencer la chloroformisation, gagnât la confiance de son malade. Après lui avoir fait espérer la possibilité d'exécuter l'opération qu'il doit lui faire sans qu'il en éprouvât de douleur, il montrerait le liquide. Il peut en verser quelques gouttes dans son mouchoir, les respirer devant le malade, et l'engager à en faire autant; alors, à petites doses et successivement, on fait inhaler au sujet assez de chloroforme pour l'anesthésier. Menée ainsi, pas à pas, la chloroformisation ne provoque pas les phénomènes d'excitation qu'on voit se produire lorsqu'on fait inspirer brusquement une forte dose de ce liquide, et quand le malade est encore sous le coup des appréhensions de la douleur qu'il va éprouver.

— M. SANSAS donne le résumé d'un Mémoire intitulé : *Sur l'habitat des Celtes et des Celto-Bretons dans l'Aquitaine prouvé par le langage.*

Ce n'est pas seulement dans l'étude de la conformation du crâne, des mœurs et des coutumes d'un peuple qu'il faut aller chercher ses sources originaires, mais encore dans son langage. Ainsi, en comparant la langue que le peuple parle dans l'Aquitaine, le patois de Bordeaux, avec le celto-breton, M. Sansas a trouvé un grand nombre de mots ayant une même signification. Il cite des exemples.

L'auteur croit donc qu'il y a identité d'origine entre les Bretons actuels et les Celtes qui ont autrefois habité le sol de l'Aquitaine, et que c'est à tort qu'on fait remonter l'origine des Celtes qui ont habité l'Aquitaine à l'époque du christianisme.

— M. GUYOT-DANNECY, pharmacien, est élu membre titulaire de la Société.

— M. VALAT résigne ses fonctions d'archiviste, que de nouvelles occupations ne lui permettent plus de remplir.

M. HOUEL est élu archiviste en remplacement de M. Valat.

Séance du 4 avril. — M. le Dr C. DOUAUD est élu membre de la Société.

— M. Luzun donne lecture d'une *Note sur les hommee à cornes*.

Il rappelle que, dans l'antiquité, cet appendice de la peau, qui est aujourd'hui un emblème du ridicule, était, chez les Romains, chez les Gaulois, un emblème de la puissance, de la gloire. Un grand nombre des Dieux du paganisme romain sont pourvus de cornes : Pan, par exemple. Les Juifs eux-mêmes avaient doté Moïse de ces proéminences.

Malgré ses recherches, M. Luzun n'a pas trouvé de mémoire, de monographie spéciale, ayant trait au sujet dont il entretient la Société.

Il a recueilli çà et là 103 cas, qui n'ont pas tous le même degré d'authenticité. Il rappelle sur ce nombre quelques faits intéressants : une observation publiée en 1776; une autre se rapportant à une femme dont la corne avait 25 centimètres de long; un cas de corne bifurquée; le fait d'un individu dont le corps était couvert de ces saillies.

Dans deux ou trois de ces observations, la mort du sujet suivit la perte de la corne.

Les hommes sont atteints de la maladie cornée plus fréquemment que les femmes. Le siége le plus habituel dans le sexe masculin se trouve aux jambes; chez les femmes, à la tête.

Dernièrement, M. Luzun a observé chez un homme une de ces cornes. Cet individu montrait au public sa corne moyennant une faible somme. Elle avait le caractère de celles qui ont été déjà décrites, d'une longueur de dix centimètres, large à sa base, pointue à son extrémité, dure, insensible, et d'une coloration grise.

Le pronostic de ces productions, comme on l'a vu par les faits cités plus haut, doit être réservé.

Le traitement qu'on a appliqué à ces appendices consiste, d'une manière générale, dans leur extirpation; tour à tour on les a enlevés par excision, ou on les a réséqués.

M. Sentex dit que plusieurs faits semblables à ceux que vient de citer M. Luzun ont été observés récemment et publiés. Il rappelle en outre le fait de M. Grisalle.

Lui-même a eu occasion de voir chez M. Maisonneuve une femme qui présentait une de ces productions. L'extirpation fut suivie de succès. M. Sentex ne croit pas que l'extirpation de la corne entraîne après elle quelque danger; et dans les cas cités par M. Luzun, la mort peut être tout aussi bien imputée au fait de la chute qu'à la perte de l'appendice corné. L'anatomie pathologique de ces tumeurs est bien connue : ce sont des productions épidermiques qui ne sont même pas très rares.

M. VALAT demande s'il y a identité entre les cornes des animaux et celles des hommes.

M. VERGELY répond que les unes et les autres sont formées par des cellules épithéliales empilées et fortement adhérentes, entourant de longues papilles vasculaires. M. Vergely se range à l'opinion de M. Sentex sur le peu de rareté de ces faits et le peu de gravité de l'ablation de ces appendices. Il rappelle que M. le Dr E. Gintrac a fait, dans son *Traité de pathologie interne,* une monographie sur les cornes. Il en cite près de 80 cas. Le plus grand nombre était fourni par des femmes.

M. MICÉ pense que cette sécrétion épidermoïde pourrait bien avoir quelque influence sur la santé générale, par analogie avec ce qui se passe chez les animaux. On sait, en effet, que la corne est très azotée, et qu'elle enlève à l'organisme une grande quantité de cet élément important; ainsi les races dépourvues de cornes, ou races désarmées, sont-elles plus robustes que les autres.

M. SANSAS rappelle que les hommes à cornes, chez les Gaulois, inspiraient un certain respect. Le dieu Bélénus, poète et musicien, portait des cornes.

Séance du 2 mai. — Publications reçues :

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles d'Ille-et-Vilaine, 2e cahier.

Mémoires de l'Académie de La Rochelle. N° 6, 1862-63.

Abhandlungen..... Mémoires de la Société d'histoire naturelle de Brême, tome II.

Monatsbericht..... Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin. Décembre 1866, in-8°.

A l'occasion de la communication faite par M. Luzun, dans la dernière séance, M. le Dr MARX fait remarquer que les saillies figurées sur la tête de Moïse sont des rayons, signes de la puissance intellectuelle, et non des cornes.

— M. SERRÉ communique quelques faits d'observation sur l'ozone. Il a remarqué qu'il y a plus d'ozone la nuit que le jour. Ces observations ont été faites dans des lieux plantés d'arbres (jardins), et aussi dans des endroits dépourvus de végétation (la rue). Les végétaux produisent-ils de l'ozone? M. Poey a fait des recherches à cet égard; malheureusement, il a fait passer l'oxygène provenant des végétaux dans des tubes contenant de la potasse. Or, la potasse détruit l'ozone; il en résulte que ces expériences n'ont pas de valeur. C'est à travers de l'eau ou du liége, qui sont sans influence sur l'ozone, que M. Serré a fait passer l'oxygène provenant des végétaux.

Il s'est assuré ainsi que ce gaz n'était nullement ozonisé. L'ozone, pour M. Serré, est de l'oxygène dans un état électrique particulier qui se produit sous l'influence des courants d'air, et qui n'est pas exhalé par les plantes.

Ces expériences ont été faites en collaboration avec M. Morisot.

M. Micé dit que les observations de M. Serré sur l'ozone confirment celles qui avaient été déjà faites à ce sujet, c'est à dire que l'ozone est plus abondant la nuit que le jour; qu'on le trouve en plus grande quantité à 6 heures du soir qu'à toute autre heure; enfin, qu'il y a plus d'ozone en hiver qu'en été. Ces observations pourraient déjà faire supposer que les végétaux fournissent peu d'ozone, puisque les époques auxquelles on rencontre le plus de ce gaz sont celles où les plantes exhalent de l'acide carbonique et où la végétation sommeille.

La réduction de l'acide carbonique par les plantes ne produit pas d'ozone. Les remarques de M. Serré viennent appuyer cette opinion; que l'ozone est de l'oxygène électrisé.

M. Serré a vu également que les tempêtes ne sont pas précédées d'une accumulation d'ozone dans l'air. Ce n'est que quand il y a eu des agitations de courants dans l'atmosphère qu'on rencontre beaucoup d'oxygène électrisé. L'ozonométrie n'a donc aucune valeur pour prédire la venue d'une tempête.

M. Micé remarque que M. le Dr Hameau, d'Arcachon, a fait des recherches sur l'état d'ozonisation de l'atmosphère de cette localité, et a trouvé que l'ozone était en plus grande quantité l'hiver et dans le voisinage de la forêt.

M. Serré ajoute encore quelques mots sur le réactif de l'ozone. On a écrit partout que sous l'influence de l'ozone il se formait dans une solution d'iodure de potassium de l'iodate de potasse : cette assertion ne lui semble pas exacte. En effet, après avoir préparé une solution d'iodure de potassium parfaitement neutre, il a fait arriver de l'ozone dans cette solution, et la liqueur d'iodure de potassium s'est colorée en jaune par suite du dégagement d'un peu d'iode, puis elle est devenue et restée alcaline.

Séance du 16 mai. — Publications reçues :

Il Nuovo Cimento, années 1857 à 1864; 9 vol. in-8°.

Oberhessische Gesellschaft für Natur-und Heilkunde, 7e et 12e comptes rendus. In-8°.

Société impériale d'Agriculture, Sciences et Arts de Valenciennes. Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Janvier 1867; br. in-8°.

Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Janvier et février 1867.

Actes de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. 1866, 4e trimestre. — *Liste de Prix pour 1866.*

Société scientifique d'Arcachon. Compte rendu présenté à l'Assemblée, 3 février 1867.

Travaux du Conseil d'hygiène publique et de salubrité du département de la Gironde pour l'année 1866. 1 vol. in-8°.

Société d'encouragement pour l'industrie nationale : Programme des prix et médailles mis au concours en février 1867.

— M. Sansas donne lecture d'un mémoire intitulé : *Étude sur les premiers habitants de Bordeaux.* (Voyez tome IV, premier cahier (suite), page 97.)

— M. de Lacolonge entretient la Société de plusieurs appareils qui lui ont été présentés, et dont les inventeurs prétendaient réaliser le mouvement perpétuel.

— M. Bert expose un résumé de ses recherches sur les mouvements de la sensitive. (Voir son Mémoire, tome IV, premier cahier (suite), page 11.)

Séance du 6 Juin. — Publications reçues :

Verhandlungen des Vereins für Naturhunde zu Presburg. T. IV et V, 1859-61 ; in-8°.

Correspondenzblatt des Vereins für Naturkunde zu Presburg. 1re et 2e année, 1862-63 ; in-8°.

Annales de la Société des Lettres, Sciences et Arts des Alpes-Maritimes. T. Ier, 1865 ; in-8°.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. T. Ier, cah. 1, 2, 3, 4 ; 1863-66 ; in-8°.

Mémoires de l'Université royale de Norwége; 16 br. in-4° et in-8°.

Atti del R. Instituto Veneto. T. XII, 3e série, 5e livr., 1866-67 ; in-8°.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen, 1867 ; in-8°.

Mémoires lus à la Sorbonne dans les séances extraordinaires du Comité des travaux historiques et des Sociétés savantes, en avril 1866 : — Histoire, philologie et sciences morales, 1 vol. ; — Archéologie, 1 vol. 1867 ; in-8°.

Recueil des travaux de la Société médicale du département d'Indre-et-Loire. Année 1866 ; in-8°.

Annali delle Università Toscane. T. IV, V, VI, VII, VIII, 1855-1866 ; in-4°.

Lecture d'un travail sur la dépolarisation de la lumière, par M. Péchadergne, communiqué par M. ABRIA. (Voir tome IV, premier cahier (suite), page 102.)

— M. SERRÉ fait part à la Société d'un fait intéressant de la transformation du magnétisme en chaleur.

Ayant enroulé un fil de cuivre sur un tube de verre, dans lequel on plaçait des baguettes de fer doux, il a vu celles-ci s'aimanter; mais s'il mettait à la place une longue aiguille fine, elle ne s'aimantait pas et s'échauffait quelquefois.

— M. BERT fait part de ses observations :

1° Sur l'existence de l'amphioxus à Arcachon;

2° Sur la mort des poissons de mer dans l'eau douce;

3° Sur la physiologie de la lamproie;

4° Sur un signe certain de la mort prochaine sur les animaux supérieurs;

5° Sur la présence de la chitine dans la peau des holothuries.

Ces communications font l'objet de diverses notes insérées dans le tome IV, premier cahier (suite).

Séance du 4 Juillet. — Publications reçues :

Bulletin de la Société de climatologie algérienne. 4e année, 1867, n° 4; in-8°.

Société impériale d'Agriculture, Sciences et Arts de Valenciennes, Revue agricole, etc. T. XXI, nos 2 et 3.

Monatsbericht der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Mars 1867, in-8°.

Atti della R. Academia delle Scienze di Torino. T. I, II, livr. 1, 2, 3.

Actes de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux. 1867, 1er trimestre.

Sont nommés Membres titulaires de la Société : MM. DE BERGEON, ROUMÉGUÈRE, RAGAIN et RAIMONENCQ.

Membre correspondant : M. le Dr JOURDAIN, à Bayeux.

Suite des communications de M. BERT relatives à l'amphioxus, qui a été de la part de Müller, de Quatrefages, de Retzius l'objet d'études particulières. Ce petit animal singulier qui a été découvert dernièrement à Arcachon, vit dans les sables vaseux; au moindre bruit, il s'enfonce rapidement dans le sol humide, en laissant au dehors la tête, qui présente une bouche armée d'un grand nombre de cils vibratils.

Il vit très bien dans les aquariums et se précipite avec voracité sur les aliments qu'on lui fournit.

1° Cet animal meurt dans l'eau douce en quatre à cinq minutes; il

est alors raide, courbé en arrière. On ne tarde pas à voir les cils vibratils de l'intestin s'arrêter dans ce liquide, mais ils reprennent leurs mouvements quand ils sont plongés dans l'eau de mer.

2° Abandonné pendant un temps suffisant pour ne plus donner de contractions sous l'influence d'un courant insupportable aux doigts, on voit ces contractions se montrer de nouveau, et sous l'influence de courants très faibles, quand l'amphioxus est plongé dans l'eau de mer.

Il meurt dans cette eau portée à la température de 41°, et donne encore des contractions locales par l'électricité.

3° La tête coupée, les branchies et les organes génitaux enlevés, il a encore vécu sept jours (température, 15 à 20°).

5° Les amputations de la queue ne se guérissent pas : il se fait une dissociation ascendante des tissus, les muscles se dissocient sans présenter d'altérations microscopiques et deviennent acides.

5° Ils sont endormis par la morphine, paralysés par le curare, sans qu'on ait eu besoin d'introduire le poison par une blessure; ils reviennent à leur état normal dans l'eau de mer pure.

6° Le nombre des intervalles branchiaux varie de 140 (individu de $0^m,06$) à 70 (individus de $0^m,025$).

7° Les intervalles musculaires sont toujours de 60 à 62, quelle que soit la taille de ces individus.

8° Aucune différence entre le mâle et la femelle, sous le rapport de la taille, des proportions diverses, etc.

9° M. Bert n'a pas trouvé de foie; mais il a vu dans le cœur quelques cellules granuleuses, qui n'ont pas paru contenir de glycogène par l'emploi de la teinture d'iode.

10° Les prétendus reins de Müller ne sont constants ni en nombre ni en position, et ne contiennent pas d'acide urique.

11° Le vaisseau sus-intestinal se termine en arrière par un gros renflement pulsatil situé sous l'anus.

12° M. Bert ne croit pas que les gros corps des cellules marginales, ni l'anse terminale de la moelle épinière, soient des capillaires, comme le dit Marcusen.

13° La moelle épinière possède des cellules dans ses renflements et ses étranglements. Ces cellules ne sont pas rondes, comme on le dit; M. Bert a vu une de ces cellules tripolaires, et un de ces prolongements se diviser; il mesurait $0^m,015$; ils sont très difficiles à voir.

14° Les nerfs de la face se terminent dans des cellules; ceux du reste du corps, en de fins réseaux.

15° Les ovaires et les testicules sont identiques à première vue, pleins ou vides. Pleins, leurs loges forment des mosaïques dont chaque hexagone est l'ovule mâle ou l'ovule femelle.

16° Ils sont constitués par des loges suspendues hors de la cavité branchiale. Ces loges fermées contiennent chacune un sac fermé, tapissé d'épithélium, où se développent les ovules mâles ou femelles.

Le mâle donne naissance à des cellules secondaires, où apparaissent un grand nombre de spermatozoïdes.

L'ovule femelle naît par la vésicule germinative, ou peut-être son noyau; devenu adulte, il perd sa vésicule.

17° La corde dorsale n'est composée ni de cellules, ni de rondelles, mais d'un tissu spécial qui a besoin d'une description détaillée.

Hippocampes.

— M. Bert rappelle que chez ces poissons, le mâle porte les œufs dans une poche post-anale. On ne sait comment ils sont là introduits. Les petits sortent tous en quelques heures; leur nombre atteint 300. Ils ressemblent au père, et n'ont pas de vésicule ombilicale.

La poche ombilicale n'est ouverte que par une petite fente en avant. Cette fente est très étroite pendant la gestation, et peut-être de même se ferme-t-elle complètement. Dans tous les cas, elle ne paraît pas permettre un renouvellement suffisant de l'eau intérieure. Ainsi, chaque œuf est enveloppé dans une petite alvéole extrêmement vasculaire venant de la mère. M. Bert pense qu'il y a une respiration aux dépens du sang de la mère.

Chez ces animaux, les globules du sang de l'embryon sont plus petits que ceux de l'adulte : $0^{mm},009$ à $0^{mm},012$ au lieu de $0^{mm},015$ à $0^{mm},018$, contrairement à la règle ordinaire.

Les Hippocampes vivent longtemps, de 1 à 2 heures, dans l'eau douce; ils sont tués par une température de 38 à 39°.

Seiche.

1° La locomotion s'exécute exclusivement par l'entonnoir, bien qu'on ait dit récemment le contraire.

2° Les grands bras enroulés ne servent qu'à saisir la proie; ils sont alors lancés rapidement en avant. Le gauche est plus court que le droit.

3° La femelle est moins zébrée que le mâle. Sa tête et ses bras sont moins longs par rapport au corps. Son os est beaucoup plus excavé et élargi en arrière.

4° Cartilage composé d'une matière hyaline non transformable en chondrine ni en gélatine par l'ébullition; cellules très ramifiées et anastomosées.

5° Urines acides très riches en cristaux et calculs muriformes; elle se trouble à peine par l'ébullition.

6° Liquides de l'œil ne se troublant ni par l'ébullition, ni par l'alcool, ni par les acides.

7° Sang blanc bleuâtre; l'artériel est un peu plus bleu que le veineux.

Il bleuit au contact de l'air jusqu'à la teinte outre-mer. Les globules, de $0^{mm},012$ à $0^{mm},002$, sont tombés au fond; ils sont incolores, et avec ou sans noyau, pris dans un très petit caillot. Le bleuissement est donc produit par le sérum.

Il se prend en masse par l'ébullition, par les acides ou par l'alcool.

Densité du sang, 1,010. Eau, 891 millièmes; matières solides, 109. M. Denys n'y a pas trouvé de plasmine.

8° La Seiche possède des glandes salivaires. La réaction de la salive est alcaline. Un estomac, un cœcum en spirale. Les sécrétions de l'intestin et du foie donnent une réaction acide.

9° Les deux cœurs branchiaux se contractent ensemble; de suite après, les deux veines branchiales, par un mouvement vermiculaire, puis les deux oreillettes du cœur artériel.

La grosse veine antérieure est également contractile. En outre, tous ces organes sont recouverts d'une peau contractile, qui prend part à leurs mouvements.

10° L'animal tiré de l'eau meurt rapidement. Les cœurs cessent de battre; la peau qui recouvre les organes se contracte pendant deux heures; l'estomac, l'intestin, et peut-être le pancréas, présentent des mouvements péristaltiques.

Après une heure environ (température 25°), les nerfs n'agissent plus sur les muscles; ils perdent cette propriété du centre à la périphérie. Auparavant, on obtenait par le nerf des contractions dans les muscles avec des courants qui ne donnaient rien, portés directement sur ceux-ci.

Les muscles du sac, des piliers du bras donnent des contractions brusques et peu durables; ceux des viscères en donnent de lentes et de longues. Après quatre ou cinq heures, les muscles perdent leur contractilité; les muscles de l'entonnoir, les derniers, et surtout la peau qui recouvre les organes, les cellules chromatophores, restent excitables pendant plus de douze heures.

11° Pendant la contraction, le muscle ne change pas de volume.

12° Les boutons du sac sont maintenus dans les cupules de l'entonnoir par la pression atmosphérique. L'animal peut les ouvrir; cependant M. Bert n'a jamais eu occasion de l'observer.

13° Les ventouses possèdent une membrane libre qui les fait happer; un muscle longitudinal, qui les fait aspirer; un circulaire, qui les fait lâcher.

14° Les Seiches écloses de la veille meurent à 38 ou 39°.

Plongée dans l'eau à 40°, une grosse Seiche devient immobile, insensible, et meurt aussitôt; mais ses cœurs battent, ses nerfs sont excitables, ses muscles contractiles. A 42°, les cœurs sont arrêtés, les nerfs non excitables; à 45°, les muscles ne sont plus contractiles, ils sont raides et notablement acides.

15° Les œufs sont noirs au moment de la ponte; on ignore le motif de cette coloration.

Séance du 19 juillet. — Publications reçues :

De l'imagination dans les sciences, discours prononcé par M. Royer à l'Académie de Bordeaux. Br. in-8°.

Monatsbericht, etc. (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin). Avril 1867; in-8°.

Sitzungsbericht, etc. (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Munich). Années 1860-61 (I et II), 1862 (I et II), 1863 (I), 1865, 1866, 1867 (I); in-8°.

Commissão, etc. (Commission géologique du Portugal : Mollusques fossiles gastéropodes des dépôts tertiaires de Portugal). In-4°.

Bulletin de la Société de Climatologie algérienne. Années 1, 2, 3 (1864-67); in-8°.

Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux. T. XX, XXI, XXII, XXIII, XXV (1855-64); in-8°.

— M. le Dr Lanelongue est nommé membre titulaire.

— M. Prat prend date pour les faits suivants, qu'il annonce :

1° Le fluor est obtenu par lui en grande quantité et par une méthode aussi simple que peu dispendieuse.

2° Des feuilles d'argent chauffées et soumises à un courant de fluor forment du fluorure d'argent sur-le-champ, si la température atteint environ 400°. On peut facilement s'assurer du fait en traitant cet argent par l'ammoniaque, et celle-ci ensuite par l'iodure de potassium. Ce petit moyen est excellent pour découvrir la plus faible trace d'argent attaqué, soit par le fluor, soit par le chlore.

3° Le fluorure d'argent ne peut être comparé, quant à ses propriétés générales, qu'au chlorure d'argent. Il ne diffère jusqu'ici que par ces trois points : le fluorure est plus attaquable par la lumière que le chlorure; il a une densité moindre, et il donne de l'acide fluorhydrique quand le chlorure donne de l'acide chlorhydrique.

4° La découverte de ce fluorure a facilement conduit à celle de l'équivalent du fluor, lequel a été déterminé de la manière suivante, le 10 juillet 1867 :

A. — Un gramme de fluorure d'argent pur et fondu a été exactement pesé sur une bonne balance.

B. — Ce fluorure a été ensuite convenablement traité par la potasse caustique, et chauffé dans une cuiller d'argent jusqu'à décomposition complète. Le produit a été ensuite soumis à l'eau bouillante et maintenue telle pour réduire, par l'addition d'un peu de sucre candi, tout l'oxyde d'argent que l'argent pouvait retenir.

C. — Cet argent a été lavé à plusieurs reprises à l'eau froide, puis à l'eau bouillante, et enfin recueilli avec tout le soin minutieux qu'exige une telle opération.

D. — Le métal, desséché et calciné, pesait 785 milligrammes, d'où le fluor 215. Partant de ces données, on a :

$$\frac{13449 \times 215}{785} = 369{,}4746$$

comme représentant l'équivalent du fluor.

D'après un tel résultat, les véritables fluorures, FlM, ne seraient pas connus. C'est ce que M. Prat veut établir, en les faisant connaître après étude faite.

5° La densité du fluorure d'argent a été également déterminée :

$$D\,\frac{P = 70}{P - P' = 13} = x\,\frac{\overset{\text{Poids du corps à l'air.}}{70}}{\underset{\text{Différence ou eau déplacée.}}{13}} = 5{,}3846$$

Poids du corps sous l'eau : 57

— M. Lespiault lit le résumé d'un Mémoire sur la variation des éléments des planètes.

— M. Abria lit l'*Essai d'un exposé de la théorie de la double réfraction.*

L'auteur s'est proposé, en suivant les traces de Fresnel, d'exposer la question d'une façon plus simple.

Séance du 1er août. — Publications reçues :

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique, T. XXI, nos 4 et 5.

Bulletin de la Société de Climatologie algérienne. 4e année, nos 5 et 6.

Annali, etc. (Annales des Universités toscanes). T. I, II, III, 1846-1854; in-4°.

Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux; Compte rendu des séances. 1867, n° 5.

Proceedings..... (Comptes rendus de la Société philosophique de Glasgow), T. I à V, t. VI, nos 1 et 2; in-8°.

Société des Sciences naturelles du grand duché de Luxembourg. T. II, T. IV à IX. — *Observations météorologiques,* par F. Reuter; in-8°.

Houël : *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie;* in-8°.

Bulletin de l'Académie Delphinale. T. III, 1re part. Grenoble, 1864.

Bulletin de la Société des Sciences naturelles et historiques de l'Ardèche. N° 3, 1866.

M. Baudrimont fait diverses communications :

1° Balance construite sur le modèle de celle de Nicholson pour le duc de Gênes.

2° Description d'un petit termographe.

3° Résumé d'une leçon sur l'analyse chimique en général.

— Communication de M. Paul Bert :

A. — *Physiologie du système nerveux de la Seiche.* — L'encéphale (ganglion sus-œsophagien) est insensible et inexcitable; son ablation supprime toute trace d'intelligence, mais ne trouble en rien les mouvements de locomotion et de respiration. Le ganglion sous-œsophagien est sensible et excitable; sa partie antérieure est le centre principal de l'accommodation des mouvements des bras à des usages d'ensemble; sa partie postérieure est le centre des mouvements respiratoires. Les petits ganglions situés à la base des bras, et reliés par un nerf circulaire, sont aussi les centres d'actions réflexes d'un bras sur l'autre; enfin, les nerfs de chaque bras, qui possèdent des cellules ganglionnaires, sont le lien d'actions réflexes bornées à ce bras. Les gros ganglions palléaux n'ont point présenté d'actions réflexes; ils sont des ganglions de renforcement, où l'excitabilité persiste encore quand elle a disparu du nerf qui les relie au ganglion sous-œsophagien. Les fonctions du ganglion stomacal (sans cellules, suivant Chéron) ne sont pas complètement éclaircies.

Tous les nerfs généraux paraissent mixtes; les nerfs qui se rendent au cœur aortique et aux cœurs branchiaux arrêtent en diastole ces organes quand on les galvanise énergiquement.

Le curare et la strychnine agissent sur le système nerveux des seiches comme sur celui des vertébrés. L'air contenu dans les mailles de l'os de la seiche est composé presque exclusivement d'azote; on n'y trouve que des traces d'acide carbonique (le gaz a été recueilli sous l'eau), et de 2 à 5 0,0 d'oxygène.

B. — *Sur la mort des poissons de mer dans l'eau douce.* — M. P. Bert rappelle ses anciennes expériences sur l'influence de l'eau sucrée (Voy. Mém., t. IV, 1er cah. (suite), p. 47); il montre ensuite que la densité ne joue pas le seul rôle; car de l'eau de mer, ramenée par l'addition

d'eau distillée à la densité de l'eau douce, conserve pendant longtemps la vie de divers poissons de mer. Le chlorure de sodium a une influence bienfaisante manifeste, mais non aussi grande que le mélange des sels de la mer; l'excès de ceux-ci est plus redoutable que leur diminution. Pour M. Bert, la mort est due à un changement dans les conditions osmotiques de la membrane branchiale, changement qu'il se propose d'étudier avec soin. Peut-être l'action si remarquable des bains de mer trouvera-t-elle là quelque explication.

C. — *Sur la reproduction de parties enlevées chez les Annélides.* — M. P. Bert met sous les yeux des Membres de la Société une Annélide (Eunicienne) qui a reproduit sa tête et quelques anneaux suivants, et une autre, qui a reproduit sa queue. C'est, chez les Annélides, le premier fait de réintégration signalé, sauf une indication en une ligne faite par M. de Quatrefages dans son livre récent. M. P. Bert fait remarquer que l'Annélide à tête repoussée a reproduit à la fois tous les anneaux qui lui manquaient : c'est là, dit-il, un fait général, et il l'appuie d'observations personnelles sur la reproduction des pattes de Crabe, de larves d'insectes, des rayons d'Astérie, etc.

D. — *Sur la mort des animaux à sang froid par l'action de la chaleur.* — M. P. Bert énumère les températures auxquelles succombent un certain nombre d'animaux à sang froid, aquatiques, quand on élève la température de l'eau. Il montre, par des exemples empruntés aux Grenouilles, aux Seiches, aux Crabes, qu'ils meurent tous par les centres nerveux; il faut une plus haute température pour tuer le nerf moteur, une plus élevée encore pour supprimer la contractilité musculaire, et encore plus pour supprimer la sensibilité.

M. Bert a vu des muscles de Grenouilles dans lesquels le cours du sang avait été interrompu par une ligature, et devenus, par l'action de la chaleur, tout à fait inexcitables par les plus forts courants électriques, reprendre leur contractilité quelques jours après qu'on eut relâché la ligature.

E. — *Sur les appendices dorsaux des Éolis.* — M. P. Bert rappelle les discussions auxquelles ont donné lieu les appendices dorsaux des mollusques nus, appendices qui sont en communication avec l'intestin. Ceux des *Eolis* jouent certainement le rôle d'un foie, comme l'avait dit Souleyet, car l'addition de la teinture d'iode les colore fortement en violet. A l'extrémité de ces saillies, se trouve une petite poche communiquant avec l'extérieur, pleine de corps urticants, insolubles dans l'acide acétique, l'acide nitrique, l'acide sulfurique concentrés.

F. — *Sur le sang de divers animaux invertébrés.* — Le sang des *Synaptes* est incolore et contient quelques rares globules; il ne se

coagule pas spontanément, et ne se trouble pas par l'ébullition; il contient 28 p. 1000 de résidu sec.

Celui des *Siponcles* diffère selon les espèces, non encore déterminées; chez toutes, le sang contient d'abondants corpuscules colorés, discoïdes, qui rougissent au contact de l'air; chez certains seulement, on y trouve, en outre, des agglomérations de corpuscules très analogues aux corpuscules blancs des vertébrés, qui donnent au sang l'aspect du pus sanguinolent. Le sang contient encore de nombreux infusoires, qu'on a souvent pris pour des cellules épithéliales libres. Tous ces globules tombent au fond, par le repos, sans être pris dans un caillot; chez les Siponcles à sang puruliforme, les globules occupent un volume égal à celui du sérum surnageant, qui est incolore; il y a chez eux 80 p. 1000 de globules desséchés, dans le sang; le sérum, qui se trouble à peine par l'ébullition, contient 45 p. 1000 de matières solides.

Le sang des *Crabes* est souvent un peu brunâtre; M. Bert l'a vu une fois couleur chocolat. Il se coagule spontanément; le sérum filtré se coagule par l'ébullition. Les Crabes qui viennent de changer de peau ont beaucoup moins de globules et de fibrine dans le sang que les Crabes à peau dure; de même, leurs muscles contiennent plus d'eau. M. Bert a malheureusement perdu les chiffres à l'appui de ces assertions.

Le sang des *Seiches* a pour densité 1,01; il donne spontanément un très faible caillot, qui entraîne au fond du tube les globules, très rares. Le sérum bleuit fortement à l'air, et se coagule en masse par l'ébullition ou les acides. Il contient : eau, 891; albumine, 31; fibrine et globules, 4 à 5 au plus; sels, 75.

G. — M. Bert a trouvé par deux fois, dans des coquilles bivalves, un *Discobole* fixé par sa ventouse; or, ces coquilles étaient tapissées d'œufs très avancés dans leur développement, dans lesquels M. Bert croit avoir reconnu de petits discoboles. Y aurait-il là, chez les poissons, un nouveau fait de surveillance exercée par la mère sur ses œufs et ses petits?

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1867-1868.

Mémoires de l'Institut Égyptien d'ALEXANDRIE. (In-4°.)

Tome I (1862).

DE CHAMBURE : Du problème relatif à la marche du cavalier au jeu des échecs (20 p., 6 pl.). — MAHMOUD-BEY : Éclipse totale de soleil observée à Dongolah, le 18 juillet 1860. — FIGARI-BEY : Géographie géognostique de l'Afrique centrale. — Tableau des crues du Nil pendant 16 années. — GASTINEL : Eaux thermales de Hélouan. Eaux salines d'Aïn-Syra. — MUSTAPHA-MAGDALY : Analyses quantitatives de l'eau du Nil. — SCHNEPP : Études sur le climat de l'Égypte (192 p.). — GRÉGOIRE : Du khamsin et de ses effets; du blé retrait. — ESPINASSY-BEY : Sur les principes immédiats des blés d'Égypte (18 p.). — GASTINEL : Analyse de glutens retirés des blés égyptiens. Opiums de la Haute-Égypte (36 p.). — GRÉGOIRE : De la culture du coton en Égypte (42 p.). De l'éducation du ver à soie en Égypte. — DIKAIOS : Des maladies prédominantes dans la colonie grecque d'Alexandrie. — CHAFEY-BEY : De la médecine empirique parmi les Arabes d'Égypte. — GASTINEL : Sur l'arséniate de caféine et l'acide tanno-arsénieux considérés comme agents fébrifuges.

Mémoires de la Société Linnéenne du Nord de la France. (AMIENS. In-8°).

Année 1866.

VION : Étude sur Linné (48 p.). — D. ROBBE : Catalogue des plantes usuelles, avec une explication des principaux termes de Botanique (imprimé en 1754) (66 p.). — DOURS : Quelques observations sur le *Trifolium elegans*. — COTTY : Sur le *Bombyx Cynthia*. Relations de quelques chasses de coléoptères rares d'Algérie (33 p.).

***Verslagen en Mededeelingen der Koninglijke Akademie van Wetenschappen te* AMSTERDAM.** (Comptes-Rendus et Mémoires de l'Académie des Sciences d'AMSTERDAM.) — In-8°.

1re Série. T. I (1853).

W. VROLIK : Leendert Bomme, premier observateur de la manière dont les Pholades percent les pierres (11 p.). — HARTING et MATTHES : Sur l'auteur probable de l'invention du microscope (15 p.). — W. VROLIK : Biographie d'Alexandre Numan (22 p.). — CLAAS MULDER : Sur un cerf fossile *(Cervus elaphus fossilis)* découvert à Schildwolde (10 p.). — MEURSINGE : Histoire naturelle de l'île de Rottum (14 p.). — SEBASTIAN : Sur les maladies des Nègres (23 p.). — BAEHR : Recherches sur le gyroscope de Foucault (5 p.). — SCHLEGEL : Sur la croissance et les changements de couleur du plumage des oiseaux (17 p.). — CONRAD, DELPRAT et STAMKART : Sur la détermination de l'affaissement du sol des Pays-Bas (13 p.). — VON BAUMHAUER : Détermination de l'oxygène dans les corps azotés. — G. VROLIK : Étude du développement de la pomme de terre à l'intérieur du tissu du tubercule-mère (6 p., 1 pl.).

T. II (1854).

KAISER : Compte-Rendu des travaux exécutés à l'Observatoire de l'Université de Leide en 1853 (15 p.). — VAN HALL : Les métamorphoses considérées comme un des principes fondamentaux d'une classification naturelle dans le règne végétal (17 p.). — W. VROLIK : Biographie de D. F. Arago (22 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur une illusion d'optique par laquelle le relief de l'objet considéré se trouve renversé (38 p., 1 pl.). — W. VROLIK : Biographie de C. G. C. Reinwardt (16 p.). — SCHLEGEL : Note sur le Dronte *(Didus ineptus)* et ses congénères (25 p., 1 pl.). — DE FREMERY : Sur un crâne humain trouvé aux environs de Domburg, île de Walcheren (Zélande) (13 p., 1 pl.). — W. VROLIK : Biographie de J. C. Rijk (30 p.). — G. VROLIK, DE VRIESE et DOZY : Sur la physiautotypie ou reproduction spontanée des objets naturels (15 p.). — VOORHELM SCHNEEVOOGT : Sur la léproserie de Batavia, dans la colonie de Suriname (8 p.).

T. III (1855).

BRANTS : Sur l'image formée dans l'œil composé des animaux articulés (14 p., 1 pl.). — GUNNING et HARTING : Recherches sur l'origine de l'azote dans les végétaux, et des produits ammoniacaux dans l'air atmosphérique (23 p.). — G.-J. MULDER : Où les végétaux sans engrais prennent-ils leur azote? (27 p.). — HARTING : Observations sur le mémoire précédent. — VAN DER WILLIGEN : Sur les

battements et sur les consonnances et les dissonnances (32 p.). — STARING : Explication géologique de l'affaissement des Pays-Bas (19 p.). — KAISER : L'opinion d'Otto Struve, sur l'élargissement de l'anneau de Saturne, comparée avec les manuscrits d'Huygens; exactitude des observations de ce dernier (47 p.). — BAEHR : Changement de variables dans une classe particulière d'équations différentielles (13 p.). — SCHLEGEL : Nouvelles espèces de serpents venimeux de la Côte-d'Or (7 p.). — BRANTS : Sur le parenchyme ligneux unissant entre eux les rayons médullaires, et formant ainsi un réseau de cellules nourricières de l'aubier des dicolylédonées (28 p., 1 pl.). — STORM BUYSING : Sur les rivières des Pays-Bas au point de vue de l'irrigation et de la navigation (12 p.). — W. VROLIK : Biographie de Wilhem de Haan (10 p.). — OUDEMANS : Ephémérides provisoires de la Comète de d'Arrest, en vue de sa prochaine apparition en 1857. (5 p.). Détermination de l'orbite de Proserpine, au moyen d'observations faites dans ses deux premières apparitions, en ayant égard aux actions perturbatrices de Jupiter et de Saturne (19 p.). — DELPRAT : De l'équilibre sur le plan incliné, dans le cas où les forces ne sont pas situées dans ce plan (12 p., 1 pl). — HARTING : Sur les petits tourbillonnements dans les mélanges de l'eau avec les liquides (20 p.).

T. IV (1856).

OUDEMANS et STAMKART : Sur le règlement du temps moyen aux divers lieux des Pays-Bas, etc. (13 p.). — DE VRIESE : Sur la structure des orchidées, etc. (6 p.). — BOSSCHA Jr : Essai de solution d'un problème de télégraphie électrique (18 p.). Addition à la note précédente (6 p.). — DE VRIESE : Sur la fleur du *Dryobalanopsis camphoræ*. — DOZY : Sur un travail relatif aux Hépatiques de Java. — LOBATTO : Sur les relations qui existent entre les coefficients d'une équation d'ordre supérieur en x et ceux de sa transformée en $x - p$ (30 p.). — HALBERTSMA : Relation entre le muscle large dorsal et le triceps brachial chez l'homme, formant l'analogue du *musculus anconœus quintus* des animaux (9 p.) Sur le rapport de l'artère sous-clavière avec la présence accidentelle de côtes cervicales chez l'homme (12 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur la lumière stratifiée dans l'œuf électrique (7 p.). — BIERENS DE HAAN : Sur la théorie des intégrales définies (22 p.). — OUDEMANS : Découverte d'une nouvelle étoile variable. — BADON GHIJBEN : Sur l'état des poutres flottantes, trouvées au fond des eaux. — Analyse des articles du *Journal de l'Académie de Kazan*.

T. V (1857).

W. VROLIK : Revue des Sociétés savantes de la Néerlande (44 p.).

— GUNNING : Note sur la brucine (17 p.). — BUYS BALLOT : Sur la portée de quelques principes généraux de physique, et, en particulier, du principe que les atomes, tant hétérogènes qu'homogènes, oscillent les uns vis à vis des autres autour d'un état d'équilibre (16 p.). — Correspondance entre O. STRUVE et KAISER au sujet des changements de dimensions de l'anneau de Saturne (23 p.). — G. J. MULDER : Analyse et composition des combinaisons du cuivre avec les autres métaux (41 p.). — Sur les règles de construction des paratonnerres (13 p.). — G. VROLIK : Sur quelques propriétés physiologiques du *Viscum album*. — VAN DER BOON MESCH : Détermination de la quantité d'alcool dans les liquides contenant, outre de l'alcool et de l'eau, d'autres substances, et sur la valeur des ébullioscopes analyseurs (21 p.). — VAN BREDA : Observations sur les images secondaires (12 p.). — KAISER : Opinion de Secchi sur l'anneau de Saturne, comparée aux mesures prises à l'Observatoire de Leide (27 p.). — OUDEMANS : Détermination de l'orbite de Proserpine, d'après l'ensemble des observations faites dans ses trois premières apparitions, en tenant compte des actions perturbatrices de Jupiter et de Saturne (21 p.). — W. VROLIK : Biographie de Fr. Dozy.

T. VI (1857).

OUDEMANS : Détermination de la longitude géographique par l'observation des hauteurs égales de la Lune et d'une étoile (16 p.). D.-G. MULLER : Considérations sur l'action de l'électricité atmosphérique et sur la préservation des édifices contre ses effets (25 p.). — Rapport de la Commission pour la confection d'étalons métriques, etc. (12 p.). — G. VROLIK : Phénomènes remarquables dans le développement d'un *Lonicera periclymenum*. — MIQUEL : Sur le caractère du *Rhodoleia*, genre douteux jusqu'à présent. — DEVRIESE : Résultats de la culture du quinquina dans les Indes Néerlandaises en 1856 (62 p.). — MIQUEL : Nouveaux genres d'Apocynées des Indes. — STAMKART : Description d'un modèle d'instrument pour la détermination des déviations du compas causées par le fer des navires, etc. (9 p.). — VAN HASSELT : Sur la constatation des empoisonnements par la strychnine, etc. (22 p.). — BADON GHIJBEN : Détermination de l'aberration de sphéricité des lentilles (12 p.). — KAISER : Opinion de Secchi sur l'anneau de Saturne, comparée aux dernières mesures de Secchi lui-même (13 p.). — SCHLEGEL : Influence de l'eau sur les couleurs de quelques oiseaux. Sur la place du *Colius* dans la classification naturelle.

T. VII (1858).

HALBERTSMA : Considérations anatomiques et physiologiques sur

le muscle frontal (9 p.) — G. VROLIK : Sur les caractères extérieurs du sexe du grillon-taupe, et sur son habitation (20 p., 1 pl.). — ERMERINS : Sur l'identité de la lumière et de la chaleur rayonnante (19 p.). — BLUME : Sur les Orchidées des Indes-Orientales, et sur l'organisation de leur appareil de fructification (16 p., 2 pl.) — SCHLEGEL : Quelques espèces éteintes d'oiseaux gigantesques des îles Mascareignes, etc. (29 p., 2 pl.). — JAEGER : Sur deux veaux mâles soudés par le bassin (8 p.). Sur un veau à tête secondaire. — CONRAD : Sur le percement de l'isthme de Suez (31 p.). — VAN HASSELT : Sur une description récente d'un individu de la plus grande espèce de serpents venimeux connus jusqu'à présent, appartenant au genre *Naja*. — VAN DER WILLIGEN : Sur le spectre électrique (4 art., 144 p.). — HARTING : Catalogue des plantes des îles de Texel et de Wieringen, etc. (10 p.). — VAN DER BOON MESCH et G. J. MULDER : Sur de l'eau rapportée de la Mer-Morte. — CONRAD et DELPRAT : Sur l'affaissement de Nimègue (15 p., 2 pl., 3 tabl.). — BUYS BALLOT : Sur les caractères de la présence des racines imaginaires dans une équation de degré supérieur (19 p.). — LOBATTO : Sur la résolution des équations de degré supérieur (27 p.). — HARTING : Corpuscules sanguins du *Cryptobrancus japonicus* (5 p., 1 pl.).

T. VIII (1858).

VAN HALL : Sur quelques plantes des Pays-Bas (8 p.). Observations morphologiques sur la fleur (12 p., 1 pl.). — VAN DER WILLIGEN : Sur le spectre électrique (art. 5, 6, 7; 64 p.). — STAMKART : Démonstration élémentaire de la série de Taylor, en tenant compte du *reste* (11 p.) — SCHROEDER VAN DER KOLK : Recherches sur l'inflammation, provenant seulement du sang artériel (12 p.). Structure des poumons chez les oiseaux. — CL. MULDER : Sur le Grillon-taupe (24 p., 1 pl.). — VON BAUMHAUER : Sur l'essai du lait de vache, et sur le lait en Néerlande (44 p., 1 tabl.). —VAN GOGH : Les orages auprès du Cap de Bonne-Espérance comparés avec la température de la mer (23 p., 2 pl., 7 tabl.). — BIERENS DE HAAN : Sur la séparation des racines imaginaires (13 p.). — DUMONTIER : Constitution géologique de l'île de Curaçao. — VAN HASSELT : Sur l'emploi des flèches empoisonnées dans les Indes-Orientales (15 p.). — BUYS BALLOT : Rapport sur un Mémoire de Scheither, sur la Météorologie de Sumatra (13 p.). — G. VROLIK : Multiplication des conifères par des rejetons, etc. (10 p., 2 pl.).

T. IX (1859).

BLUME : Sur quelques espèces de bois des Indes-Orientales, étu-

diées au point de vue des ravages causés par le taret et autres mollusques (25 p.). — VAN DER HOEVEN : Sur le Pithecheir mélanure de F. Cuvier. — BOSSCHA Jr : Sur une propriété générale de la distribution linéaire des courants galvaniques (6 p.). Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur par des mesures galvaniques (10 p.). — LOBATTO : Remarques sur la règle de Newton pour la détermination du nombre des racines imaginaires d'une équation algébrique (15 p.). — VAN REES : Sur la décharge indirecte de l'électricité (23 p.). — JAEGER : Développement incomplet d'une seconde mâchoire partant de la symphyse de la mâchoire inférieure de deux porcs (10 p., 3 pl.). — HALBERTSMA : De la suture infra-orbitale (8 p., 3 pl.). — SCHROEDER VAN DER KOLK : Détermination provisoire de la latitude de l'observatoire d'Utrecht (28 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur la couleur d'un ressort d'acier dans la lumière polarisée (8 p.). — VAN DER HOEVEN : Description de trois crânes humains remarquables du Musée de Leide (10 p., 3 pl.). — VAN DER WILLIGEN : Sur le spectre électrique (art. 8, 7 p.). — VAN BREDA : Réponse au précédent Mémoire de VAN REES (13 p.). — OUDEMANS : Sur l'irritabilité des feuilles du *Dionæa muscipula* (17 p., 1 pl.). — SASSE : Extraits des Mémoires de l'Université de Kazan. (Généralités sur les Arachnides. — Sur le cercle de Ziadrinsk, gouv. de Perm. — Les habitants du district de Koungour, gouv. de Perm. — Cas remarquable d'ischurie rénale congéniale) (38 p.).

T. X (1860).

OUDEMANS : Comparaison des valeurs attribuées au rayon vecteur de la Lune dans les *Tables de la Lune*, de Hansen, avec celles que donnent les observations les plus exactes (25 p.). — VON BAUMHAUER : Sur la manière dont se comportent la soude et la potasse en présence des acides chlorhydrique et nitrique (19 p.). — DELPRAT : Sur la résistance des cylindres creux ou des tuyaux contre les pressions normales intérieures (16 p.). — BAEHR : Développement de sin nx et de cos nx, suivant les puissances de sin x et de cos x, pour des valeurs entières de n (7 p.). — BUYS BALLOT : Sur un anneau entourant le soleil, indiqué par l'astronomie et constaté par la météorologie (27 p.). — STARING : La marne en Néerlande (22 p.). — VON BAUMHAUER : Examen chimique du fer du canon qui a fait explosion à bord du *Pro Patria* (14 p.). — KAISER : Études sur la marche de la pendule astronomique *Hohwü*, n° 15, de la Marine néerlandaise (41 p.). — LOBATTO : Sur quelques propriétés d'une classe particulière de fonctions dérivées (18 p.). — JANSSENS : Procédé perfectionné pour l'analyse de la strychnine des *contenta*, des

aliments, etc., dans les affaires criminelles. — STORM BUYSING : Les côtes du nord et du sud de la Hollande. — STARING : Origine du dépôt *(grind)* de nos rivières. — VAN DER WILLIGEN : Sur la décharge électrique dans le vide. — CONRAD : Sur l'affaissement des nouveaux quais d'Amsterdam (19 p., 2 pl., 1 tabl.). — VAN DER WILLIGEN : Sur les couleurs des plaques mêlées (*mixed plates* de Young) (41 p., 1 pl.).

T. XI (1861).

CONRAD et DELPRAT : Sur l'affaissement de Nimègue. — ELIAS : Sur la puissance de la machine magnéto-électrique (30 p.). — STAMKART : Remarque sur l'usage de la boussole d'intensité à bord d'un navire, pour trouver la déviation de l'aiguille aimantée (9 p.). — BOSQUET : Coup d'œil sur la répartition géologique et géographique des espèces d'animaux et de végétaux du Limbourg, etc. (13 p., 1 pl.). — OUDEMANS : Détermination des rayons de courbure des lentilles sphériques (16 p.). — GUNNING : Comparaison des eaux au point de vue des matières organiques qu'elles contiennent (10 p.). — DONDERS : Le système réfringent de l'œil humain, particulièrement dans l'état morbide (43 p.). — VAN BREDA : Sur les haches d'Amiens-Abbeville, considérées dans leurs rapports avec la présence de dents de chevaux, de porcs, de ruminants, etc., dans les couches crayeuses de Saint-Pietersberg, près Maastricht (11 p.). — VAN HASSELT : Sur l'usage des flèches empoisonnées dans les Indes-Orientales (28 p.). — KITARRA : Recherches anatomiques sur les *Galeodes araneoides* et *dorsalis* (10 p.). (Extrait des *Mém. de l'Univ. de Kazan).* — HARTING : Nouveaux systèmes de lentilles de Merz et de Hartnack, et limites de la puissance des microscopes actuels (21 p.). — HARTING, MIQUEL et VAN DER HOEVEN : Sur un produit organique retiré du fond de la mer de Banda, etc. (14 p., 1 pl.). — VAN DEN BOSCH : Premier Mémoire sur les *Hyménophylacées* (31 p.). — HALBERTSMA : Sur la lame médiane du cartilage thyroïde (10 p., 1 pl.). Sur l'histoire du canal de Schlemmius (8 p.). — BAEHR : Sur la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce (24 p.). — STAMKART : Sur l'aimantation temporaire du fer. — VON BAUMHAUER : Alcoolométrie au moyen de l'aréomètre.

T. XII (1861).

BUCHNER et VROLIK : Correspondance. — BLEEKER : Sur les espèces de poissons ignorées avant la connaissance de la faune de Singapour (36 p.). Faune ichthyologique de l'île de Pinang (17 p.). — VAN DER HOEVEN : Description d'un crâne magyare et d'un crâne esthonien (12 p., 2 pl.). — HARTING : Nidification de

l'*Arachnothera (Cinnyris) longirostris* (6 p., 1 pl.). — SCHLEGEL : Sur l'histoire des éléphants, et en particulier de l'*Elephas sumatranus* (12 p.). — Deuxième Rapport sur le Taret (18 p.). — HALBERTSMA : Le muscle thoracique (17 p., 3 pl.). — BADON GHIJBEN : Sur le problème de Malfatti : Inscrire dans un triangle trois cercles tangents entre eux et aux côtés du triangle (7 p.). — CONRAD et DELPRAT : Deuxième Rapport sur l'affaissement de Nimègue (7 p.). — OUDEMANS : Note sur les résultats obtenus par la révision de quelques Cupulifères de Java. — DELPRAT : Formule approchée pour le calcul du débit des canaux et des conduites d'eau (19 p.). — BLEEKER : Genres des Scaroïdes et leurs espèces dans l'Archipel Indien (17 p.). — VAN HALL : Sur l'organographie végétale; stipules et bractées (11 p., 3 pl.). — STARING : Aperçu des ossements fossiles de l'époque diluvienne trouvés dans la Néerlande et les contrées voisines (28 p.). — SCHROEDER VAN DER KOLK : Sur une conformation particulière du foie chez l'éléphant (16 p., 1 pl.). — VON BAUMHAUER : Analyse chimique de l'eau de mer du détroit de Gibraltar (12 p., 1 carte). Sur les sels extraits de l'eau iodurée du *dessa Molong* de Java.

T. XIII (1862).

SCHROEDER VAN DER KOLK et VROLIK : Note sur l'encéphale de l'Orang-outang (10 p., 1 pl.). — STAMKART : Intensité horizontale du magnétisme terrestre observée par le cap. VAN DER VEEN, etc. (8 p., 1 pl.). — VAN DER WILLIGEN : La constante de la réflexion (indigo, hématite) (16 p.). — VON BAUMHAUER : Pierre prise à tort pour une météorite. — Rapport sur l'usage alimentaire de la viande des bestiaux morts de pneumonie contagieuse, etc. (19 p.). — BLEEKER : Tableau analytique des genres de Labroïdes (16 p.). — MAIER : Analyse de l'eau d'un puits artésien à Samarang (Java). — VAN HASSELT : La coupe de serpent de Ceylan (13 p.). — STARING : Restes du Mosasaurus et de la Tortue de Maastricht, etc. (9 p.). — KAISER : Premières observations au cercle méridien du nouvel observatoire de Leide (32 p.). — LOBATTO : Note sur la réduction des intégrales doubles qui expriment le volume et la surface totale de l'ellipsoïde (9 p.). — DELPRAT et CONRAD : Troisième Rapport sur l'affaissement de Nimègue (30 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur les anneaux électriques (8 p.). — SNELLEN VAN VOLLENHOVEN : Nouveaux Lépidoptères des îles des Indes-Orientales. — BLEEKER : Labroïdes de l'Archipel Indien (35 p.). — Troisième Rapport sur le Taret (12 p.). — HALBERTSMA : Observations anatomiques (18 p.). Déviation vers la gauche de la cloison du cœur et de l'aorte primitive (34 p., 1 pl.). — MIQUEL : Sur la distribution géographique

des Ficées; étude sur les espèces de l'Amérique du Nord (34 p.). — BLEEKER : Sur quelques genres de la famille des Pleuronectides. — BUYS BALLOT : Sur la recherche des diviseurs des nombres, etc. (20 p.). — OUDEMANS : Observation du passage de Mercure sur le Soleil du 12 nov. 1861.

T. XIV (1863).

VON BAUMHAUER : Étude chimique de l'aérolithe (8 p., 1 pl.). — CLAAS MULDER : Examen d'une pierre trouvée, le 8 juillet 1852, à Wedde, etc. — BIERENS DE HAAN : Sur les tables logarithmiques (80 p.). — BLEEKER : Neuvième article sur la faune ichthyologique de l'île de Ternate (4 p.). — Sixième Mémoire sur la faune ichthyologique de l'île de Batjan (14 p.). Notice sur le genre *Rachinus* (10 p.). Notices ichthyologiques (19 p.). — VERDAM : Sur la théorie géométrique des axes principaux des corps (121 p.). — VAN DER HOEVEN : Notes sur les Récréations d'histoire naturelle de Martinus Slabber, avec l'indication systématique des espèces animales qui y sont figurées (16 p.). — VAN DER WILLIGEN : Les figures de Lichtenberg (14 p.). — BRUTEL DE LA RIVIÈRE : Action de l'eau de mer sur le métal des navires (13 p.). — OUDEMANS : Mémoire pour servir de réponse à la question : Si les stomates dérivent de cellules épidermiques ou bien de cellules parenchymatiques sous-jacentes? (27 p., 1 pl.). — BOSQUET : Notice sur deux nouveaux Brachiopodes, etc. (6 p., 1 pl.). — DONDERS et DOIJEN : Position du centre de rotation de l'œil (20 p.). — BLEEKER : Description de quelques espèces nouvelles de Silures de Suriname (19 p.). Notices sur les genres *Parasilurus*, etc. (10 p.). Notice sur les genres *Trachelyopterichtys*, etc. (4 p.).

T. XV (1864).

SNELLEN VAN VOLLENHOVEN : Sur une espèce remarquable de Diptère, *Antidoxion fulvicorne*. Description de quelques nouveaux Diptères (1 pl.). Treizième Mémoire sur la faune ichthyologique de l'île d'Amboine (11 p.). *Glyphidodon Westermani*, nouvelle espèce de Java. Sur les genres de la famille des Cobitioïdes (13 p.). — STAMKART : Hauteur moyenne de la mer, etc. (11 p.). — BLEEKER : Description de trois nouvelles espèces de Siluroïdes de l'Inde Archipélagique. — DELPRAT : Détermination des forces développées par la charge des ponts suspendus (26 p., 1 pl.). — DELPRAT et CONRAD : Quatrième Rapport sur l'affaissement de Nimègue. — DONDERS : Anomalies de réfraction, causes du strabisme. — SASSE : Extrait des Mémoires de l'Université de Kazan : Étude anatomico-physiologique de la rate. — KAISER : Détermination complète des erreurs personnelles dans les observations astronomiques (48 p.,

1 pl.). — VAN DER WILLIGEN : Nouvelle note sur les anneaux électriques. — BLEEKER : Description et figure d'une nouvelle espèce d'*Abramis* des environs de Leide (4 p., 1 pl.). Espèces nouvelles de Cyprinoïdes de Ceylan (15 p.). Nouvelle espèce de *Nemacheilus*. Nouvelle espèce de poisson du Japon. Sur les noms de quelques genres de Cyprinoïdes. Faune ichthyologique de Ternate (10e Note). — BRONDGEEST : Nouvelle méthode pour enregistrer le nombre et la durée des pulsations du cœur (19 p.). — Quatrième Rapport sur le Taret (18 p., 4 pl.). — KAISER : Notice sur les observations de la planète Mars, dans son opposition de 1862, faites à l'Observatoire de Leide (32 p.). — MIQUEL : Sur les Cycadées de la Nouvelle-Hollande (14 p.). — VERDAM : Remarque au sujet du Mémoire sur les axes principaux des corps, contenu dans le tome précédent (12 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur la décharge électrique dans le vide (13 p., 1 pl.). — DONDERS : Détermination de la distance focale des lentilles. Formule de la distance d'accommodation, comparée aux changements internes de l'œil (13 p.). — VAN REES : Analogie des théories de l'influence électrostatique, du courant galvanique et de la conductibilité calorifique (14 p.). — BLEEKER : Collection de poissons de la Nouvelle-Hollande, faite à Port-Jackson (10 p.). Deux nouvelles espèces de *Citharichthys*, etc. Nouvelle espèce de *Synaptura* du Cap de Bonne-Espérance. Sur le genre *Ichthyophis*, etc.

T. XVI (1864).

KAISER : Études photographiques faites à l'Observatoire de Leide (15 p.). — BIERENS DE HAAN : Sur la théorie des intégrales définies, nos IV-VII (132 p.). — HALBERTSMA : Hermaphroditisme normal et anormal chez les poissons (14 p., 1 pl.). — OUDEMANS : Sur un *Pandanus spurius* en fleur au Jardin Botanique d'Amsterdam (9 p.). — VAN HALL : Sur quelques médicaments végétaux de Java (12 p.). — CLAAS MULDER : Sur l'accroissement extraordinaire des incisives de divers Rongeurs (20 p., 2 pl.).—CONRAD : État actuel des travaux du canal de Suez (25 p., 1 carte). — OUDEMANS : Sur un exemplaire en fleurs de l'*Encephalartos Altensteinii*, etc. (9 p.). Signification des rugosités à la surface des graines du *Strychnos nux vomica* (9 p.). Sur les fovéoles de la surface des feuilles du *Pleurothallis*, etc. (11 p., 1 pl.). — BUYS BALLOT : Sur la formation et les propriétés des équations entre les côtés et les diagonales d'un polygone régulier de n côtés (34 p.). Sur la pression moyenne de l'atmosphère en plusieurs lieux de l'Europe (17 p.). — BLEEKER : Faune ichthyologique de Siam (7 p.). *Id.* de l'île de Saparoua. Sur quelques poissons des îles Grand-Key et Noussa-Laut. Faune ichthyologique des îles Arou.

T. XVII (1865).

DELPRAT et CONRAD : Cinquième Rapport sur l'affaissement de Nimègue en 1862 et 1863 (7 p., 2 pl.). — DELPRAT : Sur la résistance des liaisons horizontales des câbles des ponts suspendus, etc. (34 p., 1 pl.). — STARING : Présence de terrains diluviens à Java. — Cinquième Rapport sur le Taret. — BADON GHIJBEN : Considérations sur la racine carrée d'un carré imparfait (18 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur un système de franges rectilignes, qui s'observent en même temps que les anneaux de Newton (25 p., 1 pl.). — KAISER : Rapport sur l'Observatoire de Leide, etc. (18 p.). — BLEEKER : Nouvelle espèce de *Xiphasia* (5 p., 1 pl.). Nouvelle espèce de *Puntius* à épine anale dentelée (5 p., 1 pl.). — VAN KERCKHOFF : Sur la classification et les rapports mutuels des radicaux organiques. — STAMKART : Niveau de la mer à Amsterdam (43 p.). — VAN DER WILLIGEN : Sur la constante de la réflexion. — DONDERS : La vue dans le cas d'une différence de réfraction des deux yeux, et moyens d'y remédier (17 p.). — KAISER : Étude sur la marche de la pendule principale de l'Observatoire de Leide (50 p.). — SASSE : Sur la forme du crâne des Néerlandais (17 p.).

2e Série, T. I (1866).

DELPRAT et CONRAD : Sur l'affaissement de Nimègue (suite et fin) (22 p., 1 pl.). — C. A. J. A. OUDEMANS : Remarques sur le genre *Leptonychia*, etc. (10 p., 1 pl.). — LOBATTO : Sur la formation des équations dont les racines représentent les côtés et les diagonales des polygones réguliers (31 p.). — VERDAM : Sur un mode de génération des lignes de courbure d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, et sur la relation de ces lignes avec des ellipses sphériques confocales (31 p.). — STAMKART : Sur le calcul approché des rentes viagères, etc. (8 p., 1 pl.). — VERVER : Sur une source chaude de vapeur dans le Limbourg (9 p.). — HOEK : Éphéméride de Proserpine pour l'opposition du 2 janvier 1865. — BIERENS DE HAAN : Sur la théorie des intégrales définies (24 p.). — BRUTEL DE LA RIVIÈRE : Remarques sur une nouvelle solution du problème de la détermination des longitudes en mer (16 p.). — Sixième Rapport sur le Taret (24 p., 4 pl.). — STARING : Remarques sur le diluvium de sable de l'Allemagne du Nord (13 p.). — VAN REES : Sur la tension électrique et le potentiel (16 p.). — SNELLEN VAN VOLLENHOVEN : Sur les envois entomologiques faits au Musée Royal (14 p.). — CONRAD : Le Nouveau Merwede (15 p., 1 pl., 1 carte). — CL. MULDER : Sur le *Toxodera denticulata*. — VAN DER HOEVEN : Description de crânes d'indigènes des îles Carolines (17 p., 1 tabl., 2 pl.). — KERCKHOFF :

Sur l'atomicité et l'affinité (32 p.). — Badon Ghijben : Sur la formation des équations qui ont pour racines les côtés et les diagonales menés d'un même sommet d'un polygone régulier (23 p.). — Stamkart : Sur l'influence de la pression atmosphérique et de l'action capillaire sur la construction et l'usage des aréomètres, etc. (25 p.). — Staring : Ancien littoral de Java (4 p., 1 pl.). — Kaiser : Bolide remarquable observé à Leide (10 p., 1 pl.). Sur les erreurs périodiques des vis micrométriques, etc. (41 p.). — Van Gogh : Sur les vents régnants et les états barométriques observés à Nagasaki (Japon) (15 p.).

***Abhandlungen der Königl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu* Berlin** (Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Berlin.) (Sciences mathématiques et physiques). — In-4°.

Année 1863.

Hagen : Sur la chaleur des rayons solaires (17 p.). — Peters : Sur les Mammifères du genre *Solenodon* (22 p., 3 pl.). — G. Rose : Description et classification des météorites, d'après la collection du Musée minéralogique de Berlin (159 p., 4 pl.).

Année 1864.

Reichert : Sur l'anatomie détaillée du limaçon auditif chez l'Homme et les Mammifères (60 p., 3 pl.). — Beyrich : Sur la faune du calcaire de Timor (38 p., 3 pl.).

Année 1865.

R[illegible] : Détermination [illegible] maximum [illegible] les quatre faces [illegible] (20 p.). — Hagen : La côte prussienne de la Baltique, au point de vue de la question de son exhaussement ou de son affaissement (21 p.). — Mitscherlich : Sur les phénomènes volcaniques dans l'Eifel (… p., 3 pl.). Sur la métamorphose des minéraux par l'élévation de la température (… p.). — Peters : Sur les Mammifères du genre *Chiromys* [illegible] (22 p., 4 pl.).

Année 1866.

Kummer : Sur les systèmes algébriques de rayons et en particulier sur ceux du premier et du second ordre (… p.). — [illegible] : Sur le [illegible] pour plus de trois dimensions [illegible] plus grand volume [illegible] (… p.). — Dove : Sur la variation moyenne et [illegible] de la température de l'atmosphère (… p.). — Beyrich : Sur quelques [illegible] et sur [illegible] (… p., … pl.). — Reichert :

Sur la substance contractile *(sarcode, protoplasma)*, et sur ses phénomènes de mouvement (140 p., 7 pl.)

Monatsbericht der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu BERLIN.
(Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de BERLIN.) — In-8°.

Année 1866.

Décembre. — EHRENBERG : Recherches sur les conditions de développement des productions organiques siliceuses (13 p.). Sur le *Hyalonema lusitanicum.* — WEIERSTRASS : Sur les surfaces d'aire minimum. — BRAUN : Sur le *Schweinfurthia,* nouveau genre de Scrofulariées (19 p.). — ASCHERSON : Sur le genre *Anticharis,* Endl. — PETERS : Mammifères et Amphibies de l'Afrique orientale, provenant de la collection du baron V. D. DECKEN.

Année 1867.

Janvier. — BAEYER : Sur les changements qu'éprouvent avec le temps les mesures de fer et de zinc sous le rapport de leur longueur et de leurs coefficients de dilatation (12 p.). — PETERS : Notes herpétologiques. — POGGENDORFF : Explication de la construction de la nouvelle machine électrique de Holtz. — GERHARDT : Sur l'Arithmétique de Maxime Planude (16 p.). — SIEMENS : Transformation du travail en courant électrique, sans l'emploi d'aimants permanents.

Février. — BERNSTEIN : Sur le temps de la propagation de l'ébranlement négatif du courant nerveux. — R. WEBER : Sur quelques combinaisons des chlorures d'or et de platine. — DOVE : Sur la réunion des couleurs du spectre pour former le blanc. Sur les couleurs subjectives dans l'éclairage électrique. Sur les renversements dans la vision binoculaire des dessins en perspective et des corps transparents. Sur la polarisation de la lumière par une réflexion multiple. — POGGENDORFF : Considérations sur la machine de Holtz, n° 1. Sur une troisième machine électrique inventée par Holtz.

Mars. — KÜHNE : Sur la digestion de l'albumine au moyen du suc pancréatique. — POGGENDORFF : Notes électroscopiques. — ROSE : Sur la formation des corps cristallisés au moyen du chalumeau, et sur la formation de l'acide titanique dans ses divers états allotropiques (18 p.).

Avril. — RIESS : Sur la double influence et sur la théorie des machines à électrophore (20 p.). — ROSE : La pierre météorique de Knyahnya. — J. PHILIPP : Combinaisons rhodaniques du mercure. — RAMMELSBERG : Sur l'acide phosphoreux et ses sels. — REUSCH :

Sur une sorte particulière de veines dans le sel gemme et le spath calcaire. — HELMHOLTZ : Expériences sur la vitesse de propagation de l'excitation dans les nerfs moteurs de l'homme (6 p.). — PETERS : Sur une collection de chauves-souris et d'amphibies à Otjimbigne (S.-O. de l'Afrique).

Mai. — FÖRSTER : Influence de la densité de l'air sur la marche d'une pendule (32 p.). — POGGENDORFF : Développement de la chaleur dans l'air où se produisent les décharges électriques (26 p.). — EHRENBERG : Sur les formes organiques du terrain siliceux (20 p.).

Juin. — POGGENDORFF : Sur un nouveau phénomène de mouvement électrique (8 p.). — PETERS : Sur une nouvelle espèce de Rongeur *(Uromys)* du nord de l'Australie (1 pl.). — v. MARTENS : Sur quatre nouveaux Ophiures.

Juillet. — REUSCH : Sur la polarisation lamellaire de l'alun. — BERNSTEIN : Sur le temps de la propagation de la secousse négative du courant musculaire. — ROSE : Expériences sur la formation des corps cristallisés au moyen du chalumeau (14 p.). — OPPENHEIM : Nouvelles recherches sur l'isomérie du chlorure d'allyle et du propyle chloruré (2 mém., 9 pl.). — PETERS : Sur les chauves-souris appartenant aux espèces *Mimon* et *Saccopteryx* (12 p.). — v. MARTENS : Sur une nouvelle espèce d'Astérie *(Hemieuryale)*, tenant le milieu entre les Ophiures et les Euryales. — RIESS : De l'influence d'une plaque non conductrice sur elle-même (14 p.). — DÖNITZ : Phénomènes de mouvement des plasmodes de l'*Æthalium septicum*.

Août. — WEIERSTRASS : Sur une espèce particulière de surface minimum (7 p.). — MARTIUS : Sur le binitronaphtole. — DU BOIS-REYMOND : Nouvelles expériences sur l'influence des déformations violentes des muscles sur leur force électromotrice (25 p.).

Septembre et *Octobre.* — DU BOIS-REYMOND : Réfutation de la théorie des phénomènes électromoteurs des muscles et des nerfs, publiée récemment par *L. Hermann* (53 p.). — HOFMANN : Sur une nouvelle série d'isomères de la nitrile (15 p.). — Sur les propriétés du méthylaldéhyde.

Novembre. — RAMMELSBERG : Sur la composition des hypériodates (12 p.). — PETERS : Sur les chauves-souris (10 p.). — POGGENDORFF : Sur quelques phénomènes dans la décharge de la bouteille de Leide (12 p.). — PETERS : Sur la liaison de l'os tympanique avec la machoire inférieure chez les Marsupiaux (15 p.). — DOVE : Sur le climat de la Palestine.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in BERN. (Mémoires de la Société des Sciences naturelles de BERNE). — In-8°.

1857 (n°s 385-407).

KINKELIN : Relations fondamentales de la fonction $\Gamma(x)$ (10 p.). — M. SCHIFF : Fonction des cordons postérieurs de la moelle épinière. — FLÜCKIGER : Remarques et expériences sur l'ozonométrie (7 p.). — TROG : Champignons terrestres (3e suite) (23 p.). — v. FELLENBERG : Eaux sulfureuses de Lenk (18 p.). — HIPP : Nouvelle application de l'électricité. — BRUNNER : Extraction du manganèse (9 p.). — KOCH : Observations météorologiques (2 art.) (25 p.). — v. FELLENBERG : Analyses de minéraux (10 p.). — BEETZ : Action électromagnétique de courants voltaïques de sources différentes (16 p.). — BRUNNER : Notes de chimie (10 p.). — OTTH : Sur le champignon *Nyctalis*. — SCHINZ : Sur le planimètre polaire d'Amsler (24 p.).

1858 (n°s 408-423).

CHR. MÜLLER : Essai aréométrique du lait (14 p.). — BRUNNER : Essai du lait. — FISCHER : Cryptogames des environs de Berne (32 p.). — KINKELIN : Sur la convergence des séries (12 p.). — BRAENDLI : Génération de la cardioïde au moyen de deux cercles inégaux. — BRUNNER : Notes de chimie (16 p.). — KINKELIN : Sur quelques séries infinies (16 p.). — KOCH : Observations météorologiques (12 p.). Sur la comète de Donati (4 p.). — PERTY : Sur le *Chromatium Okeni*.

1859 (n°s 424-439).

v. FELLENBERG : Aréomètre pour les densités peu différentes de celle de l'eau (8 p., 1 pl.). Analyse de l'eau de Schnittweyer-Bad (10 p.). — v. FISCHER-OOSTER : Débris fossiles de rhinocéros de la molasse de Berne. — WILD : Nouveau photomètre et polarimètre (10 p.). — MEYER-DÜR : Fourmis des environs de Burgsdorf (12 p.). — WILD et SIDLER : Détermination des éléments de la force magnétique terrestre (28 p.). — KOCH : Observations météorologiques (2 Mém., 15 p.). — STUDER : Étude des montagnes calcaires de Lauterbrunnen et de Grindelwald. Fossiles trouvés dans les environs de Moutier (11 p.). — SCHINZ : Phénomènes d'aspiration des soufflets (12 p.). — DENZLER : Influence de la rotation de la terre sur les eaux courantes.

1860 (n°s 440-468).

KOCH : Observations météorologiques (2 Mém., 27 p.) — WYDLER : Sur la position des fleurs et le mode de croissance de la pervenche (32 p.). — HIPP : Perturbations des télégraphes électriques pendant

une aurore boréale (4 p., 1 pl.). — Otth : Sur les anneaux de fumée. — v. Fellenberg : Analyse de bronzes antiques (3 Mém., 40 p.). — Uhlmann : Études géologiques et archéologiques sur le lac de Moosseedorf (5 p., 3 pl.). — Christener : Hiéracées de Suisse (10 p.). — Wild : Sur la détermination de la température de l'air (30 p.). — Rütimeyer : Nouveau gisement de rhinocéros en Suisse (19 p.). — Sidler : Sur quelques phénomènes astronomiques de l'année 1860 (13 p.). — Brunner : Observations chimiques. — H. Schiff : Considérations historiques et critiques sur la théorie des acides (32 p.). — Wild : Établissement des stations météorologiques dans les cantons de Berne et Soleure.

1861 (nos 469-496).

Wydler : Sur la connaissance des plantes indigènes de la Suisse (3 Mém., 67 p.). — Wild : Travaux de l'Observatoire de Berne (1859-60) (16 p.). — v. Fellenberg : Analyse de bronzes antiques (2 Mém., 32 p.). — Otth : Sur les Urédinées (32 p.). — Studer : Sur la topographie des Alpes Savoisiennes (30 p.). — Établissement d'échange d'objets d'histoire naturelle. — Hasler : Sur la télégraphie électrique (4 p., 1 pl.). — M. Schiff : Sur la poudre nutritive de Rarey. — Perty : Sur les préparations microscopiques de l'établissement Engell et Cie, à Wabern, près Berne. — v. Fischer-Ooster : Notices paléontologiques (10 p., 1 pl.)

1862 (nos 497-530).

v. Fellenberg : Analyse de bronzes antiques (14 p.). — Flückiger : Sur le ruisseau d'acide chlorhydrique Sungi Paït dans la partie est de Java (14 p.). — Wydler : Sur la connaissance des plantes indigènes de la Suisse (3 Mém., 71 p.). — M. Schiff : Fonctions de la rate. — v. Fischer-Ooster : Notes géologiques. — Schlaefli : Détermination élémentaire de l'accélération dans le mouvement elliptique des planètes (18 p., 1 pl.). — Perty : Sur la microscopie et la télescopie (13 p.). — Gerber : Sur la mort des animaux par gonflement gazeux. — Perty : Coloration du salpêtre. — Simler : Application de la loi de Bunsen sur la formation syntectique des roches aux ardoises métagènes du canton de Glarus (32 p.). Rapports entre les températures de l'air et des eaux dans les Alpes Suisses (16 p.). — Schild : Accroissement de la culture de plaine et diminution de la culture alpestre en Suisse (16 p.). — Wild : Travaux météorologiques dans le canton de Berne en 1861 (26 p., 3 pl.). — v. Fellenberg : Sur les houilles de Blappach, etc. — Hermann : Perfectionnement des balances. — Schlaefli : Sur l'emploi du chemin d'intégration (11 p.).

1863 (nos 531-552).

STUDER : Le glacier de Ruitor et ses environs, sous le rapport topographique (19 p.). — LAUTERBURG : Des machines à calcul (9 p.). — A. OTT : Emplois divers de la plante de maïs, en particulier pour la fabrication du papier (13 p.). — v. FELLENBERG : Analyses de bronzes antiques (2 Mém., 20 p., 2 tabl.). — H. SCHIFF : Théorie de la formation du rouge d'aniline. —SIMLER : Spectroscope portatif (8 p.). — G. OTTH : Champignons de la Suisse (20 p.). — PERTY : Sur l'identité de quelques familles d'algues et d'infusoires (8 p.). — WILD : Bulletin de l'Observatoire de Berne pour 1861-62 (20 p.). Travaux de la Station météorologique centrale de Berne pour 1862 (14 p., 1 pl.). — BACHMANN : Formation jurassique dans le canton de Glarus (29 p.).

1864 (nos 553-579).

WYDLER : Connaissance des plantes indigènes de la Suisse (16 p.). — BRUNNER : Action de l'hydrogène sur les solutions de quelques sels métalliques. Réduction du chlorure d'argent par la voie humide (9 p.). — WILD : Nouveau saccharimètre. — SCHINZ : Suspension des cloches d'église (30 p.). Influence du vent sur la direction des plaques de signaux (12 p.). — DENZLER : Altitude du Chasseral, comme base du réseau d'altitudes suisses (10 p.). — HASLER : Télégraphe à écriture colorée. — PERTY : Algues et animaux marins inférieurs de l'embouchure de l'Elbe (12 p.). — SCHINZ : Différence du niveau de la Méditerranée et de l'Atlantique sur les côtes de France (17 p.). — v. FELLENBERG : Analyses de bronzes antiques (12 p.). — v. FISCHER-OOSTER : Distribution de la chaleur dans l'espace (15 p.). — ZWICKY : Dérivation des formes cristallines (7 p.). — WILD : Travaux de la station météorologique centrale de Berne, pour 1863 (21 p., 3 pl.). — v. FELLENBERG : Analyse du Fahlerz d'Ausserberg (9 p.). — BACHMANN : Notices géologiques. — WILD : Recherches sur l'identité de l'éther lumineux et du fluide électrique. Sur la variation des forces électro-motrices entre les métaux et les fluides sous l'action de la pression. — PERTY : Nouveaux microscopes de Merz, à Munich.

1866 (nos 580-602).

v. FELLENBERG : Analyses de bronzes antiques (19 p.). — WYDLER : Connaissance des plantes indigènes de Suisse (16 p.). — WILD : Travaux de la station météorologique centrale de Berne pour 1864 (17 p.). — v. FELLENBERG : Analyse de la Laumontite, etc. (10 p.). — WILD : Bulletin de l'Observatoire de Berne, 1863-64 (10 p.). — PERTY : Sur le dessin de la grande tache solaire de février 1865,

fait à Rome par Secchi. — LAUTERBURG : Observations du niveau de l'Aar à Berne et à Thun (18 p., 1 pl.). — GEISER : Sur une corrélation géométrique du second degré (11 p.). — STUDER : Sur la géologie de l'Emmenthal. — v. FELLENBERG : Analyses de quelques néphrites des habitations lacustres de Suisse. Décomposition des silicates alcalins par le chlorure de calcium (18 p.). — NIL : Ascension du pic de Ternate et Tidore dans l'été de 1865. — PERTY : Sur la double lunette marine de Merz. — v. FISCHER-OOSTER : Paléontologie des Alpes suisses occidentales (14 p.). — G. OTTH : Champignons de Suisse (28 p.). — STUDER : Blocs exotiques de l'Emmenthal.

1867 (n^os 603-618).

JENZER : Travaux de la station météorologique centrale du canton de Berne pour 1865 (20 p.). — DENZLER : Sur l'hypothèse de Dove sur la nature du *Föhn*. — LAUTERBURG : Observations météorologiques en Suisse (16 p.). — GRESSLY : Levier différentiel. — PERTY : Espèce d'*Oscinis* très commune à Berne. — WILD : Absorption de la chaleur rayonnante à travers l'air sec ou humide (24 p.). — v. FISCHER-OOSTER : Notices paléontologiques (3 p., 1 pl.). — v. FELLENBERG : Analyses de quelques nouveaux minéraux (13 p.). — SCHAER : Action de l'ozone combiné chimiquement sur les infusoires (10 p.). — STADER : Notices géologiques. — PERTY : Monstruosités chez les insectes (11 p., 1 pl.). — BRUNNER : Production de l'oxygène.

Mémoires de la Société d'émulation du département du Doubs. (BESANÇON). — In-8°.

3^e Série, T. III (1858).

H. COQUAND : Description de l'étage purbeckien dans les deux Charentes (53 p.). — RESAL : Note sur une propriété de la lemniscate (4 p.). — PARISOT : Notice sur la flore des environs de Belfort (108 p.). — B. MARTIN : Note sur le *Scleranthus uncinatus* (6 p.). — HUMBERT et MORÉTIN : Note sur le guano de chauve-souris (6 p.). — CASTAN : Les Tombelles celtiques du massif d'Alaise (1^er et 2^e Rapports, 18-38 p., 4 pl.). — BIAL : Uxellodunum (37 p., 4 pl.). — BRUAND : Bulletin entomologique de 1858 (3 p.).

T. IV (1859).

CONTEJEAN : Étude de l'étage kimméridien dans les environs de Montbéliard (352 p., 27 pl.). — BONJOUR, DEFRANOUX et Frère OGÉRIEN : Découverte de la craie supérieure à silex dans le département du Jura (6 p.). — HUMBERT et O. HENRY fils : Note sur un

perfectionnement apporté à la recherche de l'iode par l'amidon (5 p.). — HUMBERT et FONVIELLE : Note sur une pile voltaïque constante et économique à dégagement de chlore (5 p.). — GRENIER : Supplément à la florule exotique des environs de Marseille (24 p.). Recherches sur quelques Orchidées des environs de Toulon (12 p.).

T. V (1860).

DE FROMENTEL : Introduction à l'étude des polypiers fossiles (360 p.). — BREDIN : Nouvelle théorie des approximations numériques, relative aux quatre opérations fondamentales (40 p.). — CASTAN : Les Tombelles et les ruines du massif et du pourtour d'Alaise (3e Mém., 26 p., 2 pl.).

T. VI (1861).

AUFFROY : Nouveau projet de télégraphe sous-marin (5 p., 5 pl.). — ETALLON : Études paléontologiques sur le Haut-Jura. Monographie du Corallien (108 p.). — SIRE : Mémoire sur un polytrope et quelques autres appareils servant à l'étude des mouvements de rotation (54 p., 4 pl.). — PERRON : Annales des épidémies en Franche-Comté (144 p.). — CASTAN : Les vestiges du siége d'Alesia (32 p., 1 pl.).

T. VII (1862).

A. DELACROIX : Alaise et le *Moniteur* (92 p., 3 pl.). Notice sur les fouilles faites en 1857 et 1858 aux sources ferrugineuses de Luxeuil (14 p.). — TH. D'ESTOCQUOIS : Mémoire sur le coefficient de contraction de la veine liquide (14 p.). — P. BIAL : Chemins, habitations et *oppidum* de la Gaule au temps de César (1re partie, 288 p., 3 pl.). — G. SIRE : Étude sur la forme globulaire des liquides (52 p.). — A. CASTAN : La bataille de Vesontio et ses vestiges (13 p.).

T. VIII (1863).

A CASTAN : Les Camps, les Tombelles et les Villa du pourtour d'Alaise (27 p., 4 pl.). Une suscription tumulaire de Sylvestre Ier, évêque de Besançon (5 p.). — G. SIRE : Note sur quelques formes cristallines de la neige (22 p., 1 pl.). — A. CASTAN : Lettre à S. Exc. M. le Ministre de l'Instruction publique sur l'archéologie du pays d'Alaise (12 p.). — A. SARRETTE : Les guerres d'Arioviste contre les Gaulois et contre César (54 p., 2 pl.). — A. CASTAN : Les champs de bataille et les monuments du culte druidique au pays d'Alaise (16 p., 2 pl.). — GOUILLAUD : Recherches sur la distribution du magnétisme dans des barreaux d'acier aimantés par le procédé de la touche séparée (32 p., 2 pl.). — A. ETALLON : Études paléontologiques sur le Jura Graylois (286 p.).

T. IX (1864).

A. SARRETTE : Alesia, Étude d'archéologie militaire (74 p., 1 pl.). — G. SIRE : Note sur un nouvel appareil d'hydrostatique (4 p., 1 pl.). — A. CASTAN : Les préliminaires du siége d'Alesia (32 p., 2 pl.).

T. X (1864).

CH. GRENIER : Flore de la chaîne jurassique (346 p.).

4e Série, T. I (1865).

J. QUICHERAT : Examen des armes trouvées à Alise-Sainte-Reine (Côte-d'Or) (24 p., 1 pl.). — MINARY : Sur le dégagement de chaleur dû à la formation des silicates (7 p., 1 pl.). Expériences sur l'action capillaire (9 p.). — SARRETTE : La question d'Alesia résolue mathématiquement en faveur d'Alaise (55 p., 1 pl.). — E. DELACROIX : De l'emploi des eaux minérales chez les anciens (11 p.). — P. FAIVRE : Sur l'agriculture (9 p., 1 pl.). — CH. PERRON : Recherches sur la mortalité dans le département du Doubs (45 p., 1 pl.). — L. GALLOTI : Études des travaux du siége d'Alesia (21 p.).

T. II (1866).

G. SIRE : Nouvelles méthodes pour la démonstration expérimentale du principe d'Archimède (10 p., 1 pl.). — A. SARRETTE : Démonstration militaire du problème d'Alesia (70 p., 1 pl.). — A. QUIQUEREZ : Tronçon de voie celtique à Pierre-Pertuis (Suisse) (5 p.). — J. QUICHERAT : La question d'Alesia en Normandie (5 p.). — F. LECLERC : Quelques observations botaniques sur les fonctions du cadre placentaire et de la columelle dans les fruits des Crucifères (9 p.). — E. DELACROIX : De la galvanisation des fils de fer (5 p.). — P. BIAL : Forges antiques dans le Jura (10 p.).

Memorie dell' Academia delle Scienze dell' Istituto di BOLOGNA. In-4°.

2e Série, T. I (1862).

CHELINI : De la loi suivant laquelle un ellipsoïde hétérogène propage son attraction de point en point (50 p.). — CORRADI : Diminution de la fréquence des affections scrofulo-tuberculaires (74 p.). — ALESSANDRINI : Descriptions des préparations d'anatomie pathologique les plus intéressantes du Cabinet d'Anatomie comparée de l'Université de Bologne (26 p., 4 pl.). — CASONI : Sur le rayonnement solaire (18 p.). — CALORI : Sur les parties génitales de la femme (32 p., 3 pl.). Des vaisseaux capillaires sanguins de la portion caduque du cordon ombilical dans le fœtus des mammifères domestiques, etc. (12 p., 2 pl.). — BERTOLONI : Mélanges de botanique (18 p., 6 pl.). — SOVERINI : Sur une dilatation extraordinaire

des voies biliaires (14 p., 2 pl.). — CAPELLINI : Études stratigraphiques et paléontologiques sur l'infralias des montagnes du golfe de la Spezia (72 p., 2 pl.). — CORRADI : Comment changent les diathèses ou dispositions morbides des peuples, et comment elles entrent dans la formation des systèmes médicaux (42 p.). — CHELINI : Des mouvements géométriques et de leurs lois dans le déplacement d'une figure de forme invariable (70 p., 1 pl.). — PAOLINI : Nouvelles recherches sur l'ichthyose (20 p., 1 p.). — BRUGNOLI : Sur une blessure du cœur avec lésion des deux ventricules, venue à guérison (18 p., 2 pl.). — BIANCONI : Spécimens zoologiques de Mozambique (10 p., 2 pl.). — DELLA CASA : Sur l'équivalent mécanique de la chaleur (14 p., 1 pl.).

T. II (1863).

BIANCONI : De l'*Æpyornis maximus*, et les écrits de Marco Polo (62 p.). — VERSARI : Remarques sur la tuberculose (54 p.). — RIZZOLI : Ablation complète intra-buccale et sous-périostale du maxillaire inférieur (22 p.). — PAOLINI : Sur le mouvement intestinal (20 p.). — BERTOLONI : Mélanges de botanique (16 p., 6 pl.). — VERARDINI : Sur l'ulcère simple, rond et perforant de l'estomac (24 p.). — RESPIGHI : Sur les observations circumzénithales des étoiles (24 p.). — CALORI : Sur trois célosomes humains, remarquables au point de vue de la tocologie et du classement tératologique d'une telle famille de monstres (54 p., 9 pl.). — RESPIGHI : De l'influence du mouvement des milieux réfringents sur la direction des rayons lumineux (26 p.). — FABBRI : Utilité de l'obstétrique expérimentale (22 p.). — RIZZOLI : Description anatomique d'une nouvelle luxation traumatique de l'avant-bras sur l'humérus (16 p., 4 pl.). — CALORI : Sur la duplicité congéniale de la rate (18 p., 1 pl.). — BELTRAMI : Sur les coniques de neuf points, et sur quelques questions qui en dépendent (36 p.). — RESPIGHI : Sur la latitude géographique de l'Observatoire de Bologne (40 p.). — BRIGHENTI : Sur l'amélioration des marais (16 p.). — FABBRI : De l'usage rationnel du levier dans l'Obstétrique (72 p., 2 pl.). — CALORI : Sur la splanchnologie et sur les vaisseaux sanguins qui lui appartiennent, etc. (96 p., 4 pl.). — CREMONA : Sur les transformations géométriques des figures planes (10 p.).

T. III (1863).

CHELINI : Sur la théorie des systèmes simples de coordonnées, et sur la discussion de l'équation générale du second degré en coordonnées triangulaires et tétraédriques (80 p.). — CORRADI : Des cas de mort subite qui se sont produits à Bologne de 1820 à 1854 (68 p.).

— GHERARDI : Sur le magnétisme polaire des briques et des autres terres cuites (22 p.). — BIANCONI : De l'*Æpyornis maximus*, et du tarso-métatarsien des oiseaux (28 p., 4 pl.). — BERTOLONI : Notes sur des objets naturels observés dans les montagnes de l'Italie, etc. (44 p.). — CAPELLINI : Sur les Dauphins fossiles du Bolonais (30 p., 3 pl.). — SGARZI : Nouvelles observations sur le gaz de la Porretta, sur la température de ces eaux minérales, et sur les dépôts qu'elles produisent (26 p.). — DELLA CASA : Sur la stratification de la lumière électrique (14 p., 1 pl.). — RIZZOLI : Guérison de deux anévrysmes inguinaux et d'un poplitique, obtenue par un moyen de compression très simple (22 p., 1 pl.). — CALORI : Sur un cas d'absence congéniale du poumon gauche et du lobe gauche des glandes thyroïdes et thymus, etc. (28 p., 3 pl.). — ERCOLANI : Observations sur les jeunes larves nouvellement écloses de l'œuf de l'*Œstrus equinus*, etc. (22 p., 1 pl.). — CREMONA : Nouvelles recherches de géométrie pure sur les cubiques gauches, et en particulier sur la parabole gauche (12 p.). — PAOLINI : De quelques influences spéciales du système nerveux sur le mouvement du cœur (18 p.). — BERTOLONI : Plantes asiatiques (8 p., 6 pl.). — BRUGNOLI : Deux cas d'anévrysme de l'aorte ascendante, ouverts, l'un dans la veine cave descendante, l'autre dans l'oreillette droite (16 p.). — CHELINI : Des sections du cône et de la perspective dans l'enseignement de la géométrie analytique (24 p., 1 pl.). — CALORI : Sur le système lymphatique des grenouilles et des salamandres (48 p., 2 pl.). — CASONI : Des vents dans le climat de Bologne (36 p., 2 pl.). — RESPIGHI : Sur les oscillations diurnes du baromètre dans le climat de Bologne (30 p.).

T. IV (1864).

FABBRI : Des difformités du bassin provenant de divers modes de claudication (32 p., 2 pl.). — DELLA CASA : Nouvelles observations sur l'induction électro-statique (20 p., 2 pl.). — SANTAGATA : Des cristaux de gypse dans les argiles du Bolonais (18 p., 3 pl.). — SGARZI : Méthode d'amélioration des eaux potables séléniteuses (18 p., 2 pl.). — CALORI : Vie d'Antonio Alessandrini (84 p., portr.). — BERTOLONI : Sur les plantes spontanées des monts Porrettani (68 p.). — ERCOLANI : Sur la transformation des éléments histologiques dans l'organisme animal, et en particulier des cellules médullaires en corpuscules osseux, et des corpuscules du tissu connectif en cellules épithéliales (62 p., 5 pl.). — BERTOLONI : Nouvelles plantes asiatiques (10 p., 6 pl.). — CAPELLINI : Balénoptères fossiles du Bolonais (22 p., 3 pl.). — VERSARI : Examen critique de la thèse « que les menstrues dérivent de l'ovulation » (32 p.). — VERARDINI :

Relation d'échinococchus et d'atrophie jaune aiguë du foie (32 p., 3 pl.). — FABBRI : Luxation ovalaire complète réduite par une nouvelle méthode, et question concernant d'autres luxations traumatiques de la tête du fémur (30 p., 1 pl.). — SGARZI : Dégénérescence charbonneuse dans des semences de froment appartenant à des siècles antérieurs (20 p., 1 pl.). — RESPIGHI : Sur les causes de la période diurne du baromètre (40 p.). — DELLA CASA : Sur le pouvoir des pointes. Observations et expériences (16 p., 1 pl.). — PAOLINI : Effets de quelques poisons sur le mouvement des muscles, des cils vibratiles et des spermatozoïdes (12 p.). — BIANCONI : Spécimens de la zoologie de Mozambique (10 p., 3 pl.). — BERTOLONI : Description de deux Coléoptères de Mozambique, etc. (20 p., 1 pl.).

T. V (1865).

CREMONA : Sur les transformations géométriques des figures planes (36 p.). — RIZZOLI : Nouveaux faits en faveur de la méthode de compression pour le traitement des anévrysmes externes, etc. (26 p.). — BIANCONI : De l'*Æpyornis maximus* et du tarso-métatarsien des oiseaux *(suite)* (80 p., 10 pl.). — CHELINI : Usage des coordonnées obliques dans la détermination des moments d'inertie (44 p.). — CALORI : Cerveau d'un nègre de la Guinée (36 p., 8 pl.). — RIZZOLI : Trois cas d'atrésie congéniale de l'anus avec débouchement du rectum dans la vulve, opérés et remis dans l'état normal (24 p.). — ERCOLANI : Observations sur la structure normale et sur les altérations pathologiques des tissus fibreux (60 p., 5 pl.). — VERARDINI : Péricardite tuberculeuse primitive avec hémorrhagie (36 p., 2 pl.). — BRUGNOLI : Faits pathologiques à l'appui de la doctrine qui place le siége de l'organe législateur de la parole dans la partie antérieure des hémisphères cérébraux (18 p.). — GIOVANINI : Cheilogénioplastie avec rajustement de la langue, etc. (18 p.). — BERTOLONI : Sur l'*Agallocum* et sur six espèces nouvelles de plantes de l'Inde (8 p., 6 pl.). — SGARZI : Le phosphore dans le cerveau (8 p.). — PAOLINI : Sur l'électricité des eaux minérales (14 p.). — GHERARDI : Nouvelles expériences et observations sur le magnétisme des terres cuites, etc. Sur une cause non encore entrevue de variations du magnétisme terrestre, etc. (14 p.). — CAPELLINI : Fossiles infraliasique des environs du golfe de la Spezia (74 p., 6 pl.). — FABBRI : De l'accouchement manqué chez les animaux domestiques et chez l'espèce humaine (50 p., 5 pl.). — BIANCONI : Spécimens zoologiques de Mozambique (5 p., 1 pl.).

T. VI (1866).

CHELINI : Sur les axes centraux des forces et des rotations dans

l'équilibre et dans le mouvement des corps (54 p., 1 pl.). — Bertoloni : Florules de deux petites îles du golfe de la Spezia (12 p.). — Piani : Sur la méthode de Newton pour la résolution approchée des équations numériques (22 p.). — Cremona : Préliminaires d'une théorie géométrique des surfaces (1er Mém.) (46 p.). — Calori : Sur quelques nouveaux muscles surnuméraires des membres (12 p., 2 pl.). De la correspondance du nerf musculo-cutané avec la tête surnuméraire du biceps brachial et avec le brachial interne (8 p., 2 pl.). Sur quelques variétés rencontrées dans le système musculaire des membres supérieurs (18 p., 2 p.). — Filopanti : Sur la situation du Rubicon, et sur le jour où il fut passé par Jules César (32 p.). — Ercolani : Description des préparations renfermées dans le Musée pathologique de l'Université de Bologne, etc. (1er et 2e Mém. (82-122 p., 7 pl.). — Rizzoli : Sur un énorme calcul vésical ayant pour noyau quelques os fétaux, et sur deux monstruosités, etc. (26 p., 2 pl.). — Della Casa : Examen de quelques observations critiques sur l'électricité statique (12 p.). — Calori : Sutures surnuméraires du crâne humain et spécialement des pariétaux (18 p., 1 pl.). — Belluzzi : Nouveaux faits à l'appui de l'extraction du fœtus pendant l'agonie des femmes enceintes, au moyen de laquelle on peut sauver plus aisément le fœtus lui-même que par l'opération césarienne *post mortem* (18 p.). — Bertoloni : Sur l'état de souffrance du Peuplier de Virginie dans la province de Bologne (14 p.). — Brighenti : Sur les Mémoires de l'inspecteur Sestini, etc., relatifs aux eaux du Pô inférieur (16 p.). — Bertoloni : Des plantes qui infestent les semailles dans la province de Bologne (20 p.). — Predieri : Les rizières du territoire de Bologne comparées avec celles d'autres parties de l'Italie, sous les rapports topographiques et météorologiques (26 p.). — Bianconi : Sur quelques insectes perforateurs des métaux (18 p., 1 pl.). — Baretti : Observations sur la géologie des Alpes Grecques (18 p.). — Bombicci : Sur les associations polygéniques appliquées à la classification des sulfures métalliques (92 p.). — Fabbri : Giovanni De Romanis de Casalmaggiore de Crémone, inventeur du siphon cannelé (22 p.). — Bianconi : Échantillons géologiques de Mozambique (11 p., 2 pl.).

***Memoirs read before the* Boston *Society of Natural History*.** (Mémoires lus devant la Société d'Histoire naturelle de Boston). — In-4°.

T. I, 1re et 2e parties (1866-67).

Verril : Revue des Polypes de la côte orientale des États-Unis (45 p., 1 pl.). — Wilder : Sur la morphologie et la téléologie, par-

ticulièrement dans les membres des Mammifères (35 p.). — WINCHELL et MARCY : Énumération des fossiles recueillis dans le calcaire du Niagara, à Chicago (Illinois), avec une description de plusieurs espèces nouvelles (33 p., 3 pl.). — JAMES-CLARK : Anatomie et physiologie du *Trichodina pediculus* (17 p., 1 pl.). — ELLIOTT COUSS : Ostéologie du *Colymbus torquatus*, avec des notes sur sa myologie (42 p., 1 pl.). — SCUDDER : Recherches sur les relations zoologiques des premières traces d'insectes névroptères fossiles découvertes dans l'Amérique du Nord, etc. (20 p., 1 pl.). — HYATT : Sur le parallélisme entre les différents stages de la vie dans l'individu et dans le groupe entier de l'ordre des Mollusques tétrabranches (17 p.). — PACKARD : Observations sur les phénomènes glaciaires du Labrador et du Maine; avec un précis de la faune invertébrée moderne du Labrador (94 p., 2 pl.).

***Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu* BREMEN.** (Mémoires de la Société d'Histoire naturelle de BRÊME.)

T. I, 2e cahier (1867).

G. v. PAPE : Catalogue des plantes vasculaires des environs de Stade (36 p.). — SCHERK : Le satellite de Sirius (12 p.). — OCHSENIUS : Lettres du Chili (12 p.). — FOCKE : Sur une stellaire hybride. — HEINEKEN : Observations météorologiques à Brême, de 1829 à 1858 (64 p.). — BUCHENAU : *Index criticus Juncaginearum hucusque descriptarum* (10 p.).

***Verhandlungen des naturforschenden Vereins in* BRÜNN.** (Mémoires de la Société des Sciences naturelles de BRÜNN.) — In-8°.

T. V (1866).

v. NIESSL : Ascension du Hochgolling (16 p.). — OBORNY : Géognosie des environs de Namiest (17 p.). — GARTNER : Notes sur les Lépidoptères (13 p.). — KOUTNY : Théorie de l'illumination des surfaces courbes du second degré par des rayons de lumière parallèles (43 p.). — WEINER : Sur la transformation et le calcul numérique des intégrales elliptiques de 1re, de 2e et de 3e espèce (22 p.). — KITTNER : Coléoptères des environs de Boskowitz (36 p.) — v. LEONHARDI : Sur les Characées d'Autriche (suite) (9 p.). — MENDEL : Observations météorologiques en Moravie et en Silésie pour 1866 (14 p.). — KALMUS : La trichinose à Brünn (11 p.). Matériaux pour une flore des cryptogames de la Moravie et de la Silésie autrichienne (53 p.).

Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (BRUXELLES). — In-8°.

2e série, t. XXI (1866).

NEWTON : Sur les étoiles filantes du 10 août et du mois de novembre, observées aux États-Unis (13 p.). — CATALAN : Sur l'intégration d'un système d'équations homogènes (5 p.). — E. QUÉTELET : Sur l'état de l'atmosphère à Bruxelles, pendant l'année 1865 (47 p., 1 pl.). — DAUGE : Sur la rotation du soleil (12 p., 1 pl.). — MALAISE : Sur les silex ouvrés de Spiennes (10 p., 3 pl.). — VAN BENEDEN : Sur les vers nématodes (9 p., 1 pl.). — GLASER : Transformation de l'aniline en azobenzine (7 p.). — LADENBURG : Synthèse de l'acide anisique et de l'un de ses homologues (6 p.). — L. HENRY : Faits pour servir à l'histoire du chrome (7 p.). — SWARTS : Sur les dérivés bromés du camphre (5 p.). — LADENBURG et FITZ : Sur quelques dérivés de l'acide para-oxybenzoïque (14 p.). — DELBŒUF : Détermination rationnelle des nombres de la gamme chromatique (27 p.). — E. DUPONT : Étude sur le terrain quaternaire des vallées de la Meuse et de la Lesse dans la province de Namur (62 p., 3 pl.). — E. QUÉTELET : Sur la nouvelle étoile changeante de la Couronne boréale (4 p.). — SWARTS : Sur les dérivés par addition de l'acide itaconique et de ses isomères (14 p.). — VAN DER MENSBRUGGHE : Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle (14 p.).

T. XXII (1866).

A. QUÉTELET : Sur un bolide observé en Belgique le 20 juin 1866 (6 p.). — MELSENS : Sur l'action mutuelle des éléments de sels solubles comparée aux phénomènes que ces corps produisent dans l'économie animale (16 p.). — CATALAN : Application d'un problème de géométrie à une question d'analyse indéterminée (2 p.). — E. DUPONT : Étude sur les fouilles scientifiques exécutées pendant l'hiver de 1865-66 dans les cavernes des bords de la Lesse (38 p., 2 pl.). — QUÉTELET : Observations des étoiles filantes faites à l'Observatoire royal de Bruxelles (8 p.). — LIAIS : Sur la réfraction de la lumière depuis le zénith jusqu'au-dessous de l'horizon (5 p.). — VAN BENEDEN : Sur un *Mesoplodon Sowerbiensis* de la côte de Norvége (4 p.). — VALERIUS : Sur un analyseur acoustique (8 p.). — F. PLATEAU : Sur la force musculaire des insectes (25 p.). — VAN DER MENSBRUGGHE : Sur la tension des lames liquides (21 p.). — CORNET et BRIART : Sur l'existence dans l'Entre-Sambre-et-Meuse d'un dépôt contemporain du système du tufeau de Maestricht, et sur l'âge des autres couches crétacées de cette partie du pays (10 p.,

1 pl.). — A. et E. QUÉTELET : Observations des étoiles filantes périodiques de novembre 1866 (23 p.). — ADAN : Essai sur les limites à poser à la mesure de précision des observations immédiates (22 p.). — GLASER : Recherches sur quelques dérivés de l'acide cinnamique (21 p.). — CORNET et BRIART : Sur l'extension du calcaire grossier de Mons, dans la vallée de la Haine (16 p., 1 pl.).

T. XXIII (1867).

VAN BENEDEN : Sur la découverte d'un os de baleine à Furnes (8 p.). — A. QUÉTELET : Sur les étoiles filantes (18 p.). — F. PLATEAU : Sur l'Argyronète aquatique (19 p., 1 pl.). — MONTIGNY : Mesures d'altitudes barométriques prises à la tour de la cathédrale d'Anvers, par des vents de directions et de vitesses différentes (23 p.). — ADAN : Loi générale de la probabilité des erreurs étendue à tous les genres d'observations immédiates (40 p.). — A. QUÉTELET : Sur l'heure des chutes d'aérolithes (7 p.). — KÉKULÉ : Sur les dérivés sulfurés du phénol, et les sulfacides du phénol (12 p.). — DUPONT : Étude sur cinq cavernes explorées dans la vallée de la Lesse et le ravin de Falmignoul pendant l'été de 1866 (22 p., 1 pl.). — DUBOIS : Sur l'acide phénique monochloré (8 p.). — TERBY : Sur le procédé qu'emploient les araignées pour relier des points éloignés par un fil (25 p., 1 pl.). — AD. QUÉTELET : Observations des températures faites de 1854 à 1863 à l'Observatoire de Bruxelles (10 p.). — VAN BENEDEN et COEMANS : Un insecte et un gastéropode pulmoné du terrain houillier (18 p., 1 pl.). — CATALAN : De l'intégrale définie qui représente la somme des $p+1$, premiers termes du développement de $(\alpha+\beta)^m$ (2 p.). — GONTHIER : Note sur deux lambeaux du terrain crétacé dans la province de Namur (11 p., 2 pl.). — A. QUÉTELET : Sur l'origine des étoiles filantes et des aérolithes, et sur l'heure des chutes observées (5 p.). — VAN DER MENSBRUGGHE : Sur la tension des lames liquides (17 p.). — DUPONT : Étude sur une caverne située dans la commune de Bouvignes (16 p., 1 pl.). — A. QUÉTELET : Publications de l'Observatoire de Bruxelles, héliographie, sélénographie, etc. (13 p.). — VAN BENEDEN : Le Cordylophora dans les environs d'Ostende (2 p.).

***Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de* CAEN. — In-8°.**

Année 1860.

GIRAULT : De la résistance de l'air dans le mouvement oscillatoire du pendule (43 p.).

Année 1861.

Is. PIERRE : Quelques observations relatives à la recherche du sulfate de cuivre dans certains cas d'empoisonnement. — MORIÈRE : Influences qui s'exercent sur les espèces végétales pour en modifier la composition chimique. — DESBORDEAUX : Note sur quelques alliages du fer et du zinc avec les métaux alcalins.

Année 1862.

GIRAULT : De la résistance de l'air dans le mouvement oscillatoire du pendule (26 p.). — DU MONCEL : Recherches sur l'électricité (62 p.). — Is. PIERRE : Recherches sur les causes de l'altération des bières d'une brasserie incendiée (36 p.). — MORIÈRE : Note sur quelques herborisations faites en 1860. — MORIN : Recherches sur les causes de l'insalubrité de certaines matières alimentaires.

Année 1863.

GIRAULT : Théorèmes généraux relatifs à la transmission du mouvement par contact immédiat (22 p.). — MORIÈRE : Quelques observations critiques sur les Monotropées qui croïssent spontanément en Normandie. Notes sur quelques herborisations faites en 1861. — Is. PIERRE : Sur la présence dans du vin de l'éther acétique, en proportion assez considérable pour être nuisible.

Année 1864.

Is. PIERRE : Considérations sommaires sur l'importance du rôle du fer dans les êtres vivants. — GIRAULT : Théorèmes généraux relatifs à la transmission du mouvement au moyen de cordages (29 p.). — MORIÈRE : Note sur le grès de Sainte-Opportune (Orne), et sur le lias de l'arrondissement d'Argentan (23 p.). — Is. PIERRE : Note sur les feuilles de colza malades. — MORIN : Sur la détermination de la présence de la chicorée dans le café. Faits pour servir à l'histoire toxicologique de la nicotine.

Année 1865.

GIRAULT : Recherche d'une orbite au moyen d'observations géocentriques, d'après le *Theoria motus*, etc. de Gauss (76 p.). — LIÉGARD : Gale et galeux.

Année 1866.

MORIÈRE : Notes géologiques et minéralogiques recueillies en Normandie (18 p.). — GIRAULT : Ascendants et descendants. — FAYEL : L'homœopathie au point de vue de la théorie et de la pratique (40 p.). — TH.-H. MARTIN : Notions des anciens sur les marées et les euripes (108 p.).

Année 1867.

LIÉGARD : Étude sur l'accommodation de l'œil.

Transactions of the CAMBRIDGE *Philosophical Society*. — In-4°.

Tome X.

2e partie, 1864. — H. GODFRAY : Sur une carte et un diagramme pour faciliter la navigation suivant un grand cercle (12 p.). — AIRY : Démonstration du théorème que toute équation algébrique a une racine (7 p.). Supplément au Mémoire précédent (4 p.). — DE MORGAN : Sur les principes généraux dont la composition des forces est une conséquence (15 p.). — DONALDSON : Sur le système cosmique de Platon exposé dans le livre X de la *République* (12 p.). — DE MORGAN : Sur le syllogisme (n° IV), et sur la Logique des rapports (28 p.). — RÖHRS : Sur le mouvement des verges élastiques minces (15 p.). — DE MORGAN : Sur la théorie des erreurs d'observation (19 p.). Sur le syllogisme (n° V), et sur divers points du système onymatique (60 p.).

Tome XI.

1re partie, 1866. — HUMPHRY : Sur la croissance des maxillaires. — AKIN : Sur l'origine de l'électricité (15 p.). — CAYLEY : Sur la théorie de l'involution (18 p.). Sur un cas d'involution des courbes cubiques (42 p.). Sur la classification des courbes cubiques (48 p.). Sur les cônes et les courbes cubiques (16 p.). — DE MORGAN : Sur l'infini, et sur le signe d'égalité (45 p.). Théorème relatif aux séries neutres (13 p.). Sur l'histoire primitive des signes + et — (10 p.). — CLIFTON : Note sur le *Mém. préc.* (6 p.).

Publications de l'Université royale de CHRISTIANIA.

Compte-rendu annuel de l'Université royale de Norvége pour l'année 1862 (55 p.). — Compte-rendu pour l'année 1864 (63 p.). — Compte-rendu pour l'année 1865, et budget de l'Université pour les années 1866-1869 (112 p.). — BJERKNES : Sur la représentation géométrique des équations entre deux variables réelles ou complexes (63 p.). — SARS : Relation d'un voyage zoologique entrepris dans l'été de 1863 dans la province de Christiania (36 p.). — SARS : Relation d'un voyage zoologique entrepris dans l'été de 1865 sur les côtes des provinces de Christiania et de Christiansand. — Verroux cylindriques. — Taxidermie : instruction pour ceux qui veulent former une collection d'objets d'histoire naturelle (16 p.). — SIEBKE : Recherches entomologiques dans les années 1864 et 1865 (48 p.). — COLETT : Observations zoologiques et botaniques dans les îles Hvalöer (83 p.). — IRGENS et HIORTDAHL : Observations géologiques faites sur le littoral de la préfecture de Bergenhus du Nord (18 p.,

2 pl.). — SEXE : Sur le glacier de Folgefon (36 p., 1 carte). — SEXE : Vestiges d'une époque glacière dans les environs du Hardangerfjord (34 p., 1 carte). — KJERULF : Guide pour les excursions géologiques aux environs de Christiania (43 p., 1 carte). — SARS : Description du *Lophogaster typicus*, espèce remarquable de crustacé décapode (37 p., 3 pl.). — A. STRECKER : Le laboratoire de Chimie de l'Université de Christiania, et les travaux chimiques qui y ont été exécutés. Sur l'acide gallique. Décomposition de la brucine par l'acide nitrique. Nouveau corps produit par l'aldéhyde d'ammoniaque et l'acide cyanhydrique. Nouvelles combinaisons de l'acide lactique. Combinaisons de l'éthyle et du méthyle de mercure. Formation de l'acide propionique. Production artificielle de l'huile de canelle. Eaux sulfureuses de Sandefjord. Azotate neutre de mercure. Analyse d'une pierre météorique. Action de l'acide azotique sur la salicine. Acide margarique extrait de l'huile d'olive. Sur la constitution de la quinine. Formation artificielle de la taurine. Analyse de l'euxénite et de l'orthite (104 p., 1 pl.). — Observations météorologiques de cinq stations télégraphiques de la côte de Norvége, réduites par ÅSTRAND, 1re et 2e années, 1861-62 (XXX + 60 + 60 pages). Observations météorologiques de la côte méridionale de Norvége, pour les années 1863 à 1866; publiées par l'Institut météorologique de Norvége (60+65+72+66 p.).

Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de COLMAR. (6e et 7e années, 1865-66.) — In-8°.

BOURLOT : Changements de niveaux des sols dans le nord de la presqu'île Scandinave, etc. (14 p.). — KAMPMANN fils : Matériaux pour une flore cryptogamique de l'Alsace *(Lichens)* (24 p.) — BLEICHER : Recherches géologiques faites dans les environs de Rome (36 p.). — LEPRIEUR : La chasse aux coléoptères (102 p.) Sur quelques coléoptères des environs de Colmar (12 p.). — BOURLOT : Histoire des tremblements de terre ressentis en Alsace et dans le pays de Bâle (50 p.). — GRAD : Les courants et les glaces de la mer polaire (20 p.). — FAUDEL : Découverte d'ossements fossiles humains dans le Lehm de la vallée du Rhin (12 p.). — SCHEURER-KESTNER : Recherches chimiques sur les ossements trouvés dans le Lehm d'Eguisheim (30 p.).

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in DANZIG. (Mémoires de la Société des Naturalistes de Danzig). — In-8°.

2e Série. T. I, cahiers 1, 2, 3, 4 (1863-1866).

GRONAU : Table des fonctions trigonométriques et des secteurs

circulaires et hyperboliques (VIII-150 p.). — KAYSER : Observations de la déclinaison magnétique à Danzig (27 p.). Le micromètre de dépression, nouvel instrument pour la mesure de la dépression de l'horizon (16 p., 1 pl.). — MEHLER : Sur l'attraction des corps homogènes et des polyèdres en particulier (20 p., 1 pl.). — KLINSMANN : Additions et rectifications aux *Novitia atque defectus floræ Gedanensis (1845)*. — DENECKE : Nouvelle expérience d'interférences acoustiques. — GRONAU : Théorie et applications des fonctions hyperboliques, principalement à la détermination du coefficient de résistance dans la chute des corps (80 p., 1 pl.). — LOEW : Sur quelques diptères pris auprès de Danzig, et dont les ailes sont réduites ou manquent totalement. — MENGE : Sur un Rhipidoptère et quelques Helminthes renfermés dans l'ambre jaune (8 p.). Les Araignées de Prusse (152 p., 28 pl.).

Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de DIJON. — In-8°

2e Série.

Tome XI, 1863. — D.-G. et B.-A. BARBIANI : Mémoire sur les tremblements de terre dans l'île de Zante (112 p.). — J. MARTIN : De la zône à *Avicula contorta* et du *Bone-bed* de la Côte-d'Or (80 p.). — BRULLÉ : Recherches sur les Origines aryennes (64 p.).

Tome XII, 1864. — J. MARTIN : Zône à *Avicula contorta*, ou étage Rhætien (288 p., 3 pl.).

Tome XIII, 1865. — J. MARTIN : Du terrain tertiaire de la gare de Dijon (32 p., 2 pl.). — A. PERREY : Bibliographie séismique (3e partie, 70 p.). Documents sur les tremblements de terre et les phénomènes volcaniques (130 p.).

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de GENÈVE. — In-4°.

Tome XI.

1re partie, 1846. — PLANTAMOUR : Mémoire sur la latitude de l'Observatoire de Genève (16 p.). Observations de comètes faites à l'Observatoire de Genève (50 p.). — A. DE CANDOLLE : Neuvième notice sur les plantes rares cultivées dans le Jardin botanique de Genève (18 p., 2 pl.). — PICTET : Ossements trouvés dans les graviers stratifiés de Mattegnin (c. de Genève) (14 p.). — RITTER : Sur la constitution physique des fluides élastiques (16 p.). — WARTMANN : Mémoire sur deux balances à réflexion et sur quelques recherches auxquelles on peut les employer (32 p., 1 pl.). — MORICAND : Coquilles terrestres et fluviatiles de Bahia (3e suppl.) (14 p.,

1 pl.). — VALZ : Observation de l'éclipse totale de Soleil du 8 juillet 1842, faite à l'Observatoire de Marseille (16 p.). — HUBER : Particularité offerte par une larve de Tenthrède. — PREVOST : Recherches sur le système nerveux de la tête du Congre (34 p., 1 pl.). — DE LA RIVE : De l'action combinée des courants d'induction et des courants hydro-électriques (28 p.).

2e partie, 1848. — PICTET : Description des Mollusques fossiles qui se trouvent dans les grès verts des environs de Genève (158 p., 15 pl.). — RITTER : Note sur le calcul de la dilatation de l'eau (12 p.). — A. DE CANDOLLE : Dixième notice sur les plantes rares cultivées dans le Jardin botanique de Genève (24 p., 2 pl.). — BOISSIER : Description de deux nouvelles espèces de Crucifères des Alpes du Piémont (6 p., 2 pl.). — D'ESPINE : Lois de mortalité et de survivance aux divers âges de la vie humaine dans le canton de Genève (44 p.). — PLANTAMOUR : Mémoire sur la comète Mauvais de l'année 1844 (71 p.).

Tome XII.

1re partie, 1849. — CHAIX : Mémoire sur la pente et le niveau du Nil (20 p.). — PICTET et W. ROUX : Description des Mollusques fossiles qui se trouvent dans les grès verts des environs de Genève (132 p., 12 pl.). — PLANTAMOUR : Supplément au Mémoire sur la comète Mauvais de 1844 (8 p.). — CHOISY : Considérations sur la famille des Nyctaginées (8 p., 1 pl.). — PREVOST : Observations microscopiques sur la fibre musculaire (14 p., 1 pl.). — WARTMANN : Deuxième Mémoire sur le Daltonisme ou la Dyschromatopsie (50 p.). — MARIGNAC : Mémoire sur la composition et les formes cristallines des nitrates de protoxyde de mercure (22 p., 1 pl.). — BRUNNER fils et DE FISCHER-OOSTER : Recherches sur la température du lac de Thoune à différentes profondeurs et dans toutes les époques de l'année (22 p., 3 pl.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève dans les années 1846 et 1847 (1er et 2e Suppl.) (XVIII-103 p., XII-88 p.).

2e partie, 1851. — PICTET : Description de quelques poissons fossiles du Mont-Liban (58 p., 10 pl.). Description d'un veau monstrueux formant un groupe nouveau (hétéroïde) dans la famille des monstres anidiens (14 p., 2 pl.). — WARTMANN : Note sur la polarisation de la chaleur atmosphérique (8 p.). — MARIGNAC : Recherches sur l'azoture de bore (24 p.). — CHOISY et WALLICH : Description des Guttifères de l'Inde et de l'Amérique (60 p., 5 pl.). — RITTER : Mémoire sur la détermination des éléments de l'orbite d'une comète ou d'une planète au moyen de trois observations (52 p.). — Notice nécrologique sur le Dr Prévost. — PLANTAMOUR : Observations

astronomiques faites à l'Observatoire de Genève dans l'année 1848 (XIV-136 p.).

Tome XIII.

1re partie, 1852. — PLANTAMOUR : Résumé des observations thermométriques et barométriques faites à l'Observatoire de Genève et au Grand-Saint-Bernard, de 1841 à 1850, suivi de tables hypsométriques calculées d'après la formule de Bessel (74 p.). — PICTET et W. ROUX : Description des Mollusques fossiles qui se trouvent dans les grès verts des environs de Genève. 3e *Partie :* Acéphales Orthoconques (100 p., 13 pl.). — MORIN : Apparences microscopiques des cheveux humains et des poils d'animaux (24 p., 1 pl.). — WARTMANN : Recherches sur la conductibilité des minéraux pour l'électricité voltaïque (20 p.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1849 (XII-135 p.).

2e partie, 1854. — GOSSE : De l'étiologie du goître et du crétinisme (40 p.). — MORIN : Nouvelles expériences sur la perméabilité des vases poreux et des membranes desséchées par les substances nutritives (28 p.). — PICTET et W. ROUX : Description des Mollusques fossiles qui se trouvent dans les grès verts des environs de Genève. 4e *Partie :* Acéphales Pleuroconques (64 p., 11 pl.). — RITTER : Note sur la mesure des hauteurs par le baromètre (30 p.). — DE LA RIVE : Mémoire sur la cause des aurores boréales (38 p.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1850 (XI-151 p.).

Tome XIV.

1re partie, 1855. — H. DE SAUSSURE : Mélanges hyménoptérologiques (68 p., 1 pl.). — PICTET : Notice sur quelques anomalies de l'organisation (22 p., 4 pl.). — CHOISY : Mémoire sur les familles des Ternstroemiacées et Camelliacées (96 p., 3 pl.). — THURY : Observations sur l'anthogénie de l'Hémérocalle fauve (14 p., 1 pl.). — MARIGNAC : Recherches sur les formes cristallines de quelques composés chimiques (88 p., 3 pl.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1851 (95 p.).

2e partie, 1858. — PLANTAMOUR : De la température de Genève, d'après vingt années d'observations (1836 à 1855) (42 p.). — SORET : Recherches sur la corrélation de l'électricité dynamique et des autres forces physiques (86 p., 2 pl.). — DE SAUSSURE : Mémoire sur divers Crustacés nouveaux des Antilles et du Mexique (80 p., 6 pl.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1852 (XV-126 p.).

Tome XV.

1re partie, 1859. — CLAPARÈDE : De la formation et de la fécon-

dation des œufs chez les vers nématodes (102 p., 8 pl.). — FAVRE : Mémoires sur les terrains liasique et keupérien de la Savoie (90 p., 3 pl.). — DUBY : Sur une espèce de *Dothidea* (hypoxylées) et sur quelques questions de taxonomie (8 p., 1 pl.). — SORET : Recherches sur la corrélation de l'électricité dynamique et des autres forces physiques (32 p., 1 p.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1853-54 (XVI-40 p.).

2e partie, 1860. — DE SAUSSURE : Essai d'une faune des Myriapodes du Mexique avec la description de quelques espèces des autres parties de l'Amérique (136 p., 7 pl.). — PLANTAMOUR : Mesures hypsométriques dans les Alpes effectuées à l'aide du baromètre (40 p.). — CHOISY : Du genre *Dicostigma*, famille des Clusiacées (6 p., 2 pl.). — RITTER : Recherches sur la figure de la Terre (26 p.). — WARTMANN : Mémoire sur l'échange simultané de plusieurs dépêches télégraphiques entre deux stations qui ne communiquent que par un seul fil (16 p., 1 pl.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1855-56 (VIII-24 p.).

Tome XVI.

1re partie, 1861. — DE CANDOLLE : De la production naturelle et artificielle du liége dans le Chêne-liége (14 p., 3 pl.). — DUBY : Mémoire sur la tribu des Hystérinées (famille des Hypoxylées) (56 p., 2 pl.). — CLAPARÈDE : Études anatomiques sur les annélides, turbellariés, apalines et grégarines observés dans les Hébrides (94 p., 7 pl.). — RITTER : Recherches sur la figure de la terre (30 p.). — PLANTAMOUR : Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève en 1857-58 (XVIII-28 p.).

2e partie, 1862. — CLAPARÈDE : Recherches anatomiques sur les Oligochètes (76 p., 4 pl.). — HUMBERT : Description de quelques espèces nouvelles de Planaires terrestres de Ceylan, et observations anatomiques sur le genre *Bipalium* (20 p., 1 pl.). — DE LA RIVE : Nouvelles recherches sur les aurores boréales et australes, et description d'un appareil qui les reproduit avec les phénomènes qui les accompagnent (30 p., 1 pl.). — MÜLLER : Principes de classification des lichens, et énumération des lichens des environs de Genève (94 p., 3 pl.).

Tome XVII.

1re partie, 1863. — CLAPARÈDE : Étude sur la circulation du sang chez les Aranées du genre Lycose (22 p.). — PICTET : Mélanges paléontologiques (36 p., 7 pl.). — A. DE LA RIVE : Phénomènes qui caractérisent la propagation de l'électricité dans les fluides élastiques très raréfiés (44 p.). — DE LORIOL : Description de deux Échinides

nouveaux de l'étage nummulitique d'Égypte. — HUMBERT : Mollusques terrestres nouveaux ou peu connus (20 p.). — DE SAUSSURE : Mélanges orthoptérologiques (42 p., 1 pl.). Mélanges hyménoptérologiques (74 p.).

2e partie, 1864. — L. DE LA RIVE : De la conductibilité de la glace pour la chaleur (24 p., 1 pl.). — PLANTAMOUR et HIRSCH : Différence de longitude des Observatoires de Genève et de Neuchâtel (148 p., 4 pl.). — DE LORIOL : Description de quelques Brachiopodes crétacés (12 p., 1 pl.). — J. MÜLLER : Nature des anthères, d'après une monstruosité du *Jatropha pohliana*. Existence d'anthères triloculaires. Deux sortes d'étamines infléchies dans les Euphorbiacées (1 pl.). — CLAPARÈDE : Annélides de Port-Vendres (Pyrénées-Orientales) (138 p., 8 pl.).

Tome XVIII.

1re partie, 1865. — HUMBERT : Essai sur les Myriapodes de Ceylan (62 p., 5 pl.). — DE LORIOL et JACCARD : Formation d'eau douce infra-crétacée du Jura, etc. (66 p., 3 pl.). — SORET : Sur la corrélation de l'électricité dynamique et des autres forces physiques (20 p.).

2e partie, 1866. — G. LUNEL : Révision du genre Castagnole (Brama) et description d'une espèce nouvelle (32 p.). — CELLÉRIER : Note sur la mesure de la pesanteur par le pendule (22 p.). — C. DE CANDOLLE : Mémoire sur la famille des Pipéracées (30 p.). — FATIN : Des diverses modifications dans les formes et la coloration des plumes (60 p.). — E. PLANTAMOUR : Expériences faites à Genève avec le pendule à réversion (108 p.).

Tome XIX.

1re partie, 1867. — DE LORIOL et PELLAT : Monographie paléontologique et géologique de l'étage portlandien des environs de Boulogne-sur-Mer (200 p.). — E. PLANTAMOUR : Des anomalies de la température observées à Genève pendant les quarante années 1826-1865 (64 p.). — CELLERIER : Note sur la pression au centre de la terre.

Oberhessische Gesellschaft für Natur-und Heilkunde. (Société d'Histoire naturelle et de Médecine de la Hesse-Supérieure). GIESSEN. — In-8°.

12e Bulletin, 1867. — W. SCRIBA : Coléoptères du grand-duché de Hesse et des pays limitrophes (50 p.). — H. HOFFMANN : Sur la géographie botanique des contrées du Rhin moyen (10 p., 1 carte). — KEHRER : Études sur l'éclosion de l'embryon animal (36 p.).

Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow. — In-8°.

Tome V.

1860-64. — Bryce : Marques fossiles de pluie. — Rogers : Relations entre les dépôts de sel et le climat. — Mackinlay : Voyage en Islande. — Helmholtz : Sur le mouvement des cordes d'un violon. — Blair : Expériences électro-magnétiques (8 p.). — Gale : Pluie aux environs de Glasgow. — Crum : Stalactites de sulfate de baryte du Derbyshire. — C. Gregory : Railways dans les rues (10 p.). — M. Hamilton : Voyage à travers les Cordillières. — D. Robertson : Usage des antennes du *Corystes Cassivelaunus*. — Rogers : Origine des Cyclones. — Fryar : Explosions dans les houillières (10 p.). — Goodall : *Whin Floats* et *Dykes* de l'Ayrshire. — Taylor : Appareil indicateur du grisou dans les houillières. Perfectionnement des caisses étanches dans les navires de fer, pour prévenir les effets de l'incendie. — A. Thomson : Spécimens ostéologiques. — F. Thomson : Sur les accidents par le feu provenant des crinolines (7 p.). — Clark : Effets de la gelée de décembre 1860. — Bryce : Géologie des montagnes de Ben Nevis. — Keddie : Flore et climat de l'île de Cumbræ (16 p.). — Grieve : Algues marines de la Clyde. — M. Rankine : Usage des hypothèses mécaniques dans la science (7 p.). — Buchanan : Théorie mécanique de la prédominance de la main droite sur la gauche (25 p.). — W. Thomson : Nouvel instrument pour mesurer la résistance électrique. Rigidité de la Terre. — Gibb : Mouvement de terrain à Auchengray Estate (5 p., 1 pl.). — J. Napier : La teinture dans l'antiquité (24 p.). Pierres de fer, leur composition. — J. R. Napier : Sections de moindre résistance des navires. — Mayer : Sur le projet du Gouvernement pour aider l'instruction scientifique (10 p.). — Williams : Couleurs du coal-tar. — Anderson : Pisciculture (10 p.). — Crosskey : Débris de cétacé près de la rivière Irvine. — Russell : Houille tertiaire de Bornéo (9 p., 1 pl.). — Taylor : Illusion d'optique, dite *les spectres*. — Wünsch : Utilisation des herbes marines (11 p.). — Wilson : Vitraux de la cathédrale de Glasgow (22 p.). —Whitelaw : Application pratique de la dialyse (7 p.). — Grant : Détermination du temps à l'Observatoire de Glasgow (14 p.). — M. Hamilton : Grands lacs du Pérou. Observations sur le drainage (7 p.). — Gorman : Préservation de la fumée. — Crosskey : Section de l'argile glaciale à Errol (Pertshire).

Tome VI.

1864-67. — J. Taylor : Moyen de prévenir les accidents dans les cloches à plongeur (8 p.). Appareil électrique pour découvrir les

morceaux de métal dans les blessures. — GORMAN : Description d'un fourneau à gaz pour chauffer le fer (8 p.). — NAPIER : Vitesse la plus avantageuse pour un steamer complètement chargé. — KEDDIE : Phosphorescence de la mer (10 p.). — ROGERS : Sur le pétrole (13 p.). — W. THOMSON : Horloges mues ou réglées par l'électricité. Électromètre normal; électromètre indicateur pour la télégraphie de mer et de terre. — R. BROWN : Sur le traitement de la peste bovine (14 p.). — GRANT : Détermination électrique de la différence de longitude des Observatoires de Greenwich et de Glasgow (7 p.). — GAIRDNER : Sur la fonction de la parole articulée, et ses rapports avec l'âme et les organes du corps (36 p.). — RANKINE : Estimation du pouvoir évaporatif du combustible. — F. THOMSON : Sur les ateliers de Glasgow (17 p.). — A. SMITH : Sur l'eau de la Clyde (9 p.). — J. YOUNG : Ébauches scientifiques des Anciens. I. Géologie des Grecs (20 p.). — RANKINE : Sur la locution *énergie potentielle*, et sur les définitions des quantités physiques. — J. YOUNG : Sur deux instruments nouveaux. — W. THOMSON : Tourbillons atomiques (10 p.).

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu GÖTTINGEN. (Nouvelles de la Société Royale des Sciences de l'Université de GŒTTINGUE). — In-12.

Année 1866.

SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN : Le *Silberkies*, nouvelle espèce minérale de Joachimsthal (8 p., 1 pl.). — KLINKERFUES : Sur l'influence du mouvement de la source lumineuse sur la réfrangibilité d'un rayon (28 p., 1 pl.). — MECZNIKOW : Histologie du rein. — FITTIG : Acide valériolactinique. — ENNEPER : Remarques sur les courbes à double courbure (7 p.). — v. SEEBACH : Nouvelles formations volcaniques de Santorin. — WÖHLER : Nouveau minéral de Bornéo (9 p., 1 pl.). — HUSEMANN et MARMÉ : Sur la résorption du phosphore. — KRAUSE : Sur la terminaison des nerfs dans le clitoris. — LISTING : Sur les couleurs du spectre. — BEILSTEIN : L'acide para-nitratoluylique et ses dérivés. — FITTIG : Sur les hydrogènes carbonés (12 p.). — BOEDECKER : Sur la fumarine de G. Preuss. — WICKE : Sur les rognons phosphatés du minerai de fer de Gross-Bülten et d'Adenstedt. — KEFERSTEIN : Sur quelques Siponculidées d'Amérique (14 p.). — v. SEEBACH : Les *Zoantharia perforata* de la période paléozoïque (8 p.). — ENNEPER : Sur les surfaces cycliques (6 p.). — KLINKERFUES : Sur la nouvelle variable près de ε de la Couronne boréale. — ENNEPER : Sur un problème de photométrie (8 p.). — v. SEEBACH : Sur les Mammifères diluviens

du Leinethal supérieur, et sur une nouvelle démonstration de l'antiquité de l'homme. — KÖLLE : Remarques sur l'étymologie des nombres (10 p.). — ENNEPER : Sur la surface développable circonscrite à deux surfaces données (18 p.).

Année 1867.

WÖHLER : Sur le bore graphitoïde. — LISTING : Dix années d'observations météorologiques à Gœttingue (14 p.). — WÖHLER : Pierre météorique du Mexique. — FITTIG : Nouveaux dérivés du mésitylène. Décomposition du camphre par le chlorure de zinc fondant. Combinaisons du cyanogène avec le manganèse (12 p.). — SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN : Reproduction photographique de la carte de l'Etna. — ENNEPER : Équations générales des lignes sur les surfaces développables (23 p.). — FITTIG : Produits de l'oxydation des benzoles éthylique et diéthylique. — HASSE : Sur la structure de la rétine (7 p.). — MARMÉ : La convallamarine, nouveau poison. — ENNEPER : Réduction d'une intégrale multiple (8 p.). — HASSE : Les terminaisons du nerf acoustique dans l'organe auditif des oiseaux (12 p.). — EHLERS : Le genre *Heteronereis* et ses relations avec les genres *Nereis* et *Nereilepas* (9 p.). — STERN : Détermination des constantes dans le calcul des variations. — ENNEPER : Recherches de géométrie analytique (57 p.). — SCHERING : Notice sur B. Riemann (10 p.). — KUPFFER : Formation de l'embryon dans l'œuf des poissons osseux (8 p.). — KEFERSTEIN : Batraciens nouveaux ou rares de l'Australie et de l'Amérique tropicale (21 p.). — FITTIG : Sur quelques dérivés du xylole et du benzole diméthylique artificiel. Sur l'isoxylole. — v. SEEBACH : Critique du genre *Myophoria* de Bronn (9 p.). — MARMÉ : Action du thallium (11 p.). — KRAUSE : Sur l'ellipsoïde optique. — WÖHLER : Étude sur le cérium. — LISTING : Applications du théorème des réseaux (18 p.). — HUSEMANN : Pharmacologie des Euphorbiacées (5 p.). — ENNEPER : Sur la théorie des surfaces gauches (45 p.). — FITTIG : Sur l'existence de l'alcool propylique et sur quelques-uns de ses dérivés (5 p.).

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu HALLE. (Mémoires de la Société des Sciences naturelles de HALLE). — In-4°.

Tome IX.

1864-66. — BRASACK : Études d'analyse spectrale sur les métaux (16 p., 1 pl.). — WELCKER : Sur le développement et la constitution de la peau et du poil dans le *Bradypus*, et sur une algue vivant à l'intérieur du poil de cet animal (56 p., 2 pl.). — BURMEISTER :

Description du *Macrauchenia patagonica* (Owen) (40 p., 2 pl.). — IRMISCH : Sur le *Papaver trilobum* (Wallroth) (20 p., 2 pl.). — MÖHL : Éruptions phonolithiques dans la Hesse Électorale (9 p.). — HASSKARL : Nouvelle clef de l'*Herbarium Amboinense* de Rumph (222 p.).

Tome X (1er et 2e cahiers).

1867. — BRASACK : Le spectre atmosphérique; étude spectrale de l'étincelle électrique produite entre des électrodes de platine (42 p., 1 pl.). — DIPPEL : Division cellulaire de l'*Ulothrix zonata* (10 p., 1 pl.). Production des petits courants pariétaux de protoplasma dans les cellules des végétaux, et leurs relations avec les couches d'accroissement spirales ou réticulées (34 p., 2 pl.). — GERSTAECKER : Les espèces du genre *Nysson* (Latr.) (54 p.). — TRENKNER : Nouveautés paléontologiques du nord-ouest du Harz. I. Calcaire d'Iberg et houillères de Grund (60 p., 5 pl.). — BURMEISTER : Squelette de *Machærodus* au Musée de Buenos-Ayres (14 p., 1 pl.).

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu HEIDELBERG. (Bulletin de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de HEIDELBERG). — In-8°.

Tome III, liv. 2-5 (1862-65).

CANTOR : Connaissances des Grecs en théorie des nombres. — CARIUS : Alcools à plusieurs acides. Cause de l'homologie. Transformation de l'alcool amylique en alcool butyrique. Nouvel acide de la série $C^n H^{2n} O^2$. Acide dicyanique. Autres combinaisons additionnelles. Nouvelles classes d'acides organiques. Synthèse de l'acide butyrique. Synthèse des corps saccharoïdes. — DELFFS : Nouveau réactif pour les alcaloïdes. — EISENLOHR : Théorie de l'aberration. — ERLENMEYER : Mélampirine. Combinaisons de l'hexyle. Poids atomique du chlorure de mercure. Propriétés singulières de l'amylène. — FRIEDREICH : Echinococcus du foie. Hyperplasie de la rate et du foie. — FUCHS : Volcans éteints de l'Italie moyenne. Formation de la côte occidentale de Naples. — HELMHOLTZ : Forme de l'horopter. Mouvements de l'œil (2 notes). Bruit des muscles. Rotation des yeux. Mécanique des mouvements du protoplasma. Propriétés de la glace. — KIRCHHOFF : Spectres des étoiles. — KNAPP : Le strabisme et son traitement. Empoisonnement par l'atropine. Opération du glaucome par Hancock. Asymétrie de l'œil. — KOPP : Chaleur spécifique des solides. — MEIDINGER : Dépôt galvanoplastique de métal. Galvanomètre universel. — LADENBURG : Analyse élémentaire. — MOOS : Tympan artificiel. — PAGENSTECHER : Men-

tone. Développement du *Mantis religiosa*. Loi des sexes d'après Thury. Urine de l'Alligator. La sangsue au point de vue de la bdellotomie. *Trichina spiralis*. *Phytopus tiliarum*. — PUCHELT : Difformité des avant-bras et des mains. — SORET : Rapport volumétrique de l'ozone (11 p.).

Tome IV.

1865-67. — BERNSTEIN : Action des poisons sur l'iris. — CARIUS : Fermentation butyrique dans l'estomac d'un malade. — DUSCH : Emphysème après la trachéotomie. — ERB : Trichines chez les rats. Galvanisation du cerveau et de la moelle épinière de l'homme. Cas de paralysie faciale et conséquences. Phénomènes électrotoniques chez l'homme vivant. Dégénérescence par accroissement des fibres striées. — ERLENMEYER : Sur le distyrole. Cause probable de l'isomérie de combinaisons contenant deux atomes de carbone (8 p.). Acide glycolique chez les végétaux. Huile d'orties. Action de l'acide iodhydrique sur la glycérine (16 p.). Formation singulière d'éther. Constitution de l'huile d'anis. Transformation du formiate de soude en oxalate. Analogie des sulfites acides avec les formiates; constitution de la taurine (7 p.). — FUCHS : Production de quelques minéraux. Nature de la lave. Le Maderanerthal. Phénomènes volcaniques en 1866 (5 p.). — HEINE : Sur la Coxite. — HELMHOLTZ : Vue stéréoscopique. Sur le son musculaire. Vitesse de propagation de l'excitation dans les nerfs (5 p.). Mécanique des osselets de l'oreille (8 p.). — KNAPP : Méningite cérébro-spinale épidémique. Sarcome de la choroïde. Opération de la cataracte (2 notes). Strabisme. Inflammation veineuse métastatique dans la fièvre puerpérale. Plastique de la paupière inférieure. Sarcome et gliosarcome de l'œil. — KNAUFF : Anatomie des membranes séreuses. — LADENBURG : Constitution de l'anéthole. — MOOS : Audition subjective de sons musicaux réels. Obstruction singulière des artères. — PAGENSTECHER : Jeunes poissons dans l'*Unio pictorum*. *Trichina spiralis* chez le hérisson. Trichines et Psoro-spermes chez le *Sus larvatus*. Essais de traitement d'un animal trichinisé. Recherches sur les Trichines. Muscles du Mandrille; différences entre les extrémités supérieures et inférieures des Mammifères. Molaire surnuméraire chez le *Hylobates syndactylus*. — WEBER : Cas de danger de l'asphyxie par le chloroforme. Guérison de fracture tibiale perforante, etc. Cas très remarquable d'enchondrome. Extirpation de la parotide, guérison, etc. Opération plastique étendue sur le visage (nez, les 4 paupières). Kyste de la mâchoire inférieure. Fracture compliquée du membre inférieur. Tumeur d'un nerf. Guérison d'un vice de conformation de la vessie.

Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de LILLE.

2e Série, Tome I (1855).

DELEZENNE : Note sur le ton des orchestres et des orgues (25 p.). — MACQUART : Diptères exotiques nouveaux ou peu connus (5e suppl.) (132 p., 6 pl.). Plantes herbacées d'Europe et leurs insectes, pour faire suite aux arbres, arbrisseaux, etc. 2e Partie (174 p.). — CORENWINDER et DEFAU : Recherches sur la composition chimique des substances alimentaires du bétail, dans le nord de la France (24 p.). — H. VIOLETTE : Sur le fil des instruments tranchants (5 p.). — BACHY : Note rétrospective sur la culture du *Polygonum tinctorium*, et l'extraction de son indigo (6 p.). — CANNISSIÉ : Essai sur l'analyse et la synthèse des éléments phonétiques des langues et sur l'écriture (29 p.).

Tome II (1856).

MAHISTRE : Mémoires sur les éclipses de lune et de soleil et la détermination de l'aplatissement des méridiens terrestres (44 p.). — CORENWINDER : Recherches sur la composition chimique du lait de vache, avant et après la parturition (12 p.). — KUHLMANN : Deuxième Mémoire sur les chaux hydrauliques, les pierres artificielles, et diverses applications nouvelles de silicates solubles (32 p.). — DELEZENNE : Considérations sur l'acoustique musicale (41 p.). — MAHISTRE : Sur le travail de la vapeur dans les machines, en tenant compte de la vapeur qui reste après chaque coup de piston dans les espaces libres des cylindres (12 p.). Note sur le calcul de la force centrifuge. Démonstration de l'équation du travail des forces ou du principe des vitesses virtuelles (6 p.). — LAMY : Note sur les courants électriques engendrés par le magnétisme terrestre. 1re Partie (6 p.). — MACQUART : Plantes herbacées d'Europe et leurs insectes. 3e et dernière Partie (56 p.).

Tome III (1856).

MAHISTRE : Sur quelques propriétés des courbes équidistantes (2 p., 1 pl.). — DELEZENNE : Sur la constitution et la suspension des nuages (22 p.). — LECOMTE : Mémoire explicatif de l'invention de Scheibler, pour introduire une exactitude, inconnue avant lui, dans l'accord des instruments de musique (90 p.). — HEEGMANN : Mémoire sur la réfraction astronomique (44 p.). — MAHISTRE : Sur le pendule conique ou régulateur à force centrifuge (32 p.). Études sur les accroissements de force dans les machines de Woolf (20 p.). — LAMY : Sur le magnétisme et la conductibilité électrique du potassium et du sodium (16 p.). — H. VIOLETTE : Essai sur les acides

du commerce (22 p.). — LIEBIG : De la théorie et de la pratique en agriculture (92 p.). — KUHLMANN : Études théoriques et pratiques sur la teinture, l'impression, les apprêts et la peinture (33 p.).

Tome IV (1857).

DELEZENNE : Table de logarithmes acoustiques, depuis 1 jusqu'à 1200, précédée d'une instruction élémentaire (78 p.). — LAMY : Note sur l'identité de l'erythroglucine et de la phycite (4 p.). — ED. COX : Observations sur les flotteurs indicateurs de niveau d'eau dans les générateurs à vapeur (6 p.). — FIÉVET : Mémoire sur la détente de la vapeur dans les machines du système de Woolf. — MAHISTRE : Mémoire sur les limites des vitesses qu'on peut imprimer aux trains des chemins de fer, sans avoir à craindre la rupture des rails (10 p.). Mémoire sur le travail de la vapeur dans les cylindres des machines, en tenant compte de tous les espaces libres du système distributeur (8 p.). Note sur une amélioration à introduire dans le régime économique des machines à vapeur du système de Woolf (4 p.). Note sur le calcul de la vaporisation d'une machine à vapeur, travaillant à la détente du maximum d'effet (4 p.). Mémoire sur les limites de la pression dans les machines travaillant à la détente du maximum d'effet, et sur l'influence des espaces libres dans les machines à un seul cylindre (12 p.). Mémoire sur le travail de la vapeur dans les machines, en tenant compte des condensations qui se font pendant la détente (12 p.). Mémoire sur les vitesses de rotation qu'on peut faire prendre à certaines roues, sans avoir à craindre la rupture sous l'effort de la force centrifuge (8 p.). — CORENWINDER : Recherches chimiques sur la betterave pendant la seconde période de sa végétation (8 p.). Mémoire sur la production du gaz acide carbonique par le sol, les matières organiques et les engrais. Expériences sur la puissance fertilisante de quelques tourteaux de graines oléagineuses. — CHRESTIEN : Notes statistiques sur la mortalité de la ville de Lille, pendant l'année 1856 (18 p.). — LAMY : Note sur les courants électriques engendrés par le magnétisme terrestre (16 p.). — KUHLMANN : Troisième Mémoire sur les chaux hydrauliques et la formation des roches par la voie humide (16 p.). — H. VIOLETTE : Emploi des capsules enfumées dans l'analyse chimique (6 p.).

Tome V (1858).

MAHISTRE : Mémoire descriptif d'une roue destinée à produire la détente de la vapeur et à faire varier la course d'admission par degrés aussi petits qu'on voudra, entre toutes les limites possibles, la course des leviers de manœuvre restant constante (1 pl., 8 p.). — PASTEUR : Mémoire sur la fermentation appelée lactique (14 p.). —

MAHISTRE : Note sur la mesure de la force utile prise sur une machine à vapeur, sans avoir recours à l'emploi du frein (4 p.). — DELEZENNE : Note sur l'éclairage à l'huile de colza (6 p.). — CAZENEUVE : Symptômes de morve aiguë chez un valet d'écurie (8 p.). — MAHISTRE : Mémoire sur les sections à donner aux tuyaux destinés à conduire la vapeur des générateurs aux cylindres des machines (28 p.). Note sur la force nécessaire pour mouvoir une clef de robinet, ou un axe conique maintenu dans sa gaîne par la pression de la vapeur (4 p.). — KUHLMANN : Quatrième Mémoire sur les chaux hydrauliques et la formation des roches par voie humide (6 p.). Industrie de la baryte (4 p.). — CHRESTIEN : Notes statistiques sur le mouvement de la population de la ville de Lille pendant l'année 1857 (24 p.). — MAHISTRE : Note sur le calcul des condensations et autres pertes de vapeur qui se font dans les conduits des machines (4 p.). — FIÉVET : Note sur la torsion des arbres de transmission de mouvement employés dans les usines et sur le travail mécanique qu'ils consomment par le frottement (8 p.). — CORENWINDER : Recherches sur l'assimilation du carbone par les feuilles des végétaux (1 pl., 34 p.). — MAHISTRE : Mémoire sur le mouvement des manivelles simples dans les machines à vapeur à double effet (22 p.).

Tome VI (1859).

KUHLMANN : Sur les oxydes de fer et de manganèse et certains sulfates considérés comme moyens de transport de l'oxygène de l'air sur les matières combustibles (26 p.). — MAHISTRE : Note sur les pertes de travail dues à l'excentricité dans les roues à grande vitesse tournant autour d'un axe vertical (4 p.). Mémoire sur les transmissions du mouvement à l'aide de courroies sans fin, avec pl. (28 p.). Note sur les moyens de corriger les régulateurs à force centrifuge qui ne maintiennent pas les vitesses des moteurs entre des limites suffisamment étroites (4 p.). — BOSSUT : Mémoire sur la figure et la construction des voûtes (18 p. 1 pl.,). — GIRARDIN et MARCHAND : Analyse des saumures de harengs et de leur emploi en agriculture (26 p.). — GIRARDIN : Titrage des potasses brutes extraites des vinasses de betteraves. — LAMY : Expériences relatives à une prétendue variation de la pesanteur (24 p.). — CHRESTIEN : Notes statistiques sur le mouvement de la population de la ville de Lille pendant l'année 1858 (20 p.). — LACAZE-DUTHIERS : Mémoire sur la pourpre (78 p.). — CALLAUD : Essai sur les piles servant au développement de l'électricité (54 p., 1 pl.).

Tome VII (1860).

MAHISTRE : Mémoire sur le travail absorbé par les frottements

dans les crapaudines et dans les guides (8 p., 1 pl.). — BRAUWERS : Analyse des eaux de la Lombardie par la méthode hydrotimétrique (14 p.). — HEEGMANN : Quelques mots sur un moyen d'augmenter considérablement le volume des eaux de la Deule (20 p.). — HOUZÉ DE L'AULNOIT : Recherches médico-légales sur la déglutition, comme signe de vie, chez les enfants qui n'ont pas respiré (12 p.). Mutilation considérable de la face, suite d'un coup de feu (6 p., 2 fig.). — CORENWINDER : Étude sur la migration du phosphore dans les végétaux (14 p.). — MAHISTRE : Mémoire sur les efforts que supportent la tôle et les rivets des chaudières à vapeur cylindro-sphériques (24 p.). — CH. VIOLLETTE : Extrait d'un travail sur la cristallisation subite des solutions salines sursaturées (16 p.). — CHRESTIEN : Rapport sur les causes de la mortalité considérable parmi les enfants de la ville de Lille, et les moyens d'y remédier (12 p.). — HEEGMANN : Supplément à la note intitulée : Quelques mots sur un moyen d'augmenter le volume des eaux de la Deule (17 p.). — H. VIOLETTE : Cochenille et vernis de laque (6 p.). Analyse de la betterave (4 p., 1 pl.). — CHRESTIEN : Recherches statistiques sur le mouvement de la population de la ville de Lille pendant l'année 1859 (31 p.).

Tome VIII (1861).

KUHLMANN fils : Sur les oxydes de fer et de manganèse, et certains sulfates considérés comme moyens de transport de l'oxygène de l'air sur les matières combustibles (18 p.). — MATHIAS : Sur le calcul des diamètres des cônes de transmission (8 p., 2 pl.). — CORENWINDER : Nouvelles recherches sur les combinaisons qui s'opèrent à l'aide des corps poreux (10 p.). Le phosphate de chaux dans la culture des terres fertiles. Nouvelles considérations sur l'emploi de l'engrais flamand en agriculture (16 p.). — DARESTE : Mémoire sur l'origine physiologique des œufs à double germe, et sur les origines de la duplicité monstrueuse chez les oiseaux (44 p.). — MARCHAND : Étude sur la production agricole et la richesse saccharine des betteraves (22 p.). — HOUZÉ DE L'AULNOIT : Recherches sur l'encéphalocèle consécutive aux abcès du cerveau (22 p.). — HEEGMANN : Essai d'une nouvelle méthode de résolution des équations algébriques au moyen des séries infinies. 1er Mémoire (26 p.). — HOUZÉ DE L'AULNOIT : Étude sur la découverte de la vapeur, etc. (74 p., 1 pl.). — H. VIOLETTE : Nouvelle fabrication du vernis gras au copal (14 p.). — GUIRAUDET : Étude sur les principes de la cristallographie géométrique (26 p., 1 pl.). — KUHLMANN : Sur une nouvelle couleur bleue préparée avec l'huile de coton (12 p.). — DAVID : Sur la courbure des surfaces et les lignes de courbure (34 p., 1 pl.). — LAMY : Sur la vision stéréoscopique sans le secours du stéréoscope. — GUIRAU-

DET : Sur les points à indicatrice parabolique et sur la théorie des points singuliers dans les courbes planes (14 p.). — DELEZENNE : Les pigeons voyageurs (14 p.).

Tome IX (1862).

PILAT et TANCREZ : Hygiène de la ville de Lille (48 p.). — FISCHER et BRICHETEAU : Traitement du croup (102 p.). — D'HENRY : Mémoire explicatif du cadran musical transpositeur (100 p., 6 pl.). — GIRARDIN : Influence du gaz sur les arbres des promenades publiques. Sur la composition et l'usage industriel des eaux de la Lys, etc. (32 p.). — CORENWINDER : De la migration du phosphore dans la nature (38 p.). — DARESTE : Mémoire sur la production artificielle des monstruosités dans l'espèce de la poule (40 p.). — DAVID : Résolution de quelques cas des équations différentielles linéaires (14 p.). — H. VIOLETTE : Distillation des térébenthines et des résines (16 p., 6 pl.). — DAVID : Théorie générale des développantes (20 p.). — GUIRAUDET : Aperçu historique sur l'origine et les progrès du calcul des variations, jusqu'aux travaux de Lagrange (44 p., 1 pl.). — LAMY : De l'existence d'un nouveau métal, le thallium (36 p., 1 pl.). — KUHLMANN fils : Note sur les sels organiques du thallium. Nouveaux procédés de fabrication de l'acide nitrique.

Tome X (1863).

DARESTE : Recherches sur les conditions de la vie et de la mort chez les monstres ectroméliens, etc. (44 p.). — PAINVIN : Propriétés des points d'inflexion des courbes du troisième ordre, et des points de rebroussement des courbes de troisième classe (46 p.). — BLANQUART-EVRARD : Intervention de l'art dans la photographie (1re et 2e Parties) (16-7 p., 1 pl.). — DAVID : Résolution des équations différentielles qui admettent pour intégrales des équations de forme déterminée (44 p.). — H. VIOLETTE : Mémoire sur la raffinerie impériale de salpêtre de Lille (28 p., 11 pl.). — GUIRAUDET : Leibnitz et Newton (26 p.). — GOSSELET : Observations sur le gisement de la houille dans le département du Nord (16 p.). — CORENWINDER : Recherches chimiques sur la végétation (20 p., 1 pl.). Expériences sur les feuilles colorées. — KUHLMANN : Recherches nouvelles sur la fabrication et la conservation des matériaux de construction et d'ornementation (30 p.). — LAMY : Sur les effets toxiques du thallium. — KUHLMANN fils : Combinaisons des sels organiques du thallium. Sels de la série phénique. — CORENWINDER : Recherches chimiques sur la banane du Brésil (12 p.). — DE NORGUET : Catalogue des Coléoptères du département du Nord (197 p.).

3e Série, Tome I (1864).

CH. BACHY : Observations d'agronomie et d'histoire naturelle

(10 p.).— KUHLMANN fils : Action de certains oxydes sur les chlorures en général, et particulièrement sur le chlorure de manganèse (2 p.). — LAMY : Expériences relatives à l'intensité des effets physiologiques produits par les commotions de la grande bobine d'induction de M. Ruhmkorff (6 p.). — HOUZÉ DE L'AULNOIT : Mémoire sur l'étranglement des amygdales par les piliers des voiles du palais, ses causes, ses complications et son traitement (22 p.). — C. DARESTE : Recherches sur les caractères des poules de la race polonaise (6 p., 1 pl.). — GIRARDIN : Faits pour servir à l'histoire technique de l'arsenic (12 p.). — DAVID : Théorie des courbes et surfaces normales entre elles (38 p.). — GIRARDIN : Considérations sur l'usage et l'abus de l'eau-de-vie et des autres liqueurs fortes (50 p.). — KUHLMANN : Force cristallogénique (26 p.). — CORENWINDER : Les feuilles des plantes exhalent-elles de l'oxyde de carbone? (10 p., 1 pl.) Recherches chimiques sur la betterave (21 p.). — LAMY : Mémoire sur les alcools thalliques (23 p.).

Tome II (1865).

HEEGMANN : Résolution générale des équations (24 p.). — GUIRAUDET : Recherches sur la dynamique d'un point matériel (34 p.). — DE NORGUET : Catalogue des oiseaux du Nord de la France (82 p.). — DARESTE : Recherches concernant l'influence des basses températures sur le développement de l'embryon de la poule (6 p.). — CORENWINDER : Recherches sur l'engrais flamand; son emploi dans la culture des terres (36 p.). La mer des Sargasses. Analyse du varec nageur ou raisin du tropique (12 p.). — PAINVIN : Théorie des surfaces polaires d'un plan (198 p.). — KUHLMANN : Recherches sur la force cristallogénique (20 p.). — LAMY : Sur les phosphates de thallium (14 p.). — GUIRAUDET : Études de cristallographie géométrique (32 p., 1 pl.). — BARRÉ DE SAINT-VENANT : Notice sur Du Buat (84 p., 3 pl.).

Tome III (1866).

CORENWINDER : Recherches chimiques sur la végétation. Fonctions des feuilles (30 p., 1 pl.). — DE NORGUET : Catalogue des Mammifères du département du Nord (28 p.). — GRIPON : Recherche du pouvoir conducteur du mercure pour la chaleur (14 p.). — H. VIOLETTE : Mémoire sur les résines (8 p.). — KOLB : Étude théorique sur la fabrication de la soude par le procédé Leblanc (72 p.). — F. KUHLMANN fils : Double décomposition par voie de volatilisation. Action des oxydes sur les chlorures (4 p.). — GUIRAUDET : Études de cristallographie géométrique (20 p.). — C. VIOLLETTE : Mémoire sur la sursaturation (2 art., 118 p., 2 pl.). — GRIPON : Notice sur les travaux de M. Delezenne (27 p.).

Société des Sciences naturelles du Grand-Duché de LUXEMBOURG.—In-8°.

Tome II.

1854. — BRIMMEYR : Esquisse des environs d'Echternach. — MAJERUS : Terrain jurassique du Luxembourg (49 p.). — BOCH-BUSCHMANN : Sur l'accouplement des limaces. — WIES : Le brouillard sec *(Höhenrauch)*. — MOHIMONT : Oiseaux du Luxembourg. — DUTREUX : Lépidoptères du Grand-Duché de Luxembourg (3 art.). — HYMMEN : Nourriture des chenilles (18 p.). — BIVORT : Mammifères du Luxembourg. — FISCHER : Maladie du peuplier du Canada. — MORIS : Fossiles du terrain jurassique du Luxemboug.

Tome IV.

1857. — PONDROM : Maladie endémique dans le canton de Redange. — CRESPIN : Sur les mœurs du renard. — HARTMANN : Production d'un orage et chute de la foudre à Echternach. — BRIMMEYR : Les animaux sauvages indigènes considérés sous le point de vue économique (18 p.). — LAYEN : Rapport sur le Mémoire précédent. — FISCHER J^r^ : Richesses minérales du Luxembourg. — MOHIMONT : Oiseaux de passage dans le Grand-Duché. — DUTREUX : Index des Lépidoptères du Grand-Duché (Noctuélites, Bombycites). — FISCHER J^r^ : Influences locales, qui paraissent nuisibles à la santé. — FUNK : Plantes cryptogames du Grand-Duché. — BOCH-BUSCHMANN : Conjectures au sujet des mouvements des corps célestes. — KOLTZ : Flore phanérogamique du Luxembourg.

Tome V.

1862. — DE COLNET-D'HUART : Mouvement d'un point matériel sur un plan incliné, en ayant égard à la rotation de la terre. — FISCHER J^r^ : Sur les causes d'insalubrité, etc. — DUTREUX : Excursion entomologique à Bertrich et à Cochem. — KLEYR : Fièvres intermittentes à Eisborn, etc. — DE COLNET-D'HUART : Des surfaces normales à une surface donnée.

Tome VI.

1863. — DE COLNET-D'HUART : Détermination de la loi qui existe entre la chaleur rayonnante, la chaleur de conductibilité et la chaleur latente (64 p.). — MICHAELIS : Sur les courbes du second degré (41 p., 1 pl.). — SIVERING : Baromètre à cuvette mobile (1 pl.). — FISCHER : Sur l'avortement épizootique qui a régné dans le Grand-Duché, etc. — KOLTZ : Végétal parasite de la Mouche commune.

Tome VII.

1864. — DE COLNET-D'HUART : Nouvelle théorie mathématique de la chaleur et de l'électricité. *1^re^ Partie :* Détermination de la

relation qui existe entre la chaleur rayonnante, la chaleur de conductibilité et l'électricité (154 p., 3 pl.). — MICHAELIS : Calcul, par approximation, des racines d'une équation numérique, algébrique ou transcendante (24 p.). Expression, sous forme de série, de toutes les racines de l'équation $\tan x = \lambda x$ (5 p.). Emploi des imaginaires pour la sommation d'une classe de séries trigonométriques, et pour le calcul de certaines intégrales (19 p.). — MOHIMONT : Rapaces diurnes du Luxembourg. — DUTREUX : Sur les Lépidoptères. — KOLTZ : Sur l'*Athalia spinarum*. — REUTER : Analyse des minerais de fer.

Tome VIII.

1865. — DE COLNET-D'HUART : Nouvelle théorie mathématique de la chaleur et de l'électricité. 2e *Partie :* Théorie mathématique de la diathermansie, de la lumière et de la chaleur rayonnante naturelles et polarisées. Théorie mathématique de l'électricité statique, en ayant égard aux découvertes des propriétés électriques des corps isolants faites par Faraday (148). — WIES : Notice sur le lac de Donven (11 p.). — MICHAELIS : Sur certaines équations différentielles linéaires (26 p.). — KLEYR : La philosophie et les sciences naturelles (17 p.). — DE LA FONTAINE : Faune du pays de Luxembourg. Vertébrés. 1re *Partie :* Oiseaux (118 p.). — WARNIMONT : Le *Leuciscus (Cyprinus) rutilus* (38 p.). — J. MEYER : Cas irréductible d'une équation du troisième degré.

Tome IX.

1867. — WIES : Sur les terrains paléozoïques du Luxembourg (20 p.). — SIVERING : De l'équilibre et de la stabilité des corps flottants (27 p., 1 pl.). — DE COLNET-D'HUART : Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur (11 p.). — DE LA FONTAINE : Faune du Pays de Luxembourg. Vertébrés. 1re *Partie :* Oiseaux *(suite)* (128 p.). — REUTER : Minerais de fer en roche du Luxembourg (15 p.). — KUPPER : Sur un cas particulier de la théorie des moments d'inertie (7 p.). — WARNIMONT : Le Véron, *Phoxinus lævis* (77 p.). — REUTER : Observations météorologiques faites à Luxembourg (1854-1863) (124 p.).

Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Classe di Scienze matematiche e naturali. MILANO. — In-4°.

Tome X (1865-66).

POLLI : Sur les maladies dues à un ferment morbide, et sur leur traitement, 2e Partie (75 p.). — VERGA : Sur le ligament malléo-maxillaire (8 p., 1 pl.). — LOMBARDINI : Essai hydrologique sur le Nil. 2 Mémoires (64-7 p., 3 pl.). — GIANELLI : La vaccine et ses

lois en Italie (68 p.). — PORTA : De la luxation des vertèbres (51 p.). — CODAZZA : Sur le principe de la conservation de la force (8 p.). — GAROVAGLIO : Essai d'une classification méthodique des lichens de Lombardie (48 p., 3 pl.). Suite (36 p., 3 pl.). — POLLI : Expériences à l'appui de la doctrine des fermentations morbides (17 p.). — SCHIAPARELLI : Études cosmologiques. I. Opinions et recherches des Anciens sur les distances et les grandeurs des astres; leurs idées sur l'étendue de l'univers visible (23 p.). — PORTA : Sur l'autoplastie (112 p.). — LOMBARDINI : Traces de la période glaciale dans l'Afrique centrale. Suite à l'essai hydrologique sur le Nil (15 p.). — SCHIAPARELLI : De l'influence de la lune sur les variations atmosphériques (26 p., 2 pl.).

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de MOSCOU. — In-8°.

1866 (n° III).

REGEL et HERDER : Catalogue des plantes recueillies par Semenoff en 1857 (115 p.). — MOTSCHULSKY : Lépidoptères des environs du fleuve Amour. — PETOUNIKOW : Recherches sur la cuticule (25 p., 2 pl.). — RACZYNSKI : Distribution de la salicine dans les tissus des saules (5 p., 1 pl.). — WYROUBOFF : Recherches microscopiques sur les substances colorantes des Fluorines (13 p., 1 pl.). — BECKER : Voyage dans le steppe des Kirghis près d'Astrakhan et de la mer Caspienne (45 p.). — SCHOENE : Sur les dioxydes de barium, de strontium et de calcium (17 p.). — MOTSCHULSKY : Espèces de coléoptères rapportés de ses voyages (66 p.). — HERMANN : Sur les combinaisons des acides de l'ilménium avec la soude et la potasse (7 p.).

1866 (n° IV).

SCHOENE : Sur les combinaisons du soufre avec les métaux alcalins (81 p.). Sur l'hydrate de soude cristallisé. — TRAUTVETTER : Catalogue des plantes recueillies par Schrenk en 1840-43 (58 p.). — EICHWALD : Sur l'histoire de la géognosie et de la paléontologie en Russie (71 p.). — KARELTSCHIKOFF : Sur le développement des trachées des végétaux (7 p., 1 pl.). — v. VOLBORTH : Les prétendues Homocrines du *Lethæa rossica* (10 p.). — HERMANN : Sur la composition de l'ilménorutile (8 p.).

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu MÜNCHEN. (Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences de MUNICH). — In-8°.

Année 1865.

T. I. — LAMONT : Détermination astronomique de la position du

réseau de triangles bavarois sur la sphéroïde terrestre (38 p.). — GÜMBEL : Recherches sur les plus anciens restes de culture dans le nord de la Bavière, considérés au point de vue de leur accord entre eux et avec les objets lacustres de Suisse (38 p.).—VOGEL Jor : 1° Caractères des marécages des hauteurs et des prairies. 2° Sur l'azote contenu dans la viande cuite. — v. KOBELL : 1° Sur l'Enargite de Coquimbo. 2° Sur le stylotype, nouvelle espèce minérale de la série des combinaisons du sulfure de cuivre. 3° Sur la Jollyte, nouvelle espèce minérale de Bodenmais (Bavière). — VOGEL Jor : Détermination de l'acide phosphorique dans la bière. — MOHR : Composition de l'air contenu dans l'eau de la mer, avec quelques conséquences (14 p.). — SCHÖNBEIN : Nouvelles études sur l'oxygène. De l'influence de l'eau sur l'action chimique de l'ozone. — BISCHOFF : Sur la présence d'une poche spéciale contenant du sang et de l'hématoïdine, dans le placenta de la loutre (13 p.). — H. v. SCHLAGINTWEIT : Sur la température et les lignes isothermes de la Haute-Asie (34 p.). — BISCHOFF : Sur la formation de l'œuf et du placenta chez la fouine, la marte et la belette. — BUCHNER : Sur une nouvelle matière colorante rouge de l'écorce de bois pourri.

T. II.— VOGEL : Sur l'eau des tourbières et sur la conductibilité calorifique de la tourbe. — STEINHEIL : Sur les conditions de la formation des images dioptriques exactes. — v. KOBELL : Acides hyponiobique et dianique. — VOGEL : Observations sur le dessèchement de la tourbe. — SCHÖNBEIN : Études sur l'oxygène et le cyanin (48 p.). — FRITSCH : Sur la congélation du Danube en Autriche. — VOGEL Jor : Sur les essais de préparation du charbon de tourbe en Angleterre. — PETTENKOFER et VOIT : Sur la nature du diabète. — NAEGELI : De l'influence des circonstances extérieures sur la production des variétés dans le règne végétal (56 p.). — v. KOBELL : Sur la klipsteinite, nouveau silicate de manganèse. — BAUERNFEIND : Prisme de réflexion à déviation constante (4 p., 1 pl.). — GÜMBEL : Sur la présence des schistes du trias inférieur dans la Haute-Asie (19 p., 1 pl.). — NAEGELI : (*a*) Sur les conditions de la présence des espèces et des variétés dans leur cercle de propagation. (*b*) Des hybrides dans le règne végétal (77 p.).

Année 1866.

T. I. — v. LIEBIG : Sur la découverte du phosphate d'urée par Lehmann. — VOGEL Jor : Formation des marécages de montagnes dans les marécages de prairies. — GÜMBEL : Présence de l'Eozoon dans les montagnes primitives de la Bavière orientale (36 p., 3 pl.). — NAEGELI : (*a*) Hybrides végétaux dérivés. (*b*) Théorie de la formation des hybrides (57 p.). — v. MARTIUS : Sur la publication de sa flore

brésilienne. — Mor. Wagner : Sur le caractère et les conditions d'altitude de la végétation dans les Cordillières de Veragua et de Guatemala (31 p.). — Vogel J^or^ : Sur la formation des cristaux dans les tissus végétaux. — Voit : De l'influence du nombre et de la profondeur des mouvements respiratoires sur l'expiration de l'acide carbonique à travers les poumons. — Naegeli : 1° Sur les formes intermédiaires entre les espèces végétales. 2° Sur le nombre des formes intermédiaires (45 p.). — Schönbein : Nouvelles études sur le bioxyde d'hydrogène (25 p.). — v. Schlagintweit-Sakünlünski : 1° Circonstances thermiques des extrémités les plus profondes des glaciers de l'Himalaya et du Thibet. 2° Nouveau modèle de roulette. — v. Kobell : Pectolithe et Osmélithe. — Vogel J^or^ : 1° De l'influence de la profondeur d'une eau tranquille sur sa richesse en matières solides. 2° Sur la détermination de l'ammoniaque. — Bauernfeind : Réfraction terrestre. — Naegeli : 1° Étude systématique des *Hiéracées*, au point de vue des formes intermédiaires (29 p.). 2° Expériences sur les actions capillaires sous de faibles pressions atmosphériques (23 p.). — v. Martius : Communication de v. Baer sur un nouveau mammouth. — Naegeli : 1° Étude systématique des *Hiéracées*, au point de vue de l'étendue de l'espèce (36 p.). 2° Expériences sur les actions capillaires sous de faibles pressions atmosphériques (20 p., 2 pl.). 3° Synonymie et bibliographie des Hiéracées (22 p.). 4° Théorie de la capillarité (31 p.). — H. v. Schlagintweit : Sur un zéphyrophore.

T. II. — Vogel J^or^ : Observations sur la carbonisation de la tourbe (23 p., 2 pl.). — Schönbein : Formation de bioxyde d'hydrogène dans l'oxydation lente des matières organiques (30 p.). — Vogel J^or^ : 1° Sur la détermination de l'action chimique de la lumière à travers le bleu de Prusse. 2° Sur les acides volatils de la tourbe et la différence de qualité de la tourbe pour des gisements semblables. — Gümbel : Nouveaux gisements calcaires près de Reichenhall (34 p.). — Kuhn : Sur deux cas de foudre arrivés cette année. — v. Pettenkofer et Voit : Sur le dégagement d'acide carbonique et l'absorption d'oxygène pendant la veille ou le sommeil chez l'homme sain ou malade (27 p.). — Seidel : Formules trigonométriques pour le cas le plus général de la réfraction de la lumière dans les surfaces sphériques centrées (21 p.). — v. Gorup-Besanez : Étude sur la créosote. — Naegeli : Sur l'innovation dans les Hiéracées et sa signification systématique (34 p., 1 pl.). — Recknagel : Sur le changement de volume de l'alcool par la chaleur (22 p.). — Wagner : Présence des habitations lacustres en Bavière, avec quelques remarques sur les hypothèses faites jusqu'ici sur le but et l'époque des

constructions lacustres anté-historiques (48 p.). — STEINHEIL : Appareil photographique pour les études d'histoire naturelle. — E. VOIT : Sur la diffusion des gaz. — SCHÖNBEIN : Sur l'accélération de l'oxydation de l'alcool anhydre produite par les carbures d'hydrogène et d'autres matières contenant ces gaz en abondance, et formation de bioxyde d'hydrogène d'après ce procédé. — NAEGELI : 1° Sur l'innovation dans les Hiéracées, et sa signification systématique (29 p.). 2° Sur la production et l'accroissement des racines chez les cryptogames vasculaires (30 p.).

Année 1867.

T. I. — VOGEL : Sur la manipulation de la tourbe brute (6 p., 1 pl.). — v. GORUP-BESANEZ : Pyrocatechin, produit de l'action de l'iode et du phosphore sur la créosote du thé de hêtre du Rhin. — NAEGELI : Les Piloselloïdes comme section de famille, et leurs caractères systématiques (40 p.). — v. PETTENKOFER et VOIT : Sur le dégagement d'acide carbonique et sur l'absorption d'oxygène chez l'homme (17 p.). — v. KOBELL : Sur les apparences du disthène au stauroscope, et sur la croix immobile qu'il présente. — BISCHOFF : 1° Sur l'utilité des nombres fournis jusqu'ici par les bureaux de recrutement pour juger de l'état de développement et de santé des jeunes gens d'un pays. 2° Sur deux crânes de chimpanzé mâle nouvellement envoyés de Paris. — VOGEL J^or^ : Détermination de la graisse et de l'albumine d'après le principe de l'essai optique du lait. — v. SCHLAGINTWEIT-SAKÜNLÜNSKI : Sur la température des lacs alpestres à de grandes profondeurs, d'après les observations faites aux lacs de Starnberg et de Chiem. — v. LIEBIG : Sur la maladie des vers à soie (10 p.). — GÜMBEL : Sur un essai de représentation graphique des espèces minérales cristallines au moyen de l'impression par l'échantillon même. — VOIT : Sur les relations de la créatine et de la créatinine avec l'urée dans le corps des animaux, et sur la nature de l'urémie (12 p.). — FRISCHMANN : Sur les jumeaux du chrysoberyl (6 p., 1 pl.). — VOGEL J^or^ : Observations sur la solubilité de certains silicates (9 p.). — BISCHOFF : Sur les crânes de Gorille mâle et de Chimpanzé femelle qui se trouvent en la possession du D^r^ Auzoux, à Paris, et au Musée de Bruxelles. — NAEGELI : Les Piloselliformes (29 p.). — v. SCHLAGINTWEIT-SAKÜNLÜNSKI : Les principales déterminations d'altitudes dans l'Inde, dans l'Himalaya, etc. (40 p.).

T. II. — BUCHNER : Nouvelles études chimiques sur l'eau minérale de Neumarkt, dans le Haut-Palatinat (14 p.). — BUHL : 1° Sur la formation de corpuscules purulents dans l'épithélium des vaisseaux. 2° Ostéome primaire rameux des poumons. — GÜMBEL : Nouvelles

notes sur la présence de l'acide phosphorique dans les roches stratifiées de la Bavière (11 p.). — SEIDEL : Sur la détermination de l'exactitude que l'on peut actuellement atteindre avec la balance (16 p.). — KÜHL : Remarques sur la foudre (29 p.). — v. KOBELL : Sur le Glaucodot de Hakansbö, en Suède. — VOIT : Formation des sédiments d'acide urique. — STEINHEIL : Sur le calcul des constructions optiques (13 p.). — BUCHNER : Sur la formation de sulfure d'arsenic dans les cadavres empoisonnés par l'acide arsénieux. — VOIT : Formation de la graisse dans le corps des animaux.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. NANCY. — In-8°.

1862. — GODRON : Recherches expérimentales sur l'hybridité dans le règne végétal (71 p.). De l'origine hybride du *Primula variabilis* (7 p.). — PARISOT : Recherches expérimentales sur l'absorption par le tégument externe (17 p.). — J. NICKLÈS : Faits pour servir à l'histoire de l'industrie en Lorraine (15 p.). De la recherche de l'argent au point de vue médico-légal (8 p.). Recherches du soufre et du phosphore dans la fonte et dans l'acier (7 p.). Sur une nouvelle classe de combinaisons chimiques (11 p.). Sur la maladie du vin connue sous le nom de vin tourné (5 p.). Alambic à effets multiples (11 p., 1 pl.). — DENYS : De l'emploi de l'oxyde de cuivre dans la pile et de sa préparation (8 p.). — CHAUTARD : Résumé des observations météorologiques faites en Lorraine en 1862 (14 p., 5 tabl.)

1863. — FORTHOMME : Historique de l'analyse spectrale (23 p.). — GODRON : De la végétation du Kaiserstuhl dans ses rapports avec celle des coteaux jurassiques de la Lorraine (30 p.). Une promenade botanique aux environs de Benfeld (12 p.). Notice sur un œuf de poule pourvu de sa coquille et contenu dans un autre œuf également pourvu de coquille (3 p., 1 pl.). — L. POINCARÉ : Note sur la structure des reins de la Rousse (10 p., 4 pl.). La Glycogénie chez les diabétiques (36 p., 1 pl.). — E. SIMONIN : Remarques physiologiques sur l'emploi des agents anesthésiques (6 p.). — BLONDLOT : Sur la transformation de l'arsenic en hydrure solide par l'hydrogène naissant sous l'influence des composés nitreux ou de la pression (23 p.). — J. NIKLÈS : Sur l'eau minérale de Vittel (4 p.). De la non existence du wasium comme corps simple (4 p.). La terre végétale du Rieth français (13 p.). Sur une altération des feuilles de zinc employées dans le bâtiment (3 p.). — CHAUTARD : De la recherche du camphre dans les huiles essentielles indigènes (28 p.). Résumé des observations météorologiques faites à Nancy en 1863 (9 p., 5 tabl.). — SIMONIN : Influence des phases de la lune sur le nombre

des jours de pluie et de neige (8 p.). — RENARD : Théorie du magnétisme terrestre dans l'hypothèse d'un seul fluide électrique (74 p.). — LAFON : Recherches sur le mouvement relatif d'un corps solide (46 p., 1 pl.).

1864. — GODRON : Examen ethnologique des têtes de saint Mansuy et de saint Gérard, évêques de Toul (13 p., 2 pl.). — SIMONIN : Résumé des faits relatifs à l'action de l'éther et du chloroforme (27 p.). — BLONDLOT : Purification de l'acide sulfurique (9 p.). Sur le dosage de l'antimoine dans les analyses et dans les recherches toxicologiques. — GODRON : De l'existence ancienne du castor en Lorraine. Une visite géologique et botanique au lac de Fondromeyx (Vosges). — SAUCEROTTE : Dernière maladie et ouverture du corps du roi Stanislas. — NICKLÈS : Alun à base de fer et de thallium. Solubilité des sulfates de baryte et de strontiane dans l'acide sulfurique. — GODRON : Mémoire sur des ossements humains trouvés dans une caverne des environs de Toul (16 p.). Mémoire sur les Fumariées à fleurs irrégulières et sur la cause de cette irrégularité (14 p., 1 pl.). Observations sur les races du *Datura stramonium* (10 p.). — NICKLÈS : Recherches sur le thallium (18 p., 1 pl.). Sur la raie spectrale du thallium. — CHAUTARD : Recherches sur les acides isomères avec l'acide camphorique (16 p., 1 pl.). Sur la présence de l'acide caproïque dans les fleurs du *Satyrium hircinum*. — SIMONIN père : Est-il possible de prévoir dix-neuf ans à l'avance la constitution météorologique d'une année? (16 p.) Examen des prédictions de Mathieu (de la Drôme). — CHAUTARD : Observations météorologiques pour 1864 (9 p., 3 tabl.). — NICKLÈS : L'Atlantide de Platon expliquée scientifiquement (12 p.). — GODRON : Inflorescence et fleurs des Crucifères (40 p., 1 pl.). — NICKLÈS : Sur la non-existence de l'erbium et du terbium comme corps simples. Sur l'antimoine détonant.

1865. — RENARD : Sur l'établissement des formules fondamentales de l'électro-dynamique dans l'hypothèse d'un seul fluide (42 p.). — GODRON : Sur la suppression congéniale de l'appendice caudal observée sur une famille de chiens. Sur la pélorie des Delphinium, etc. (19 p.). — NICKLÈS : Sur l'existence du perchlorure de manganèse et de ses congénères du brome et de l'iode (20 p.). Sur les combinaisons du bore avec les corps halogènes. Sur la forme cristalline du sel gemme. — GODRON : Bourgeons et inflorescences des Papilionacées (23 p.). Recherches sur les animaux sauvages qui habitaient autrefois la chaîne des Vosges (39 p., 2 pl.). — BLONDLOT : Recherches sur le phosphore noir (10 p.). — GODRON : Nouvelles expériences sur l'hybridité dans le règne végétal (43 p.). Sur les trois floraisons du *Wistaria chinensis*. — NICKLÈS : Recherches de chi-

Tome II (1863).

BATTAGLINI : Sur les formes géométriques de 2me espèce (28 p.). Sur les involutions des divers ordres dans les systèmes de 2me espèce (15 p.). — O. G. COSTA : Études sur les terrains à ichthyolithes des provinces napolitaines (2me Partie) (33 p., 4 pl.). Sur des fossiles de la Calabre et des ichthyolithes de Pietraroja (12 p., 4 pl.). — DE GASPARIS : Sur le calcul des orbites des étoiles doubles (15 p.). — GASPARRINI : Observations sur l'origine du calice monosépale et de la corolle monopétale dans certaines plantes (22 p., 2 pl.). Observations sur le chemin d'un *Micelium* fongueux dans le tronc vivant de l'*Acacia dealbata* (10 p., 1 pl.). Nouvelles observations sur quelques agents artificiels qui accélèrent la maturation de la figue (16 p.). — GUISCARDI : Études sur la famille de la Rudiste (8 p., 2 pl.). — NICOLUCCI : La race ligurienne en Italie dans les temps anciens et modernes (87 p., 7 pl.). Sur la race Iapygique, et sur les crânes appartenant à cette race, trouvés dans l'Italie méridionale (33 p., 3 pl.). — L. PALMIERI : Sur un nouvel udomètre autographique (2 p., 1 pl.). Nouvel électromètre bifilaire (6 p., 1 pl.). Sur l'ozone atmosphérique (16 p.). Sur la période diurne de l'électricité atmosphérique, et sur ses relations avec celle des courants telluriques (4 p., 2 pl.). Nouvel anémographe électro-magnétique, 4 p., 1 pl.). — SCACCHI : Recherches sur les relations entre la gémination des cristaux et sur leur accroissement (27 p.). De la polysymétrie et du polymorphisme des cristaux (2e Mém.) (63 p., 2 pl.). — TRUDI : Sur la détermination des constantes arbitraires dans les intégrales des équations linéaires, tant différentielles qu'aux différences finies (25 p.). Sur la décomposition des fonctions fractionnaires rationnelles (26 p.). Sur le développement des fonctions fractionnaires rationnelles (68 p.). Sur la partition des nombres (44 p.). Sur les développements des fonctions log. $(1-e^{-at})$ et log. $(1-\rho^{b}e^{-bt})$ (6 p.). — TUCCI : Recherches géométriques ou graphiques des maxima et minima des distances *absolues* entre des points, des lignes et des surfaces quelconques, combinés deux à deux de toutes les manières possibles (13 p., 1 pl.).

Rendiconto dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di NAPOLI. — In-4°.

1862. — BATTAGLINI : Sur quelques propriétés des lignes du second degré (9 p.). Sur les surfaces du second degré (10 p.). Note sur les déterminants (12 p.). Sur quelques questions de géométrie (11 p.). Note de géométrie (8 p.). Sur les formes géométriques

(11 p.). — FERGOLA : Résolution par les séries de quelques équations trinômes de degré quelconque (16 p.). — DE GASPARIS : Règle pour la solution du problème de Kepler. — GUISCARDI : Notices vésuviennes. — S. DE LUCA : Sur la formation de la matière grasse de l'olive. Sur la température de l'eau à l'état sphéroïdal. Sur les composés à base de protoxyde de fer, et sur le proto-iodure de fer. Action du haschisch sur l'organisme humain. — S. DE LUCA et UBALDINI : Propriétés absorbantes du sol arable. — NAPOLI : L'allotropie, l'état naissant et les actions catalytiques dans les corps (8 p.). Production de sel ammoniac dans les fumaroles du Vésuve. — L. PALMIERI : Sur l'origine de l'électricité atmosphérique (12 p.). Sur une chute de foudre. — SCACCHI : Superposition variable des cristaux de sulfate de potasse appartenant à deux systèmes. — TRUDI : Sur l'enveloppe des cordes de longueur constante dans les courbes de second ordre. Sur une transformation des formes quadratiques. Sur quelques formules de développement (9 p.). Sur la méthode du plus grand commun diviseur de deux fonctions entières d'une seule variable (8 p.).

1863. — BATTAGLINI : Sur une question de *maxima* et de *minima* (6 p.). Sur la dépendance équiharmonique (10 p.). Sur la dépendance du premier ordre (8 p.). Sur les séries de courbes d'indice quelconque. Sur la dépendance duplo-harmonique (10 p.). — BERTHELOT : Sur le blé trouvé à Pompéi. — CAPOCCI : Observations de Mars en 1862. — A. COSTA : Sur le *Phylliroe Bucephala*. Sur quelques hémiptères étrangers à l'Europe (2 art.). — FERGOLA : Sur quelques propriétés des solutions entières et positives de l'équation $(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n)$ (7 p.). — DE GASPARIS : Nouvelle équation pour obtenir une première approximation de l'orbite d'une planète. (8 p.). Sur une équation qui a lieu dans la théorie du mouvement parabolique des comètes (7 p.). — GASPARRINI : Exsudations gommeuses des feuilles, etc., en 1862 (12 p.). — F. DE LUCA : Voyage de Kane dans les régions polaires (13 p.). Inutilité des études de l'état de la mer faites sans tenir compte des causes perturbatrices. — S. DE LUCA : Sur l'acide borique de Monte-Rotondo. Acide borique de l'île de Vulcano. Transformation de la peau des serpents en sucre. Poids relatifs des os du squelette humain (10 p.). Recherches chimiques sur le pain et le grain trouvés dans les fouilles de Pompéi (8 p.). — S. DE LUCA et UBALDINI : Recherches chimiques sur le sol arable des environs de Pise. — DE MARTINI et UBALDINI : Détermination comparative de l'acide carbonique expiré dans l'état sain et dans l'état fébrile. — L. PALMIERI : Sur la prétendue électricité négative du ciel serein. Déclinaison et inclinaison magnétiques à

l'Observatoire météorologique. — TRUDI : Sur le critérium des équimultiples employé par les anciens géomètres dans la théorie des proportions.

1864. — BATTAGLINI : Sur les divisions homographiques imaginaires (11 p.). Formes binaires du premier et du deuxième degré (10 p.). Formes binaires du troisième degré (2 Mém., 22 p.). Formes binaires du quatrième degré (2 Mém., 21 p.). Formes binaires biquadratiques en involution (14 p.). Formes binaires mêlées du troisième et du quatrième degré (11 p.). — F. BRIOSCHI : Sur une nouvelle formule de calcul intégral (6 p.). — A. COSTA : Sur une deuxième espèce du genre *Carcinoxiphias*. — FERGOLA : Observations de Psyché. — DE GASPARIS : Observations de la planète Bellone, de la comète III de 1864 et de la planète Isis. — GIORDANO : Position d'équilibre d'un anneau suspendu à un fil flexible et tournant autour d'un axe vertical. Manière facile de cliver ou de tailler le spath d'Islande. — S. DE LUCA : Recherches chimiques sur la décomposition spontanée de la pyroxyline. Sur le blé provenant de divers pays (12 p.). Relations de poids entre les os du squelette d'un *Auchenia Lama*. Eau trouvée dans un puits à Pompéï. Sur des os provenant des fouilles de Pompéi. — DE MARTINI et UBALDINI : Composition de la sueur d'un goutteux. — NICOLUCCI : Crânes phéniciens trouvés en Sardaigne. — TRUDI : Sur un déterminant plus général que celui qu'on appelle le déterminant des racines d'une équation, etc. (20 p.).

1865. — ALBINI : Recherches sur le Pancréas. — BATTAGLINI : Involutions des divers ordres dans les systèmes de deuxième espèce. Sur les formes binaires des quatre premiers degrés appartenant à une forme ternaire quadratique. Sur une courbe de troisième classe et de quatrième ordre (9 p.). — A. COSTA : Sur les *Mustela Boccamela* et *vulgaris*. Espèce méditerranéenne de *Lestrigonus*. Nouvelle espèce de mollusque ptéropode du genre *Spirialis*. — O. G. COSTA : Sur le genre *Rythisodon* (13 p.). Terrain lacustre de Cassino. — FERGOLA : Erreurs constantes de l'équatorial de Merz à l'Observatoire de Naples. Orbite de la planète Clio. Éléments les plus probables de l'orbite de Clio. — DE GASPARIS : Comètes IV et V de 1864. Observations de Massalia. Observations météorologiques. Rotation d'un système variable de trois masses vérifiant la loi des aires (40 p.). Observations d'une nouvelle planète. Sur la nouvelle planète Béatrix. Sur une fonction qui présente le cas d'un minimum dans le problème des trois corps (18 p.). Détermination des orbites des planètes Clio et Béatrix (26 p.). — GUISCARDI : Niveau de la mer dans le golfe de Pozzuoli (14 p.). Sur le genre *Aturia*. — KROPOTKINE et

PALIBINE : Tremblement de terre de 1862 dans les environs du lac Baïkal (15 p.). — F. DE LUCA : Sur la navigation au pôle boréal. — S. DE LUCA : Extraction de la mannite des feuilles de l'olivier. Analyse de calculs intestinaux du cheval (13 p.). Raphael Piria. Matières cristallisées dans les feuilles des plantes. Observations sur les œufs de poule. Sur la chlorophylle cristallisée de Trécul. — S. DE LUCA et UBALDINI : Sur les fruits du myrte austral et des myrtes communs (12 p.). — DE MARTINI : Relation entre les mouvements respiratoires et les grandes oscillations de la pression du sang dans les artères. — NAPOLI : Production de l'ammoniaque et du nitre par la synthèse. — L. PALMIERI : Le Vésuve en février et mars 1865. Tempête magnétique accompagnant l'apparition des étoiles filantes. — P. PALMIERI : Sur les eaux pluviales recueillies à l'Observatoire du Vésuve. — SCACCHI : Du paratartrate ammonico-sodique (14 p.).

1866. — ALBINI : Sur le pancréas et le suc pancréatique (8 p.). Sur la respiration des grenouilles. — BATTAGLINI : Sur les formes binaires des quatre premiers degrés, appartenant à une forme ternaire quadratique. Sur les systèmes de droites du premier ordre. Sur une formule relative à l'électromètre bifilaire. Sur les systèmes de droites du second degré. Sur les moments géométriques du premier degré. Sur les formes binaires de degré quelconque. — CANNIZZARO : Sur le toluène monobromique. — A. COSTA : Sur les espèces d'Hyménoptères du genre *Megischus*. Sur une cochenille singulière de la faune italienne, etc. Observations embryologiques sur le *Salpa pinnata*. — O. G. COSTA : Cerf fossile récemment découvert près de Campagna. Terrains à ichthyolithes de l'Italie méridionale. Sur l'hippopotame fossile d'Ortona. Squelettes de la grotte ossifère de Campagna. Foraminifères fossiles de Messine. — DE GASPARIS : Observations de la comète de Tempel. Observations météorologiques. Sur la rotation d'un système de trois masses qui vérifient la loi des aires. Mouvement d'un système solide plan autour de son centre de gravité (7 p.). Pression barométrique à Naples. Essai de quelques formules pour le calcul de l'orbite de la planète Sylvia (2 art.). — GUISCARDI : Age des schistes calcaires de Castellammare. — F. DE LUCA : Essai d'application de la méthode des équations de condition à la correction des éléments géographico-statistiques d'une époque antérieure (11 p.). — S. DE LUCA : Sur les poids et mesures provenant des fouilles de Pompéi. Relations de poids entre les parties principales de la plante de la fève commune. Fonctions de certains corps dans les phénomènes de la combustion. Sur l'eau d'un puits à Naples. — S. DE LUCA et UBALDINI : Études

chimiques sur le myrte austral. Action réciproque de l'acide sulfureux et de l'hydrogène sulfuré. Étude chimique de quelques cristallins cataractés et normaux de l'homme (2 art.). Sur un calcul urinaire. Sur la crème de tartre contenue dans les feuilles de myrte austral. Sur les fruits d'une variété de figuier d'Inde. — PALLADINO : Sur les corpuscules de Pacini chez l'homme et le chat. — L. PALMIERI : Electrographe atmosphérique de Thomson. Le Vésuve, le tremblement de terre d'Isernia et l'éruption sous-marine de Santorin. Détermination de la vraie direction du vent. Méthode pour l'étude de l'électricité atmosphérique. Nouvelles modifications apportées au conducteur mobile. De l'ozone et de l'antozone. Retour de la chute d'étoiles en août 1866. — PASQUALE : Variété de *Lycopersicum esculentum*. Plantes rares du Jardin botanique de Naples. Proposition d'un nouveau genre de légumineuses. — RUBINI : Sur quelques formules relatives aux déterminants (7 p.). — SCACCHI : Combinaisons de la lithine avec les acides tartriques. Action des solutions de tartrates pour rendre hémiédrique les cristaux qui s'y développent. Cas remarquable de dimorphisme. — TRUDI : Sur les équations binômes. Théorème pour le développement des fractions rationnelles en séries.

1867. — BATTAGLINI : Sur les formes ternaires quadratiques. — A. COSTA : Deux genres de Mollusques nudibranches. — O. G. COSTA : Des Otolithes en général, et monographie de ceux qui sont propres aux poissons de la Méditerranée, etc. Terrains à ichthyolithes des provinces napolitaines. — DE GASPARIS : Chronique des phénomènes atmosphériques. Observations météorologiques. Éléments elliptiques de Sylvia. Seconde détermination de l'orbite de Sylvia. Orbite de la comète I de 1867; observations de la comète II. — S. DE LUCA : Calcul trouvé dans la vessie d'une tortue de rivière. Préparation et dessiccation de quelques composés de fer facilement oxydables. Sur l'antiquité de l'eau trouvée dans un vase de bronze à Pompéi. — S. DE LUCA et UBALDINI : Sur la matière colorante des fruits du Myrte austral. — L. PALMIERI : Pluie d'étoiles du 14 novembre 1866. Produits trouvés dans les fumaroles du cratère du Vésuve. Éclipse annulaire du 6 mars 1867. Nouvelle correspondance entre les éruptions du Vésuve et de Santorin. — PASQUALE : Sur le siége de l'odeur du *Serissa fœtida*. — PEDICINO : Sur les Diatomées d'Ischia. — DE VISIANI : Nouvelle espèce de palmier fossile. — VILLARI : Recherches expérimentales sur quelques propriétés du bois coupé parallèlement et perpendiculairement à ses fibres.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles de NEUCHATEL. — In-4°.

Tome I.

1836. — AGASSIZ : Description de quelques espèces de Cyprins du lac de Neuchâtel (16 p., 2 pl.). — A. DE MONTMOLLIN : Mémoire sur le terrain crétacé du Jura (17 p., 1 pl.). — NICOLET : Sur le calcaire lithographique des environs de la Chaux-de-Fonds. — DE MONTMOLLIN père : Variations du niveau du lac de Neuchâtel, de 1817 à 1834 (6 p., 4 pl.). — ALLAMAND : Sur les mœurs des animaux domestiques (16 p.). — DE CASTELLA : Anévrisme faux consécutif guéri par la ligature de l'artère crurale. — BOREL : Observations d'hydrophobie (13 p.). — DE MONTMOLLIN père : Mouvement de la population du pays de Neuchâtel. — COULON fils : Description d'animaux nouveaux du Musée de Neuchâtel (4 p., 6 pl.). — AGASSIZ : Fossiles du terrain crétacé du Jura neuchâtelois (20 p., 1 pl.). — OSTERWALD : Élévation du lac de Neuchâtel au-dessus de la mer. — LADAME : Mémoire sur la formation de la surface actuelle du globe (19 p.). — AGASSIZ : Prodrome d'une Monographie des Echinodermes (32 p.). — LYELL : Sur les preuves d'une élévation graduelle dans certaines parties de la Suède (35 p.).

Tome II.

1839. — NICOLET : Constitution géologique de la vallée de la Chaud-de-Fonds (26 p., 2 pl.). — GODET : Végétaux vasculaires du canton de Neuchâtel (55 p., 9 pl.). — TSCHUDI : Classification des Batraciens, y compris les espèces fossiles (100 p., 6 pl.). — AGASSIZ : Sur les moules de Mollusques vivants et fossiles, *1re partie* (Acéphales) (48 p., 12 pl.). — BONAPARTE : Tableau analytique des Selachiens. Système ichthyologique. Système des Amphibies (16 p.). — AGASSIZ : Sur quelques points de l'organisation des Euryales (14 p., 5 pl.). — A. DE MONTMOLLIN : Carte géologique du canton de Neuchâtel. — DE BOSSET : Sur la Carinaire de la Méditerranée. Présence de l'*Ophidium imberbe* dans le corps d'une Holothurie. — AGASSIZ : Notice sur le *Mya alba*.

Tome III.

1846. — LESQUEREUX : Quelques recherches sur les marais tourbeux (140 p.). Catalogue des Mousses de la Suisse (54 p.). — AGASSIZ et VOGT : Anatomie des *Salmones* (196 p., 14 pl.). — MARCOU : Sur les différentes formations des terrains jurassiques dans le Jura occidental (12 p.). — D'OSTERVALD : Tableau des hauteurs au-dessus de la mer des principaux points du canton de Neuchâtel (30 p.). — GUYOT : Notice sur la carte du fond des lacs de Neuchâtel et de Morat (10 p., 1 pl.).

Tome IV.

1859. — Desor et Gressly : Études géologiques sur le Jura neuchâtelois (153 p., 2 pl.). — Ch. Kopp : Des variations du niveau du lac de Neuchâtel pendant les années 1835 à 1856 (51 p., 5 pl.).

Annales de la Société des Lettres, Sciences et Arts des Alpes-Maritimes. Nice. — In-8°.

Tome I.

1865. — Verany : Mémoire sur le genre *Notacanthus* et description d'une espèce nouvelle de la Méditerranée. — Verany : Notice sur les Mollusques Nudibranches, et description de six nouvelles Eolides de la Méditerranée.. — Lubansky : Des bains de mer.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris. — In-8°.

Tome IV.

1867. — Alix : Comparaison des os et des muscles des Oiseaux avec ceux des Mammifères (9 p.). Sur l'appareil locomoteur de la Roussette d'Edwards (33 p.). Sur l'appareil locomoteur de l'Ornithorhynque et de l'Echidné (48 p.). — Bert : Sur la mort des poissons de mer dans l'eau douce. — A. de Caligny : Sur un nouveau système d'écluses de navigation (4 p.). Sur la vitesse de propagation des ondes circulaires. — Cazin et Hirn : Expériences sur la pression et la température de la vapeur d'eau prises dans des conditions particulières. Expériences sur la détente de la vapeur surchauffée. — Cornu : Modification de l'appareil d'Arago pour éliminer l'influence de la condensation des gaz sur les parois. De l'emploi des prismes de Nicol dans les mesures précises de polorisation. — Delesse : Sur la carte hydrologique du département de la Seine (4 p.). — Guillemin : Sur les parafoudres. Sur la décharge de la bouteille de Leyde. — Haton de la Goupillière : Sur les centres de gravité. — Janssen : Sur la présence de la vapeur d'eau dans quelques étoiles. — Laguerre : Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes (4 p.). Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère avec une surface du deuxième degré (7 p.). Sur les applications de la géométrie au calcul intégral (6 p.). — Laurent : Sur le puits artésien de la place Hébert à la Chapelle-Saint-Denis. Sur le puits artésien de Rochefort (9 p.). — A. Milne-Edwards : Sur un nouveau Rongeur. Sur la famille des Rallides. — Picard : Sur les réseaux isométriques et la déformation des surfaces de révolution (6 p.). — Regnault : Sur l'amalgame de thallium (5 p.). — Ribaucour : Sur les enveloppes de cercles. — Saint-Venant : Sur

le choc longitudinal de deux barres parfaitement élastiques, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue par la translation ultérieure (4 p.). — TRANSON : Sur les systèmes de coniques assujettis à quatre conditions. — VALLÈS : Sur les locomotives à engrenages (13 p.). — VULPIAN : Expériences sur la fonction des diverses cavités du cœur, et sur l'introduction de corps étrangers dans ces cavités (4 p.). Sur la différence des effets que produisent sur les grenouilles certaines substances toxiques, suivant qu'on les introduit sous la peau du dos ou sous la peau des membres. Sur la reproduction des membres chez l'axolatl dans le cas de polydactylie acquise. Sur l'injection de poudre de lycopode dans les artères de l'encéphale (5 p.). Sur le mode d'accroissement des épiphyses des os longs chez les mammifères. Sur les effets du venin du Crapaud Agua de Bahia. Sur les effets de l'injection d'albumine dans le système veineux des mammifères (5 p.). Sur le rétablissement des fonctions des nerfs pneumogastriques après la section de ces nerfs (5 p.). Sur l'appareil locomoteur de l'Ornithorhynque et de l'Echidné (48 p.). Sur la composition du sang qui sort des reins et du sang qui sort du foie. — GILBERT : Sur quelques propriétés relatives à la courbure des surfaces (8 p.). — L. VAILLANT : Sur le *Perichæta singulata* (3 p.). — AOUST : Sur la courbure des surfaces (5 p.). — DE CALIGNY : Sur une nouvelle turbine et sur les roues verticales à aubes courbes (2 p.). — HORVATH : Sur les valeurs approximatives et rationnelles de la forme $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}+\sqrt{X^2+Y^2}$ (6 p.).

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. In-4°.

Tome XI (1867).

Mathématiques. — BOUNIAKOWSKY : Quelques considérations sur la bipartition répétée des grandeurs (34 p.).

Astronomie. — FUSS : Recherches sur l'orbite de l'étoile double Σ (15 p.). — SAVITCH : Opposition de Neptune en 1866. — H. FRITSCHE : Observations lunaires faites à Poulkova, etc. (21 p.).

Physique du globe. — EHRENBERG : Sur la poussière apportée par les vents alizés, et sur les pluies de sang. — SCHNEIDER : Sondage des profondeurs de la mer au moyen de l'électricité (36 p., 1 pl.).

Chimie. — ZININE : De quelques dérivés de la benzine. — GUSTAVSON : Action du brome et de l'iode sur les acides phosphoriques. — BEILSTEIN : Action du brome sur le toluol. — M. FRITZSCHE : Sur les recherches concernant les hydrocarbures solides tirés du goudron de houille (12 p.). — BEILSTEIN et KREUSLER : Sur l'acide para-nitrotoluique et ses dérivés (16 p.).

Minéralogie. — KOKCHAROF : Notices minéralogiques. Sur l'orthoklas de Russie.

Géologie. — HELMERSEN : Le terrain houillier de l'Oural et son importance industrielle (52 p.). Essais de forage faits dans la presqu'île de Samara; sources de naphte et volcans de boue, etc. (37 p., 1 pl.). — GŒBEL : Aérolithes du Musée de l'Académie (60 p., 1 pl.). — ABICH : Hydrocarbures des gaz des eaux thermales du Caucase (15 p.). — GŒBEL : Revue des aérolithes tombés en Russie (28 p.). — HELMERSEN : Sur la diminution présumée de la profondeur de la mer d'Azof (30 p., 1 pl.).

Botanique. — FAMINTZIN : Action de la lumière sur la répartition de la chlorophylle dans les feuilles du *Mnium*. — RUPRECHT : Campanulées du Caucase (20 p.). — MAXIMOWICZ : Nouvelles plantes du Japon et de la Mandjourie (10 p.).

Zoologie, anatomie et physiologie. — WALTHER : Études thermophysiologiques (16 p.). Sur la production d'une chaleur mortelle dans le corps des animaux. — SCHMIDT : Expédition pour la découverte d'un mammouth (10 p.). — ED. BRANDT : Sur le ductus caroticus des lézards vivipares. — J. F. BRANDT : Sur la propagation et l'extermination de *Rhytina Stelleri*. Classification et affinités du *Didus ineptus* (15 p.).

Tome XII, n° 1 (1867).

SCHMIDT : Recherches hydrologiques. Eaux ferrugineuses de Stolypin (17 p.). — BROSSET : Documents de la Commission archéologique du Caucase (12 p.). — FAMINTZIN et BARANETZKI : Sur l'évolution des Gonidies, etc. — DANCKWERTH : Appareil d'induction électro-électrique à double effet. — MAXIMOWICZ : Nouvelles plantes du Japon et de la Mandjourie (14 p.). — O. STRUVE : Résultats de quelques observations supplémentaires faites sur des étoiles doubles artificielles (22 p.).

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of PHILADELPHIA.
(Bulletin de l'Académie des Sciences naturelles de PHILADELPHIE). — In-8°.

Année 1866.

CASSIN : Sur les *Ictéridées* (2 Mém.). — COUES : Revue critique de la famille des Procellariidées (3e, 4e et 5e part.). — LEA : Nouvelles espèces d'Unionidées de l'Amérique du Sud. — CASSIN : Fastes de l'Ornithologie. — COUES : Liste des oiseaux du Fort-Whipple, Arizona. — LINCECUM : Histoire de la petite fourmi noire errante. — LEA : Sur quelques feldspaths. — ROMINGER : Sur le *Chætetes* et quelques genres voisins. — COPE : Herpétologie de l'Amérique tropicale. — LEA : Cinq nouvelles espèces d'*Unio*. Deux nouvelles

espèces de *Lithasia*. — MEIGS : Forme des crânes des aborigènes d'Amérique. — DANIELL : Introduction du Shad américain dans la rivière Alabama. — REAKIRT : Nouvelles espèces de Lépidoptères diurnes. — MEEK et WORTHEN : Paléontologie de l'Illinois, etc. — COPE : Dinosaure gigantesque du sable vert crétacé du New-Jersey. — ALLEN : Sur les Vespertilionides de l'Amérique tropicale. — MEEHAN : Période et loi de l'accroissement annuel des arbres en circonférence. — COPE : Balénides et Delphinides. Reptiles et Batraciens de la Sonora. — LINCECUM : Sur le *Myrmica malefaciens*. — BERTHOUD : Sources chaudes du Soda Creek. Découverte d'un squelette humain et d'un pin fossile, etc. — LECONTE : Coléoptères des montagnes de Lycoming Country. *Dasytini* des États-Unis. — HORN : Nouvelles Cicindèles de la côte du Pacifique. Nouveaux genres de coléoptères de l'Amérique centrale. — MEEHAN : Consommation de force par les plantes sous l'action de la gravitation.

Annali delle Università Toscane. PISE. — In-4°.

Tome I.

1846. — MATTEUCCI : Sur les phénomènes électro-physiologiques des animaux vivants ou nouvellement tués (66 p.). — COZZI : Recherches sur les tubercules pulmonaires (14 p.). — PIRIA : Recherches chimiques sur la salicine (100 p.). — MOSSOTTI : Sur les propriétés des spectres formés par les réseaux, et analyse de la lumière qu'ils fournissent (24 p., 1 pl.). — PILLA : Étude comparative des terrains qui composent le sol de l'Italie (136 p., 1 pl.). — PARETO : Sur la constitution géologique des îles de Pianosa, Giglio, etc., (20 p., 4 pl.). — OBICI : Sections coniques (39 p., 1 pl.).

Tome II.

1851. — PIRIA : Sur quelques nouveaux produits obtenus par l'action du sulfite d'ammoniaque sur la nitro-naphthaline (26 p.). — STUDIATI : Recherches sur quelques sujets de physiologie générale (101 p.). Comparaison critique des théories de Liebig et de Blondlot sur les fonctions de la vie plastique dans les animaux (17 p.). — PACINOTTI : Mémoire sur une nouvelle opération arithmétique appelée *extraction des facteurs*, et sur le calcul des factorielles (30 p.). — FELICI : Mémoire sur les polarités galvaniques secondaires et sur l'influence de la chaleur dans la propagation des courants électriques à travers les liquides (14 p.). — MATTEUCCI : Recherches expérimentales sur le développement de l'électricité dans les combinaisons des acides avec les bases (14 p.).

Tome III.

1854. — FELICI : Sur la théorie mathématique de l'induction

électro-dynamique (1er et 2e Mém., 30-36 p.). — BERTAGNINI : Sur les combinaisons de quelques huiles essentielles avec les bisulfites alcalins (24 p.). — MENEGHINI : Nouveaux fossiles de la Toscane (22 p.). — PACINOTTI : Usage des factorielles dans la résolution des équations (22 p.). — MATTEUCCI : Mémoire sur l'état électrique d'un disque métallique tournant en présence d'un aimant (4 p., 1 pl.).

Tome IV.

1855. — FELICI : Sur la théorie mathématique de l'induction électro-dynamique, 3e Mémoire (20 p.). — MATTEUCCI : Sur l'état électrique induit dans un disque métallique tournant en présence d'un aimant (22 p.). — MOSSOTTI : Nouvelle théorie des instruments d'optique (1re partie) (125 p.).

Tome V.

1858-1861. — MOSSOTTI : Nouvelle théorie des instruments d'optique (suite et fin) (93 p.). — BARSOTTI : Sur l'équation générale algébrique de Moivre, ou équation à racines de forme analogue à la formule de Cardan, avec ses applications à la résolution des équations générales du 3e et du 4e degré, et à celles du 5e degré ou de degrés supérieurs dont les coefficients vérifient certaines conditions (34 p.). — MOSSOTTI : Note sur la *Nouvelle théorie des instruments d'optique* (8 p.). — DE LUCA : Recherches sur l'eau à l'état sphéroïdal (6 p.). — SILVESTRI : Observations ozonométriques faites à l'Université de Pise (5 p., 1 pl., 5 tableaux).

Tome VI.

1863. — FORTI : Tables des logarithmes des fonctions circulaires et hyperboliques, avec une préface de MOSSOTTI (48-180 p., 1 pl.).

Tome VII.

1862. — LOMBARDINI : Recherches sur un monstre appartenant au genre *Rhinocephalus* de I. Geoffroy-Saint-Hilaire (22 p., 1 pl.). — SAVI : Mémoire sur les dépôts de sel gemme et sur les eaux salifères du Volterrano (38 p., 2 pl.). — STUDIATI : Considérations sur la direction des études médicales (36 p.). — BETTI : Mémoire sur les fonctions algébriques d'une variable complexe (30 p.).

Tome VIII.

1866. — FELICI : Nouvelles expériences sur la vitesse de l'électricité et sur la durée de l'étincelle (14 p., 1 pl.). — MENEGHINI : Description du *Dentex Münsteri* (28 p., 1 pl.). — MOSSOTTI : Mémoire posthume sur la détermination des orbites des corps célestes au moyen de trois observations (42 p.).

Tome IX.

1867. — BETTI : Mémoire sur la théorie de la Capillarité (20 p.).

— MENEGHINI : Travaux des Vénitiens en géologie. Bibliographie de l'histoire de la géologie en Vénétie (16 p.). — DINI : Mémoire sur les séries à termes positifs (40 p.). — FELICI : Expériences pour déterminer la loi d'oscillation d'un corps élastique (8 p., 1 pl.).

Il Nuovo Cimento. PISE. — In-8°.

Tome XXV.

1867. — A. LIEBEN : Synthèse des alcools au moyen de l'éther chlorhydrique (6 p.). — ECCHER : Sur la machine électrique de *Holtz* (15 p.). — DE LUCA : Recherche sur les relations de poids qui existent entre les parties principales de la fève commune (7 p.). — SESTINI : Sur une nouvelle espèce de cire (11 p.). — DE LUCA : Recherches chimiques sur la crème de tartre contenue dans les feuilles, les fleurs et les fruits du myrte austral (5 p.). — CANTONI : Sur la chaleur produite par le passage des liquides à travers des solides poreux. — BETTI : Théorie sur la capillarité (2 articles) (38 p.). — MAGRINI : Nouvelles recherches des effets de la réaction que le diamagnétisme exerce sur la pesanteur (8 p.). — DE LUCA : Sur les fonctions de quelques corps dans le phénomène de la combustion. — BIZIO : Recherches sur le glycogène (7 p.). — DE BOSIS : La bourrasque de mer observée en 1865 à Ancône (15 p.). — CANTONI : Expériences sur la production des vibrions dans les liquides qui ont été soumis à l'ébullition (12 p.). — GAL : Action des hydracides sur les éthers (10 p.). — SCACCHI : Sur un cas remarquable de dimorphisme (5 p.). — MAGRINI : Monographie des principales trombes et des plus violentes tempêtes observées en Lombardie dans les vingt dernières années (19 p.). — GOVI : Méthode pour déterminer la longueur du pendule (10 p.). — MARCHI : Sur l'ivoire employé dans les arts (13 p.). — SCACCHI : Sur la combinaison de la lithine avec les acides tartriques (3 p.). — SCHIAPARELLI : Moyen de représenter les lois naturelles par des courbes empiriques (18 p.). — BUCHAU : Examen des tempêtes arrivées en Europe en octobre, novembre et décembre 1863 (7 p.). — SECCHI : Note sur les étoiles filantes du 14 novembre 1866 (16 p.). — DELPINO : Réflexions sur la biologie végétale, la taxonomie, et proposition d'un genre nouveau de la famille des Labiées (2 art., 98 p.). — D'ACHIARDI : Cavernes et brèches à ossements des montagnes des environs de Pise (16 p.). — VILLARI : Recherches expérimentales sur quelques propriétés physiques du bois taillé parallèlement ou perpendiculairement à ses fibres (28 p., 1 pl.). — HERZEN : Sur l'excitabilité des nerfs chez les animaux à sang chaud (7 p.).

1867. — P. Stefanelli : Sur la composition des quatre espèces d'ivoire employé dans les arts (17 p.). — Marangoni : Sur la mesure des hauteurs au-dessus du sol faites avec le baromètre, dans leur rapport avec la direction et la vitesse du vent. Observations faites à Anvers par C. Montigny (6 p.). — Bizio : Notice historique sur la purification de l'eau douce par la congélation (4 p.). — D'Achiardi : Exploration d'une grotte sur le mont Montana (4 p.). — S. de Luca : Recherches chimiques sur un calcul trouvé dans la vessie urinaire d'une tortue fluviatile (3 p.). — Scacchi : Sur la polysymétrie et le polymorphisme des cristaux (74 p., 2 p.). — Siemens : Sur la transformation du travail mécanique en courant électrique sans faire usage d'un aimant permanent (4 p.). — Marchi : Sur l'Epithelium vibratile (5 p.). — Schiaparelli : Sur les procédés pour représenter les lois naturelles au moyen de courbes empiriques (35 p.). — Knoblauch : Sur le passage des rayons calorifiques à travers des lames diathermanes et transparentes (5 p.). — Marchi : Sur l'organe sécréteur du mucus chez les Mollusques gastéropodes (3 p.). — Gianni : Méthode simple pour déterminer la direction du vent à de grandes hauteurs (1 p.). — Scacchi : Du Paratartrate d'ammoniaque et de soude (16 p.). — Cantoni : Sur l'isolement des machines à frottoirs (9 p.). — Matteucci : Sur les courants électriques terrestres (30 p.) — S. de Luca et Panceri : Recherches sur la salive et les organes salivaires du *Dolium galea* (6 p.). — Cantoni : Sur le refroidissement des gaz par raréfaction (5 p.). — Guiscardi : Le *Piperno* (7 p.). — De Gasparis : Mouvement extraordinaire du barométrographe de l'Observatoire royal de Naples les 1er et 2 août 1867 (3 p.). — Marchi : Analyse des feuilles du murier au point de vue de la maladie des vers à soie (8 p.). — Felici : Expériences pour déterminer la loi des oscillations d'un corps élastique (11 p.). — De Bezold : Vision binoculaire (7 p.). — Onimus : Influence du courant électrique, interrompu ou continu, sur les fibres musculaires des vaisseaux et sur la nutrition. — Cantoni : Sur la production des infusoires dans les liquides soumis à l'ébullition (19 p.). —Pisati : Baromètre à deux liquides (10 p.). — Plateau : Transformation spontanée d'un cylindre liquide en sphères isolées. — Fasce : Perte de volume des muscles dans la contraction (7 p.). — Regnoli : Recherches paléontologiques dans les Alpes Apuanes (35 p.). — Fasce et Amato : Atrophie des os par la paralysie (17 p.). — Schiaparelli : Sur le cours et l'origine probable des étoiles météoriques. — Rossetti : Usage des couples thermo-électriques dans la

mesure des températures (24 p.). — S. DE LUCA et PANCERI : Recherches sur la salive et sur les organes salivaires du *Dolium galea* et d'autres mollusques.

Abhandlungen der Königlichen böhmischen Gesellschaft (Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême, à PRAGUE). — In-4°.

Tome X.

1859. — BÖHM : Latitude géographique de Prague (29 p.). — ZEUSCHNER : Recherches paléontologiques sur le calcaire jurassique blanc d'Inwald, près Wadowice (49 p., 4 pl.). — SKUHERSKY : Méthode des projections orthogonales sur deux plans non rectangulaires entre eux (20 p., 2 pl.) — J. v. HASNER : Sur la vision binoculaire (10 p., 2 pl.). — FEISTMANTEL : Porphyres des terrains siluriens de la Bohême moyenne (40 p., 2 pl.).

Tome XI.

1861. — KULIK : Résolution des équations de degrés supérieurs, et en particulier des équations cubiques (102 p.). — V. PIERRE : Baromètre métallique de Bourdon (20 p., 1 pl.). — FEISTMANTEL : Formations houillères des environs de Radniz (Bohême) (23 p.). — BÖHM : Expériences et études balistiques concernant spécialement les armes à longue portée de l'armée autrichienne et la carabine Minié (93 p., 3 pl.). — POPPER : Sur la méthode de *Weddle* pour la résolution des équations numériques (18 p.).

Tome XII.

1863. — SIMERKY : Recherches d'analyse indéterminée (65 p.). — MACHOWELZ : Résolutions des équations du 2e, du 3e et du 4e degré (23 p., 1 pl.).

Tome XIII.

1864. — PALACKY : Études de géographie botanique (67 p.). — FEISTMANTEL : Observations sur la production de formes sphéroïdales dans le règne minéral (11 p., 1 pl.). — DASTICH : Sur les nouvelles recherches physiologico-psychologiques relatives aux sens humains (65 p.).

Tome XIV.

1866. — BÖHM : Description de l'antique horloge de la salle du Conseil de Prague (46 p., 7 pl.).

Verhandlungen der Vereins für Naturkunde zu PRESBURG. (Mémoires de la Société d'Histoire Naturelle de PRESBOURG). — In-8°.

Tome IV.

1859. — ROTHE : Examen de la source acide d'Oberschützen. — HACKER : Appareil à rafraîchir le lait. — KOLACZEK : Notices de

physiologie botanique. — v. Bolla : Sur les coléoptères de la faune de Presbourg (22 p.). — Nagy : Oiseaux du district d'Unter-Neitra. — Schneller : Addition à la liste des plantes vasculaires de Futak, près Peterwardein. — Hazslinszki : Sur le grés des Karpathes.

Tome V.

1860-61. — Hazslinszky : Les kryoblastes de la flore d'Eperies (2e Mém.). — Roxer : Sur le comté de Marmarosch, au point de vue de la statistique et de l'histoire naturelle. — Thieriot : Sur l'histoire naturelle du Castor. — v. Bolla : Lichens, algues et mousses de la flore de Presbourg (15 p.). — Kornhuber : Poissons de la province de Waag. — Ebenhöch : Plantes phanérogames de Koronczó (24 p.). — Kornhuber : Mesures barométriques en Hongrie (16 p.). — Láng : Eaux minérales de Bajmócz et de Belitz, comté de Neitra. — Helm : Source périodique de Kapsdorf. — Krzisch : Observations faites en 1859 dans les monts Tâtra, etc. — Kornhuber : Altitude de Presbourg. — Mélanges.

Tome VI.

1862. — Böckh : Sur l'apparition périodique des araignées, etc. — Rothe : Altitudes des environs d'Oberschützen. — Mack : Emploi de la plante du maïs comme plante textile et pour la fabrication du papier. — Kornhuber : Sur un fossile ailé du calcaire lithographique de Solenhofen. — Balogh : Sur l'introduction des corps solides dans le tissu des villosités intestinales.

Tome VII.

1863. — Sefranka : Monographie des Bains de Korytnica et de Lucsky (75 p.). — Holuby : Notices botaniques sur Skalitz. — Ebenhöch : Oiseaux de la molasse de Koronczó. — Richter : Sur la flore de Presbourg.

Tome VIII.

1864-65. — Holuby : Fougères de Ns. Podhragy. — Rothe : Les points les plus élevés de la Tetra (13 p.). — Hazslinszky : Sur les mousses de la Hongrie septentrionale (14 p.). — Mednyánszky : Sur le curare (12 p.). — Ebenhöch : Sur la flore de Koronczó. — Jukovits : Oiseaux du lac de Neusiedel. — Kornhuber : Sur la présence du *Proteus anguineus*. — Károlyi : Sur les vins du comté de Presbourg (11 p.). — Bernath : Sur le calcaire de Csiklova. — Gerley : Le crétinisme dans l'île de Schütt (25 p., 1 carte).

Tome IX.

1866. — Rothe : Sur la météorologie de Presbourg (31 p.). — Schiller : Géographie botanique de Neutra. — Holuby : Flore phanérogame de Nemes-Podhragy (66 p.). — Kornhuber : Mousses de la flore de Presbourg (11 p.).

Société des Amis des Sciences naturelles de ROUEN. — In-8°.

1re année, **1865**. — NOURY : Catalogue complet des oiseaux de la Normandie (22 p.). — BLANCHE : Note sur le *Pelias Berus*. — LIEURY : Synopsis des reptiles de la Seine-Inférieure (19 p.). — LEBOUTEILLER : Coléoptères nouvellement découverts dans la Seine-Inférieure. — DUCOUDRÉ : Habitat des *Nacerdes Melanura*. Ver à soie de l'Ailante. Teigne syringelle. — PENNETIER : Sur la Testacelle. Les Trichines et la Trichinose (24 p., 1 pl.). Fécondation du *Michauxia campanuloïdes*. — CAFFIN : Excursions géologiques aux environs d'Evreux (37 p., 1 carte). — BUCAILLE : Étage cénomanien à Saint-Didier-des-Bois. Variété du *Scaphites obliquus* (2 p., 1 pl.). Fossiles de l'étage cénomanien de Rouen. — MALBRANCHE : Sur le Darwinisme (15 p.).

2e année, **1866**. — MALBRANCHE : Sur le Darwinisme (26 p.). — EUDELINNE : De l'espèce et de sa fixité (54 p.). — LEMETTEIL : Catalogue raisonné des oiseaux de la Seine-Inférieure (119 p.). — MOCQUERYS : Nécessité de préserver les taupes. Entomologie appliquée au commerce des laines. — DUCOUDRÉ : Sur le hannetonnage (15 p.). — BLANCHE : Sur le *Carduus pycnocephalus*. — MALBRANCHE : Sur deux Primevères monstrueuses (2 p., 1 pl.). Lichens de la Normandie (35 p., 1 pl.). — BELLENCONTRE : Froment provenant d'un tombeau d'Égypte. — BOUTEILLER : Richesse en gluten de diverses farines. — DUVEAU : Sur les mines de Sardaigne. — BUCAILLE : Excursion à Elbeuf en 1866 (géologie). — HARLÉ : Excursion aux environs d'Evreux. Note sur la géologie de la Seine-Inférieure. — CAFFIN : Excursion géologique aux environs d'Evreux. Echinides des environs d'Evreux (94 p., 2 pl.). — BONNIN : Étude sur les pertes de l'Iton (13 p.).

Atti della R. Accademia delle Scienze di TORINO.

Tome I.

1865-1866. — DE FILIPPI : Note sur la classification des animaux (24 p.). — GIGLIOLI : Sur le soi-disant système nerveux colonial des *Bryozoaires*. — MOLESCHOTT : Sur l'embryologie du poulet. — DE SAINT-ROBERT : Sur la formule barométrique et la réfraction atmosphérique. Sur le *Saxifraga florulenta* (Moretit).— GOVI : Recherches d'électrostatique. — GASTALDI : Mémoire de *Ramorino* sur les cavernes de la Ligurie, et principalement sur une caverne découverte récemment à Verezzi. — DE SAINT-ROBERT : Note sur le travail mécanique dépensé dans la compression, et sur le

travail restitué par la détente d'un gaz. — Vogt : Sur quelques crânes humains trouvés en Italie. — Faà de Bruno : Nouvel appareil barométrique. — Moleschott : Sur la forme de l'arrêt du cœur par suite de la surexcitation du nerf pneumo-gastrique. — De Filippi : Observations faites dans la traversée de Gibraltar à Rio-Janeiro. — Richelmy : Sur le nouvel appareil barométrique de Faà de Bruno. — Strüver : Minéraux des granits de Baveno et de Montorfano. — De Saint-Robert : Résultats d'expériences faites à diverses hauteurs, touchant la durée de combustion de la matière de la poudre. — Moriggia : Description d'une excroissance cornée développée sur la main d'une femme. — Gastaldi : Sur l'existence du serpentin dans les collines du Monferrat. — Govi : Méthode pour déterminer la longueur du pendule. — Cavalli : Sur la rupture des grosses pièces de canon. — Sobrero : Sur l'hydraulicité de la Giobertite. — Gastaldi : Ossements d'ours trouvés dans une caverne du Piémont. — Richelmy : Recherches théoriques et expérimentales sur l'écoulement des liquides par les ajutages divergents. Sur le débit moyen du Pô. — Govi : Instrument calculateur des intervalles de l'échelle musicale. — De Filippi : Observatons faites dans la traversée de Rio-Janeiro à Batavia. — Ghiringhello : Sur la transformation de l'espèce (Suite de plusieurs Mémoires).

Tome II.

1866-1867. — Sismonda : Sur les roches anthracitifères des Alpes. — De Cigalla : Découverte faite dans les fouilles de l'île de Thérasia. — Moleschott : Rapport sur des Mémoires d'embryologie. — De Saint-Robert : Table hypsométrique pour déterminer rapidement la différence de niveau de deux stations, etc. — Richelmy : Sur l'odontographe de *Willis*. — Sobrero : Sur l'hydraulicité de la Giobertite. Sur la porcelaine magnésiaque de Vinovo. — Govi : Sur les anomalies que présente le caoutchouc vulcanisé, sous le rapport de la chaleur. — Mallet : Sur l'oxygène, et sur un nouveau procédé de préparation de ce gaz.

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia. — In-8°.

Tome XII, 3e Série, 5e fascicule.

1866-67. — Fr. Cortese : La campagne de l'armée italienne en 1866, au point de vue de l'état sanitaire de l'armée (75 p.). — R. de Visiani : Sur le *Cheilantes Szovitsii* (10 p., 2 pl.).

Bordeaux. G. Gounouilhou, imprimeur de la Société, rue Guiraude, 11.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DES

QUANTITÉS COMPLEXES

PAR J. HOÜEL

PREMIÈRE PARTIE.

Algèbre des quantités complexes.

CHAPITRE Ier

INTRODUCTION

§ Ier

Considérations générales.

1. Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants, en abordant l'étude de l'algèbre, c'est l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable, sans doute, mais qui laissent subsister dans les mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent ne correspondre à rien de réel. Les raisonnements généralement employés reviennent à établir qu'il y a compensation entre deux absurdités, savoir : entre la considération de quantités dont l'existence implique contradiction, et entre l'application à ces quantités d'opérations qui n'ont de sens que pour les quantités réelles.

2. On aura donc obtenu un avantage important, si l'on parvient à démontrer les mêmes règles avec la même rigueur, sans intro-

duire dans les raisonnements autre chose que des quantités réelles et mesurables, sur lesquelles on exécutera des opérations nettement définies, mais plus générales que les opérations simples de l'arithmétique. De cette manière, au lieu d'arriver au résultat par une route certaine, mais obscure, dans laquelle un esprit timide peut craindre à chaque instant de s'égarer, on passera par une suite de déductions claires, et l'on pourra suivre des yeux toutes les phases du calcul.

3. On atteint ce but, en introduisant dans l'algèbre de nouveaux signes d'opérations fondés sur des considérations géométriques, qui offrent un champ plus étendu et des ressources plus variées que les considérations arithmétiques que l'on prend généralement pour point de départ.

Toute valeur numérique peut être représentée par le rapport de deux grandeurs géométriques, lignes, angles, aires, volumes, etc., ou simplement par une seule grandeur, si l'unité de son espèce est donnée.

Une figure de géométrie peut être considérée comme la représentation d'autant de nombres qu'elle renferme de grandeurs mesurables. Ainsi, un triangle représente trois nombres par ses trois côtés, trois nombres par ses trois angles, un nombre par son aire, etc.

Toute construction géométrique correspond à diverses combinaisons d'opérations arithmétiques entre les nombres représentés par les divers éléments de la construction. Ainsi, une force étant déterminée, dans un plan donné, par deux éléments, une longueur et un angle, la composition de deux forces, qui revient à la construction d'un parallélogramme ou d'un triangle, correspondra à toutes les opérations arithmétiques nécessaires pour déterminer les éléments de ce parallélogramme ou de ce triangle au moyen des deux longueurs et des deux angles donnés. Cet ensemble d'opérations sera désigné, d'une manière aussi claire qu'abrégée, en l'appelant *construction d'un parallélogramme.*

4. L'algèbre s'occupe uniquement de la combinaison des opérations, sans s'inquiéter de leur signification ni de leur nature. Elle donne les moyens de remplacer une combinaison d'opérations par

une autre combinaison équivalente; mais elle ne traite nullement de la manière d'effectuer ces opérations. Elle part d'un petit nombre de principes tirés des propriétés communes que présente chaque opération dans les divers cas particuliers pour lesquels elle a été définie. Tels sont les principes suivants :

Une somme ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties (principe de l'*addition*).

La *soustraction* est l'opération inverse de l'addition.

Un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses facteurs (principe de la *multiplication*).

Etc.

C'est en partant de ces principes que l'on établit les règles pour la transformation des opérations les unes dans les autres.

Rien n'empêche donc de donner des opérations fondamentales relatives à telle ou telle espèce de quantités telles définitions que l'on voudra, pourvu que ces définitions s'accordent avec les principes en question. Les règles du calcul algébrique s'appliqueront toujours aux opérations ainsi définies tant que ces conditions seront remplies.

Par exemple, rien n'empêchera d'appeler *addition* la composition de deux forces, et de dire que la résultante est égale à la *somme* des composantes; car la somme, ainsi définie, jouit de la propriété de ne pas changer lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties.

Naturellement les définitions des opérations ne doivent pas être choisies au hasard. On commence par prendre les définitions les plus simples; puis on les modifie en les généralisant, à mesure que les définitions primitives deviennent insuffisantes. Mais on a soin que chaque nouvelle généralisation renferme toujours les cas particuliers précédents.

5. Tant que l'on s'en tient aux définitions primitives, les règles de calcul ne peuvent embrasser à la fois tous les cas différents d'une même question; et si les calculs ont été établis spécialement pour un de ces cas, ils conduiront, pour les autres cas, à des impossibilités. On cherchera alors à généraliser à la fois l'idée de quantité et les définitions des opérations, de manière que l'impossibilité soit écartée, et qu'une même formule puisse embrasser la solution de tous les cas.

Remarquons, en passant, que l'impossibilité d'un problème n'est pas toujours accusée par la nature même des symboles que le calcul donne pour solution. Elle peut provenir de ce que le résultat ne remplit pas certaines conditions que l'on n'a pas pu exprimer par les équations du problème. Le problème est impossible, par exemple, lorsque sa nature exige que la solution soit un nombre entier, et que le calcul donne un résultat fractionnaire. Tel serait le cas où l'on demanderait combien il faudrait donner de dents à une roue engrenant avec une autre roue armée de 50 dents, pour qu'elle fît 3 fois plus de tours que celle-ci dans le même temps.

Il faut distinguer, en outre, entre l'impossibilité absolue d'un problème, et l'impossibilité de tel ou tel cas de ce problème, lorsqu'il en peut présenter plusieurs. C'est dans ce dernier cas seulement que l'on peut faire disparaître l'impossibilité par la généralisation des opérations.

6. Cette généralisation s'obtient en remplaçant les définitions arithmétiques des quantités et des opérations par des définitions géométriques. C'est ce que l'on a fait, depuis Descartes, pour les quantités négatives. Mais c'est plus tard seulement que l'on a cherché à représenter géométriquement les quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Leur théorie purement algébrique n'a guère été fixée que depuis un siècle, après les travaux de d'Alembert et d'Euler, et c'est plus récemment encore que Cauchy y a mis la dernière main.

§ II.

Sur l'histoire de la théorie géométrique des imaginaires.

7. Le premier essai de représentation géométrique des quantités imaginaires est dû au géomètre prussien Heinrich Kühn, né à Kœnigsberg en 1690, mort à Danzig en 1769.

Kühn a publié, en 1750, dans le tome III des *Novi Commentarii* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, dont il était membre, un Mémoire de 54 pages in-4°, intitulé : *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*.

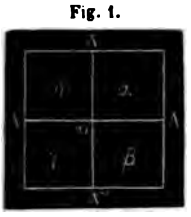
Ce travail, que Montucla traite peut-être avec trop de dédain,

ne contient pas, il est vrai, la solution de la difficulté, que l'auteur avait aperçue; mais il a, du moins, le mérite d'avoir mis sur la voie, et il restait bien peu de chose à ajouter pour obtenir la représentation des imaginaires telle qu'on la conçoit aujourd'hui.

8. Voici sur quelles bases reposent les considérations longuement développées par Kühn.

Étant donnés deux axes rectangulaires, portons, à partir de leur intersection mutuelle, et de part et d'autre de cette intersection, sur l'un d'eux, des longueurs égales à a, et sur l'autre, des longueurs égales à b. En donnant des signes à ces longueurs, d'après la convention établie par Descartes, les segments pris sur le premier axe seront $+a$ et $-a$; les segments pris sur le second axe seront $+b$ et $-b$. Construisons les quatre rectangles qui ont ces segments pour côtés, et donnons aux aires de ces rectangles les signes qui résultent de la multiplication de leurs dimensions en grandeur et en signe. Les aires de ces quatre rectangles seront alors

Fig. 1.



$$\begin{aligned}
\alpha &= (+a) \times (+b) = +ab, \\
\beta &= (+a) \times (-b) = -ba, \\
\gamma &= (-a) \times (-b) = +ba, \\
\delta &= (-a) \times (+b) = -ab.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $b = a$, et désignons par le signe $\sqrt{\ }$ le côté de chacun des carrés résultants. On aura, d'après Kühn,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha} &= \sqrt{(+a) \times (+a)} = +a, \\
\sqrt{\beta} &= \sqrt{(+a) \times (-a)} = +\sqrt{-a^2}, \\
\sqrt{\gamma} &= \sqrt{(-a) \times (-a)} = -a, \\
\sqrt{\delta} &= \sqrt{(-a) \times (+a)} = -\sqrt{-a^2}.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'il serait plus naturel, selon nos idées actuelles, de poser, comme nous le verrons plus tard,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\beta} &= -\sqrt{-a^2}, \\
\sqrt{\delta} &= +\sqrt{-a^2}.
\end{aligned}$$

9. L'imaginaire $\pm\sqrt{-a^2}$, qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation

$$x^2 + a^2 = 0,$$

est définie par Kühn comme le *côté de l'un des carrés négatifs* β ou δ. Mais l'auteur n'indique pas lequel des côtés du carré il faut prendre pour représenter l'imaginaire, et faute d'avoir fait entrer dans cette représentation la notion de direction, il lui devient impossible de définir ce qu'il faut entendre par la *somme* d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire, telle qu'on la rencontre dans la solution de l'équation complète du second degré

$$(x - g)^2 + h^2 = 0.$$

Il dit bien que cette équation est vérifiée en prenant pour $x - g$ le côté d'un carré négatif; mais il n'indique nullement quel sens il faut attacher à la racine elle-même

$$x = g \pm \sqrt{-h^2}.$$

C'est donc à tort, selon nous, que l'on fait souvent remonter à Kühn l'idée de la représentation des imaginaires au moyen d'une direction perpendiculaire à celle qui correspond aux quantités réelles. On voit, au contraire, qu'il considère les longueurs comptées sur l'axe vertical comme des quantités réelles, positives ou négatives, aussi bien que les quantités comptées sur l'axe horizontal. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il a posé le problème sans le résoudre, et que la lecture de son Mémoire aurait pu mettre ses successeurs sur la voie de la solution.

10. Pendant le demi-siècle qui suivit la publication du travail de Kühn, la question fut à peu près abandonnée. Nous lisons seulement, dans une Note de Cauchy [1], la mention suivante, à propos des travaux dont nous parlerons tout à l'heure :

« Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à » ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent, et dès » l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, » qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a

[1] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 157.

» communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, cons-
» tructeur de vaisseaux au Havre. »

11. Le premier Mémoire publié sur ce sujet, depuis la tentative de Kühn, est celui de l'abbé Buée, inséré dans les *Philosophical Transactions* pour l'année 1806, et intitulé : *Mémoire sur les quantités imaginaires* (56 pages) (1).

Dans ce travail, Buée formule nettement, pour la première fois, la représentation des lignes imaginaires par des longueurs perpendiculaires à la direction des lignes réelles.

Il parvient à ce résultat par deux raisonnements différents.

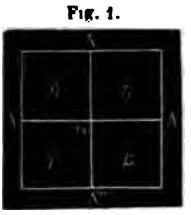
Le premier repose sur la construction d'une moyenne proportionnelle. La perpendiculaire AB, élevée sur le milieu du diamètre d'un demi-cercle de rayon $= 1$, est une moyenne proportionnelle entre les deux moitiés, $AC = +1$, $AD = -1$, du diamètre. Elle a donc pour valeur

Fig. 2.

$$\sqrt{(+1)\times(-1)} = \sqrt{-1}.$$

L'autre raisonnement n'est autre chose que celui de Kühn, complété. Buée considère, comme Kühn, les quatre carrés α, δ, γ, β, de côté $= 1$, formés autour d'un point O, et dont les surfaces sont ± 1. Le carré α, dans les quatre positions qu'il occupe successivement, en tournant chaque fois d'un quart de révolution autour du point O, prend respectivement les quatre valeurs

Fig. 1.



$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1.$$

On peut considérer ces quatre valeurs comme les carrés des quantités

$$+1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1},$$

qui seraient représentées par le côté OA dans ses quatre positions

$$OA, \quad OA', \quad OA'', \quad OA'''.$$

---

(1) Cette analyse est empruntée à l'ouvrage du professeur Matzka : *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w.* Prague, 1850.

Si juste cependant que soit la solution donnée par Buée, on ne peut nier qu'elle ne repose sur des arguments plus métaphysiques que mathématiques, et sur une extension mal justifiée des règles du calcul algébrique. Aussi son travail n'a-t-il pas attiré l'attention qu'il aurait méritée, malgré quelques erreurs qui le déparent.

12. Dans la même année 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Cet ouvrage, sans nom d'auteur, n'a pas été mis dans le commerce. Nous le connaissons par un extrait qu'en a donné l'auteur dans les *Annales de* Gergonne (t. IV, 1813), et par une note de Cauchy [1].

Argand établit d'abord, en suivant la première méthode de Buée, la représentation de $\sqrt{-1}$ par une longueur portée dans une direction perpendiculaire à celle des lignes réelles.

Il généralise ensuite cette conception, en introduisant la représentation, par un symbole unique, d'une ligne considérée à la fois en grandeur et en direction.

Il définit, comme nous le ferons plus tard, les opérations de multiplication et d'addition effectuées sur les lignes *dirigées;* il en tire la décomposition de ces lignes suivant deux axes rectangulaires, laquelle correspond, en analyse, à la séparation du réel et de l'imaginaire.

Il établit ainsi la formule

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q},$$

qui n'est autre chose que le théorème de Moivre, et il en déduit toutes les formules de la trigonométrie.

Argand termine son Mémoire en exposant géométriquement la démonstration donnée par Legendre de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques : *Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine représentée par une ligne* dirigée, *c'est-à-dire une racine réductible à la forme* $a + b\sqrt{-1}$.

Dans une Note publiée plus tard dans le même volume des

[1] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 179.

A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828 (154 pages grand in-8°). Cette brochure a été suivie de deux articles moins étendus, insérés dans le *Philosophical Transactions* pour l'année 1829 (1).

Le travail de Warren est plus complet et plus étendu que l'opuscule de Mourey. La discussion des racines de l'unité y est faite avec soin. L'auteur termine par une démonstration des principales formules de la trigonométrie, et par diverses applications au calcul intégral et à la mécanique. On peut lui reprocher seulement, quoique à un moindre degré peut-être qu'à Mourey, l'introduction de notations compliquées et incommodes.

16. Les deux ouvrages que nous venons de citer renferment complètement la théorie élémentaire de la représentation géométrique des imaginaires, ou, si l'on veut, de la représentation par un symbole imaginaire d'une droite quelconque tracée dans un plan.

Cette théorie a été reprise et coordonnée par Cauchy, dans le tome IV de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (pages 157-355), et l'on peut dire maintenant qu'elle a reçu sa forme définitive.

17. Il n'entre pas dans notre plan de traiter des applications à la géométrie pure et à la mécanique qu'a reçues la théorie dont nous nous occupons. Nous nous contenterons de mentionner les travaux de Scheffler (2) sur l'usage des imaginaires en géométrie analytique, et le Mémoire de Siebeck (3) sur les transformations géométriques déduites de la théorie des imaginaires.

Nous ne pouvons non plus nous occuper du travail considérable publié par M. Maximilien Marie sur les fonctions de variables imaginaires (4), ce travail étant fondé sur un système de représentations des imaginaires essentiellement différent de celui qu'ont adopté Cauchy et Riemann.

---

(1) Matzka : *Versuch einer richtiger Lehre u. s. w.*

(2) *Der Situationskalkul* Brunswick, 1851, 1 vol. in-8°.

(3) *Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen.* (*Journal de Crelle*, t. LV, p. 221-253, 1858.)

(4) *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* (*Journal de Liouville*, 1858-1862.)

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS ARITHMÉTIQUES ET ALGÉBRIQUES, OU QUANTITÉS RÉELLES.

§ I^er^.

18. Dans toute question où les données sont exprimables en nombres, la solution se ramène, en définitive, à des opérations d'arithmétique.

La détermination de ces opérations et leur transformation en d'autres opérations équivalentes constituent le but de l'algèbre, ou plutôt un cas particulier du problème plus général qu'embrasse cette science.

L'algèbre, en effet, s'occupe uniquement de la combinaison d'opérations dont les opérations d'arithmétique forment un cas très restreint, et auxquelles on a donné les mêmes noms qu'aux opérations d'arithmétique, parce qu'elles jouissent des propriétés sur lesquelles les combinaisons des opérations d'arithmétique sont fondées.

Par exemple, le résultat d'une addition arithmétique ne change pas lorsqu'on intervertit d'une manière quelconque l'ordre des parties. C'est sur cette propriété que sont fondées les transformations que l'on peut faire subir aux combinaisons d'additions entre elles, ou aux combinaisons de l'addition avec son opération inverse, la soustraction. De là les différentes manières de calculer la valeur d'un polynôme, etc.

Si nous donnons maintenant le nom d'*addition* à une opération quelconque jouissant de la même propriété fondamentale, et le nom de *soustraction* à l'opération inverse, il est clair que tous les résultats obtenus relativement aux transformations de l'addition et de la soustraction en arithmétique subsisteront encore quand il s'agira des mêmes opérations généralisées.

De même, toutes les propriétés de la multiplication, de l'élévation aux puissances et des opérations inverses, la division et l'extraction des racines, découlent du principe général que, dans un produit, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.

Si nous appelons *multiplication* une opération quelconque jouissant de la même propriété relativement à l'interversion des facteurs, et si nous en déduisons, comme en arithmétique, les définitions généralisées de l'élévation aux puissances, de la division et de l'extraction des racines, toutes les règles de l'arithmétique déduites du principe fondamental subsisteront pour les opérations généralisées, quelle que soit la nature de ces opérations, et quels que soient les moyens à employer pour les effectuer.

19. Il ne faut donc pas se représenter l'algèbre comme opérant uniquement sur des quantités numériques, et ne pouvant traiter les grandeurs concrètes sans passer par l'intermédiaire des nombres. Une formule algébrique peut indiquer immédiatement une construction géométrique ou un mouvement mécanique, sans qu'il soit nécessaire en aucune façon de songer à l'évaluation numérique des données du problème.

Ainsi, si l'on définit la multiplication géométrique comme la construction d'un rectangle, l'équation

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

exprime l'équivalence entre une certaine aire et la somme de plusieurs autres, abstraction faite de toute évaluation numérique de ces aires.

20. Après ces remarques sur l'indépendance qui existe entre les règles données par l'algèbre pour la transformation des opérations et la nature même de ces opérations, occupons-nous des divers systèmes de signes que l'algèbre peut employer dans ses formules pour indiquer ces transformations.

On connaît l'emploi des signes de l'arithmétique $+$, $-$, $\times$, ..., pour représenter les transformations algébriques de même nom que les opérations arithmétiques correspondantes.

Mais il est souvent plus avantageux de prendre pour images de ces transformations, non plus des opérations arithmétiques, mais des constructions géométriques, dont la variété beaucoup plus grande permet d'indiquer plus brièvement des combinaisons compliquées, et d'embrasser sous un même énoncé des cas plus généraux, en même temps que ces constructions aident l'intelligence en parlant aux yeux.

Maintenant, lorsqu'on a reconnu qu'une construction géométrique jouit des mêmes propriétés fondamentales qu'une certaine opération d'arithmétique, rien n'empêchera de lui donner le nom de cette opération, et de la soumettre comme elle aux transformations de l'algèbre.

21. Pour en donner un exemple, considérons la règle du parallélogramme des forces. En représentant chaque force par une ligne parallèle à sa direction et de longueur proportionnelle à son intensité, la détermination de la grandeur et de la direction de la résultante de deux forces dépendra des opérations indiquées par la trigonométrie pour la résolution d'un triangle dont on connaît deux côtés avec l'angle qu'ils comprennent. On voit, de plus, aisément que la résultante de deux ou de plusieurs forces ne dépend en aucune manière de l'ordre dans lequel on compose ces forces. Donc l'opération de la composition des forces jouit de la propriété fondamentale de l'addition, de ne pas dépendre, quant au résultat, de l'ordre dans lequel on range les quantités à composer. Rien donc n'empêche de nommer *addition* de deux ou de plusieurs forces, *en grandeur et en direction*, la combinaison d'opérations d'arithmétique ou de constructions géométriques qui sert à la détermination de la résultante au moyen de ses composantes. Dès lors, tous les calculs algébriques relatifs à l'addition et à son opération inverse, la soustraction, s'appliqueront, sans aucun changement, à la composition des forces, et les seuls signes + ou — suffiront pour indiquer tout l'ensemble des opérations d'arithmétique qu'exige la résolution d'un triangle.

Nous allons voir maintenant comment se sont faites les extensions successives des définitions des quantités et des opérations.

§ II.

Des quantités et des opérations arithmétiques.

22. On peut représenter tous les nombres, et plus généralement tous les rapports, commensurables ou non, des grandeurs à leurs unités respectives, par des longueurs portées sur une droite OX, à partir d'un point fixe O, pris pour *origine*, et dans une direction constante de O vers X. Celle des extrémités d'une longueur qui est

la plus voisine du point O, est dite le *commencement* ou l'extrémité *initiale;* l'autre est dite la *fin* ou l'extrémité *finale.*

En adoptant ce mode de représentation, les diverses opérations relatives soit aux nombres, soit aux quantités concrètes, se ramèneront à des constructions géométriques que l'on pourra généralement effectuer, ou du moins dont on concevra toujours la possibilité.

Nous admettrons qu'une grandeur puisse toujours être transportée, sans changer de valeur, soit le long de l'axe OX, soit sur une parallèle à cet axe.

23. Cela posé, pour faire l'*addition* de deux longueurs, on les portera sur la même direction, en faisant coïncider le *commencement* de l'une avec la *fin* de l'autre. La *somme* sera la distance des deux extrémités non communes.

Pour faire la *soustraction,* on portera encore les longueurs sur la même direction, mais en faisant coïncider leurs extrémités *finales.* La *différence* sera la distance des extrémités initiales.

On pourrait encore opérer la soustraction en faisant coïncider les extrémités *initiales.* La différence serait la distance des extrémités finales.

24. La *multiplication* s'effectuera par la construction d'une quatrième proportionnelle, le produit $x = a.b$ de a par b étant le quatrième terme de la proportion

Fig. 3.

$$1 : a = b : x.$$

Sur OX, prenons $01 = 1, 0a = a$; sur $O'X'$, parallèle à OX, prenons $O'b = b$; menons la ligne $1b$, qui rencontre, en un point P, la ligne OY, perpendiculaire à OX, et tirons Pa, qui coupera $O'X'$ en x. La ligne $0x = x$ sera la quatrième proportionnelle cherchée, et représentera le produit demandé $a.b$.

La *division* se ramène immédiatement à la multiplication, et s'effectue aussi par la construction d'une quatrième proportionnelle. Ainsi le quotient $x = \frac{a}{b}$ sera déterminé par la proportion

$$b : a = 1 : x,$$

et se construira comme le produit de tout à l'heure.

L'*élévation aux puissances entières* s'opère au moyen de plusieurs multiplications successives.

25. *L'extraction de la racine carrée* revient à la construction d'une moyenne proportionnelle entre la quantité donnée et l'unité.

Les extractions de racines dont les indices sont des puissances de 2 s'opèrent par la répétition de la même construction.

Quant aux racines dont les indices ne sont pas des puissances de 2, on peut les extraire théoriquement à l'aide de l'instrument imaginé par Descartes (*), ou pratiquement par des méthodes d'approximation indéfinie.

Il en serait de même pour la résolution des équations algébriques et pour les opérations transcendantes, correspondantes aux fonctions exponentielles, logarithmiques, circulaires, etc., ainsi que pour la résolution des équations transcendantes.

§ III.

Des quantités et des opérations algébriques.

26. Un problème étant posé, l'algèbre nous enseigne à transformer les conditions données en d'autres qui permettent la résolution, exacte ou approchée, du problème à l'aide des opérations de l'arithmétique ou des constructions géométriques. Il peut se faire, dans certains cas, que l'on soit ainsi conduit à des opérations inexécutables, telle que celle de soustraire un plus grand nombre d'un plus petit.

L'impossibilité du problème, accusée par une opération impossible, peut être tantôt *absolue*, tantôt *apparente*. Elle sera absolue lorsque les conditions exprimées par l'équation du problème correspondront complètement à celles de l'énoncé, celui-ci ne pouvant donner lieu qu'à l'équation reconnue impossible.

D'autres fois, l'impossibilité est seulement *apparente*. C'est lorsque le problème pouvant offrir plusieurs cas entre lesquels on ne sait pas choisir *a priori*, on a mis un seul de ces cas en équation, et que le cas que l'on a pris n'est pas celui qui a lieu réellement.

(*) *Géométrie*, livre II.

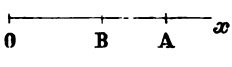
27. On peut se demander maintenant s'il n'est pas possible de donner à l'idée de quantité et aux définitions des opérations une extension analogue à celle que l'on a déjà admise en arithmétique, pour passer du calcul des nombres entiers au calcul des fractions, cette extension devant permettre d'embrasser dans une même formule les divers cas d'une même question, et faire ainsi disparaître l'impossibilité, lorsqu'elle n'est qu'apparente.

Choisissons un exemple particulier, le plus simple possible. Une personne reçoit une somme a et perd une somme b : on demande quel changement a subi l'état de sa fortune.

Il y a d'abord deux cas à distinguer, le changement pouvant avoir eu pour résultat soit un gain, soit une perte. Figurons géométriquement les opérations nécessaires à la solution du problème.

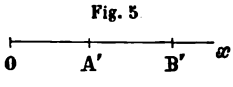
Si l'on suppose d'abord qu'il y ait un gain, prenons ce gain pour inconnue. Portons, sur la droite Ox, une longueur $OA = a$, et retranchons-en la longueur $AB = b$. Alors la différence OB représentera le gain cherché.

Fig. 4.



Si l'on suppose, au contraire, qu'il y ait eu perte, on portera, sur une ligne Ox', une longueur $OB' = b$, et l'on en soustraira $B'A' = a$. Le résultat $O'A'$ sera la perte cherchée.

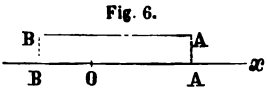
Fig. 5



Le premier cas est possible, si l'on a $a > b$; le second, si l'on a $a < b$: c'est ce que supposent les deux figures.

Voyons maintenant ce que deviendrait la solution du premier cas pour $a < b$. De la ligne OA, il s'agirait de soustraire la ligne plus grande AB, ce qui est arithmétiquement impossible. Si néanmoins nous exécutons la même construction géométrique que dans le cas où la soustraction est possible, le point B se trouvera porté à gauche du point O, à une distance $OB = b - a$. Or, cette distance donne précisément la valeur de la perte qui a réellement lieu. Donc la même construction géométrique peut servir à résoudre les deux cas du problème, et la solution sera toujours représentée par la distance OB, portée à droite du point O, lorsque c'est un gain, à gauche, lorsque c'est une perte.

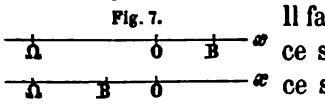
Fig. 6.



Cette construction a, de plus, l'avantage de pouvoir faire connaître en même temps l'état de la fortune du possesseur. Supposons,

en effet, que cette fortune soit représentée par la longueur ΩO.

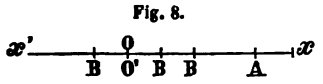
Fig. 7.



Il faudra lui ajouter la solution OB, lorsque ce sera un gain; l'en retrancher, lorsque ce sera une perte. Il faudra donc porter la solution, dans le premier cas, à droite, dans le second cas, à gauche du point O, et c'est précisément ce que donne la construction précédente.

28. On voit aisément que la construction géométrique du premier cas revient à porter l'un à la suite de l'autre, en sens opposés, les axes Ox, $O'x'$ (*fig.* 4 et 5), sur lesquels sont comptés respectivement les gains et les pertes. Le passage du gain à la perte, qui se fait par degrés continus, lorsqu'on fait croître b, par exemple, se trouvera indiqué par le passage du point B de la droite à la gauche de l'origine O, et l'on n'aura plus à se demander sur lequel des deux axes il faut porter le résultat, la construction le portant d'elle-même sur l'axe convenable.

Fig. 8.



Les deux axes n'étant plus terminés l'un et l'autre au point O, et se servant mutuellement de prolongement, le point B ne risquera plus, pour ainsi dire, de tomber dans le vide, lorsqu'on aura fait la construction du gain pour le cas de la perte, ou *vice versa*. La soustraction définie géométriquement ne sera donc plus impossible, comme pouvait l'être la soustraction arithmétique.

29. Si donc nous désignons par le signe — la soustraction géométrique, et par x le segment OB, la solution du problème sera toujours fournie par l'équation

$$x = a - b,$$

la ***longueur*** de OB donnant la grandeur du gain ou de la perte, et la ***direction*** de OB indiquant si c'est à un gain ou à une perte que s'applique cette grandeur.

Si maintenant k représente la fortune primitive, y la fortune actuelle du possesseur, on aura, s'il y a gain,

$$y = k + \mathrm{OB};$$

s'il y a perte,

$$y = k - \mathrm{OB}.$$

Dans le premier cas, on a évidemment,

$$y = k + x.$$

Voyons comment nous pourrons faire rentrer le second cas dans la même formule.

30. Nous avons défini, dans la représentation des grandeurs arithmétiques ou absolues, le point initial comme étant l'extrémité la plus rapprochée de l'origine O, le point final comme étant l'extrémité la plus éloignée de cette origine. En d'autres termes plus généraux, nous avons établi, quelle que soit la position du segment considéré, que l'on va du point initial au point final en marchant *de la gauche vers la droite.*

Considérons maintenant le segment OB, qui, suivant sa direction, représente un gain ou une perte. En se rappelant que l'axe $x'Ox$, indéfini dans les deux sens, a été formé par la juxtaposition des axes Ox, Ox' (*fig.* 4 et 5), indéfinis chacun dans un seul sens, on voit que O doit être considéré comme le point initial soit du gain, soit de la perte. Donc, dans la construction généralisée, on ira du point initial au point final de la solution x, en marchant *de gauche à droite* si x représente un gain, et *de droite à gauche* si x représente une perte.

D'après ces conventions sur les noms à donner aux extrémités du segment x, on voit que, si l'on étend à tous les cas la définition que nous avons donnée (n° 23), de l'*addition géométrique,* la soustraction de la longueur OB, dans le cas où elle devra avoir lieu, sera précisément ce que nous devons appeler *addition* du segment *dirigé* x.

Donc, dans tous les cas, si l'on adopte pour l'addition et pour la soustraction leurs définitions géométriques, en ayant égard à la transposition des noms des extrémités qui correspond au changement de direction du segment, on aura, pour la solution complète du problème, les équations

$$x = a - b,$$
$$y = k + x,$$

dont la première fera connaître le gain ou la perte (celle-ci étant considérée comme un gain *négatif*), et l'autre, la fortune actuelle du possesseur.

On voit que la soustraction géométrique se fait ici en prenant la différence des valeurs absolues, et portant le résultat dans le sens affecté au plus grand terme; et que l'addition géométrique répond, suivant le sens de x, soit à une addition, soit à une soustraction arithmétique.

31. Nous pouvons encore compléter la généralisation que nous avons commencée. Dans la formule

$$y = k + x,$$

l'addition géométrique suffit pour représenter à la fois l'addition d'un gain ou la soustraction d'une perte. Si, au lieu de représenter par x un gain porté à droite ou une perte portée à gauche, nous avions représenté par x une perte portée à droite ou un gain porté à gauche, nous aurions obtenu, au lieu de la formule précédente, la formule

$$y = k - x,$$

qui aurait également répondu à tous les cas, en donnant à la soustraction géométrique la même extension que nous avons donnée à l'addition. Donc, lorsque deux quantités, se succédant l'une à l'autre d'une manière continue, sont représentées par des segments pris sur une même droite dans des sens opposés, l'addition géométrique de l'une peut être remplacée par la soustraction géométrique de l'autre, et réciproquement; de sorte que l'on passera du cas de l'une au cas de l'autre en changeant simplement le signe + ou — qui précédait la première, c'est-à-dire en remplaçant $+x$ par $-x$, $-x$ par $+x$.

On peut indiquer ce changement d'avance une fois pour toutes, en convenant que, si l'une des quantités est représentée par $+x$, l'autre le sera par $-x$, et établissant, pour règles des opérations algébriques, que l'addition se fera en laissant à chaque terme son signe, la soustraction en donnant à chaque terme un signe contraire.

Cette convention que nous avons faite relativement au résultat x de la première partie de la question, on peut aussi l'étendre aux données, et au lieu de représenter par a et b les grandeurs d'un gain et d'une perte, et d'indiquer explicitement par les signes + et — la nature de ces quantités, on peut convenir que chacune

des lettres a, b représentera soit un gain, soit une perte, et sera figurée dans le premier cas par une ligne dirigée vers la droite, dans le second par une ligne dirigée vers la gauche, les lettres a et b renfermant en elles cette notion distinctive de direction. Alors la formule

$$x = a - b$$

pourra être remplacée par la formule

$$x = a + b,$$

pareille à la formule

$$y = k + x,$$

et pouvant servir à la solution non seulement de la question actuelle, mais encore des autres questions correspondantes aux cas où a représenterait une perte ou b un gain.

32. Remarquons, enfin, que le problème dont la solution est donnée par l'équation

$$y = k + x. \qquad \text{ou} \qquad y = k + a + b$$

peut, dans certains cas, être possible ou impossible, suivant que l'on donnera ou non à la lettre y la faculté de représenter une dette aussi bien qu'un avoir. Dans le premier cas, on supposerait que la personne, ayant perdu plus qu'elle ne possède, pourrait contracter une dette, en ayant recours à son crédit. Dans le second cas, on ne considérerait que les paiements réalisables, et alors un paiement surpassant l'avoir serait considéré comme impossible.

Voilà donc encore un exemple d'un cas d'impossibilité dont les circonstances ne peuvent être exprimées par des équations.

33. On donne le nom de quantités *positives* à celles qui sont représentées par des lignes dirigées dans le sens primitivement assigné aux quantités *arithmétiques* ou *absolues* de même nom, et le nom de quantités *négatives* à celles qui sont représentées par des lignes dirigées en sens contraire.

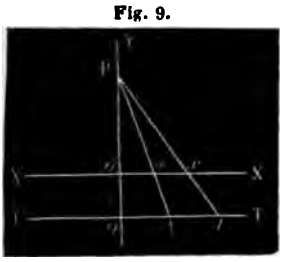
Nous désignerons provisoirement, avec Cauchy, sous le nom commun de *quantités algébriques* les quantités *dirigées*, c'est-à-dire les quantités *positives* et *négatives* représentées par des lettres comprenant implicitement le signe de direction.

§ IV.

34. Prenons pour second exemple la relation qui exprime le mouvement uniforme d'un point sur une droite.

Représentons les temps par des segments pris sur la droite OT, et les espaces par des segments pris sur la droite parallèle O'X. Soit $O'a = a$ l'espace parcouru dans le temps $O1 = 1$. Les espaces étant proportionnels aux temps, l'espace x, correspondant au temps t, sera donné par la proportion

Fig. 9.



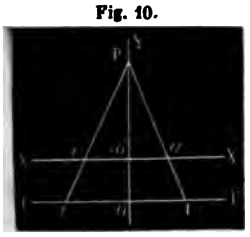
$$1 : t = a : x,$$

d'où l'on voit comment la valeur $x = at$ se construit au moyen d'une quatrième proportionnelle.

Cette construction, qui consiste à déterminer d'abord le point P où la droite $\overline{1a}$ rencontre la perpendiculaire OY, puis à joindre P au point t par une droite qui rencontre O'X à la distance $O'x = x$, servira évidemment aussi à faire connaître t lorsqu'on donnera x.

35. Si l'on considère les positions du mobile avant le temps que l'on a pris pour origine, on voit que le mobile se trouvait sur O'X', *à gauche* du point O', en x' par exemple. Si l'on applique à ce cas la construction du numéro précédent pour trouver le temps au moyen de l'espace, on obtiendra pour représentation du temps un segment Ot', de grandeur égale à $\frac{O'x'}{Oa}$, et situé à gauche de O. On est conduit, par les mêmes raisons que ci-dessus, à considérer ce temps t' comme négatif, ainsi que l'espace x'. L'équation

Fig. 10.

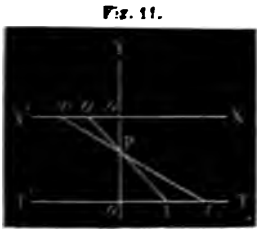


$$x' = at'$$

représentera toujours la solution, en établissant cette règle des signes, que le produit d'un nombre positif a par une quantité t', positive ou négative, est de même signe que t'.

36. Nous avons supposé jusqu'ici le mouvement s'effectuant dans la direction même que l'on a choisie pour représenter les temps positifs. Supposons maintenant le mouvement dirigé en sens contraire, et continuons à compter les segments positivement à droite, négativement à gauche. Pour $t = 1$, l'espace $0'a$ sera négatif, et la quatrième proportionnelle x aux grandeurs 1, a, t (pour t positif), devra être dirigée dans le même sens que $0'a$, et par suite devra être négative. C'est précisément ce qu'indique la construction géométrique étendue au cas où $0'a$ est porté vers la gauche. Donc la formule

Fig. 11.

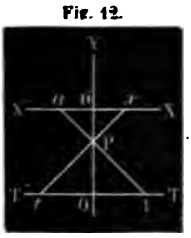


$$x = at$$

subsistera pour a négatif et t positif, à la condition de donner à x le signe de a.

Enfin, si, pour a négatif, on prend aussi t négatif, l'espace $0'x$ devra être égal en grandeur au produit

Fig. 12.



$$0'a \times 0t,$$

et porté vers la droite, c'est-à-dire positif, et c'est ce que donne encore la construction.

37. On voit donc que la construction de la multiplication, définie d'abord pour les grandeurs absolues, puis étendue aux grandeurs pourvues de signes de direction, conduit à la règle des signes pour la multiplication des quantités algébriques, et, par suite, à toutes les conséquences de cette règle.

Il est évident que tout ce que nous avons dit pour la multiplication s'applique aussi à la division.

38. Il résulte de là, en passant à l'élévation aux puissances, que toute puissance paire d'une quantité soit positive, soit négative, est positive, et que toute puissance impaire d'une quantité est de même signe que cette quantité.

Si l'on considère enfin l'opération inverse de l'élévation aux puissances, c'est-à-dire l'extraction des racines, on voit qu'étant

donnée une quantité quelconque, il existera toujours une racine de degré impair quelconque de cette quantité, et que cette racine unique sera de même signe que la puissance donnée.

Étant donnée une quantité positive, on pourra toujours lui trouver deux racines d'un degré pair quelconque, égales et de signe contraire.

Mais une quantité négative ne saurait être produite par l'élévation d'aucune quantité à une puissance paire. Donc une racine de degré pair d'une quantité négative est une quantité *impossible* ou *imaginaire,* tant que l'on n'aura pas rendu l'opération de l'extraction de la racine possible dans tous les cas, par une nouvelle extension de l'idée de quantité et de la définition des opérations.

Les quantités arithmétiques et les quantités algébriques, ou, en d'autres termes, les quantités positives et les quantités négatives, sont désignées par la dénomination commune de *quantités réelles*.

CHAPITRE II

DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES ET QUANTITÉS COMPLEXES.

§ Ier

Définition des quantités géométriques.

[illegible] Nous appellerons provisoirement, d'après Cauchy, *quantité géométrique* une droite limitée *en grandeur et en direction*, cette direction n'étant pas assujettie, comme pour les quantités algébriques, à être parallèle à une droite donnée, mais étant quelconque dans le plan.

Deux quantités géométriques sont dites *égales* géométriquement lorsqu'elles ont même longueur et même direction, de sorte qu'on puisse les faire *coïncider* l'une avec l'autre, c'est-à-dire leur donner à la fois même extrémité *initiale* et même extrémité *finale*, en transportant l'une d'entre elles parallèlement à elle-même.

La longueur de la droite s'appelle le *module* de la quantité géométrique. L'angle que fait sa *direction* avec un axe fixe s'appelle son *argument*.

Deux quantités géométriques sont donc égales lorsqu'elles ont des modules égaux et des arguments soit égaux, soit différant l'un de l'autre d'un multiple quelconque de quatre angles droits. Ainsi l'égalité de deux quantités géométriques z, z' entraîne les deux égalités numériques

$$\text{mod.}\ z = \text{mod.}\ z' .$$

et

$$\text{arg.}\ z = \text{arg.}\ z' .$$

ou du moins

$$\text{arg.}\ z = \text{arg.}\ z' + 2k\pi .$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

En désignant par r le module et par p l'argument d'une quantité géométrique, nous représenterons, du moins provisoirement, la quantité géométrique par la notation

$$r_p .$$

Une quantité positive peut être regardée comme une quantité géométrique d'argument 0 ou $2k\pi$; une quantité négative, comme une quantité géométrique d'argument π ou $(2k+1)\pi$.

40. Au lieu de considérer la droite elle-même, il suffit de considérer ses deux extrémités, en ayant soin de distinguer l'extrémité *initiale,* d'où partirait un point pour décrire la droite dans la direction donnée, de l'extrémité *finale,* où ce point s'arrêterait.

Si l'extrémité initiale est fixe, et qu'on la prenne pour *origine,* la droite sera déterminée par sa seule extrémité finale, dont le module et l'argument seront les coordonnées polaires. Alors la quantité géométrique pourra être déterminée par un seul point du plan; et réciproquement, tout point du plan pourra être représenté par une quantité géométrique ayant ce point pour extrémité finale, et l'origine des coordonnées pour extrémité initiale.

§ II.

Addition et soustraction des quantités géométriques.

41. Après avoir défini l'*égalité* des quantités géométriques, définissons maintenant leur *addition.*

Nous étendrons aux quantités géométriques la définition de cette opération donnée pour les quantités arithmétiques et algébriques. Pour ajouter deux quantités géométriques, on transportera l'une d'elles parallélement à elle-même, de manière que son extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale de l'autre. La droite qui va de l'extrémité initiale de la seconde à l'extrémité finale de la première est dite la *somme* des deux quantités géométriques.

On voit, par cette construction, que la somme de deux quantités géométriques est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent ces quantités géométriques.

La somme de deux quantités géométriques ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des parties. Ainsi l'on a

Fig. 13.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OB} + \overline{BC},$$

en indiquant par un trait supérieur une droite prise en grandeur et en direction, et considérée comme une quantité géométrique.

A ce point de vue, on peut dire qu'un côté d'un triangle est égal à la somme *géométrique* des deux autres côtés.

De même, la résultante de deux vitesses, de deux accélérations,

de deux forces, etc., est égale à la somme *géométrique* des composantes.

42. De la définition de l'addition résulte immédiatement la définition de l'opération inverse, c'est-à-dire de la *soustraction*. Si l'on a

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB},$$

il en résultera, par définition,

$$\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OB}.$$

La soustraction s'effectuera donc en faisant coïncider les extrémités finales des deux termes de la différence, et prenant pour cette différence la droite qui va de l'extrémité initiale du terme positif à l'extrémité initiale du terme négatif.

43. On voit que, si l'on considère une quantité géométrique $\overline{OB'}$, égale et opposée à $\overline{OB}$, la construction qui donnera $\overline{OC} - \overline{OB}$ sera la même que celle qui donnera $\overline{OC} + \overline{OB'}$. Donc si l'on considère deux quantités géométriques *opposées*, c'est-à-dire ayant des modules égaux et des arguments différant de π (ou d'un multiple impair de π), l'addition de l'une de ces deux quantités équivaudra à la soustraction de l'autre.

Fig. 14.

Si donc nous représentons l'une de ces quantités par $+ z$, nous serons conduits, comme nous l'avons été dans le cas particulier des quantités *algébriques*, à représenter l'autre par $- z$.

On a donc

$$r_{p+\pi} = -r_p,$$

et, plus généralement,

$$r_{p+(2k+1)\pi} = -r_p,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

44. Une quantité géométrique doit être considérée comme nulle, uel que soit son argument, lorsque son module sera nul. Il est

clair alors que l'addition ou la soustraction de cette quantité n'auront aucune influence.

La somme de deux quantités opposées, ou, ce qui revient au même, la différence de deux quantités égales est nulle.

45. La somme de plusieurs quantités géométriques est le côté qui ferme le polygone dont les autres côtés sont égaux, en grandeur et en direction, aux quantités géométriques données.

Elle est nulle lorsque le polygone se ferme de lui-même.

Il est aisé de voir que la somme d'un nombre quelconque de quantités géométriques ne dépend pas de l'ordre des parties.

Les théorèmes connus de géométrie font voir que les modules de la somme et de la différence de deux quantités sont compris l'un et l'autre entre la somme et la différence des modules de ces quantités, et que le module de la somme de plusieurs quantités est moindre que la somme des modules de ces quantités.

46. *Décomposition d'une quantité géométrique en ses composantes rectangulaires.* — Si l'on projette une quantité géométrique r_p sur un axe Ox, la projection, que nous désignerons par x, sera, d'après la convention établie pour les quantités algébriques, positive ou négative, suivant que p (ou, s'il est plus grand que deux angles droits, son complément à 4 droits, $2\pi - p$) sera aigu ou obtus.

Le rapport, positif ou négatif, de x à la longueur r est dit le *cosinus* de l'angle p. On a évidemment

$$\cos(-p) = \cos(2\pi - p) = \cos p .$$

Si l'on projette de même r_p sur un axe Oy, faisant avec la partie positive de Ox un angle droit (compté dans le sens des angles croissants), la projection y sera positive ou négative, suivant que l'angle $p - \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} - p$ (ou son complément à 2π) sera aigu ou obtus.

Le rapport, positif ou négatif,

$$\frac{y}{r} = \cos\left(p - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right)$$

est dit le *sinus* de l'angle p. On voit aisément que

$$\sin(-p) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) = -\sin p.$$

On a ainsi, par définition, pour les projections de r_p sur les deux axes rectangulaires $0x$, $0y$,

$$x = r\cos p,$$
$$y = r\sin p.$$

Ces deux projections sont les *coordonnées rectangulaires* du point dont r et p sont les coordonnées polaires.

47. La projection sur l'axe des x est une quantité géométrique ayant pour module la longueur absolue de la projection $r\cos p$, et pour argument 0 ou π, suivant qu'elle est positive ou négative.

La projection sur l'axe des y est une quantité géométrique ayant pour module la longueur absolue de $r\sin p$, et pour argument $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2}\right)$, suivant qu'elle sera positive ou négative.

Nous pourrons considérer, pour plus de simplicité, les x négatifs comme ayant un module négatif et un argument nul, de même que les x positifs. Pour faire la somme géométrique de deux ou de plusieurs x de signes quelconques, on fera alors la somme *algébrique* des modules, et l'on donnera à cette somme l'argument zéro, de sorte que l'on aura

$$x_0 + x'_0 + x''_0 + \cdots = (x + x' + x'' + \cdots)_0.$$

De même, on considérera les y négatifs comme ayant un module négatif, et un argument $= \frac{\pi}{2}$, de même que les y positifs, et l'on aura, d'après cette convention,

$$y_{\frac{\pi}{2}} + y'_{\frac{\pi}{2}} + y''_{\frac{\pi}{2}} + \cdots = (y + y' + y'' + \cdots)_{\frac{\pi}{2}}.$$

48. Une quantité géométrique r_p peut être regardée comme la somme géométrique de ses deux projections ou *composantes* rectangulaires x ou x_0, y ou $y_{\frac{\pi}{2}}$, de sorte qu'on aura

$$r_p = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}},$$

les modules, positifs ou négatifs, x et y étant déterminés par les équations

$$x = r\cos p,$$
$$y = r\sin p.$$

d'où l'on tire

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$p = \text{arc cos}\frac{x}{r} = \text{arc sin}\frac{y}{r} = \text{arc tang}\frac{x}{y}.$$

Remarque. L'expression arc tang $\frac{y}{x}$ convient également à deux directions opposées, aussi bien à celle qui répond aux valeurs $\frac{-x}{r}$, $\frac{-y}{r}$ du cosinus et du sinus, qu'à celle qui répond aux valeurs $\frac{+x}{r}$, $\frac{+y}{r}$ de ces mêmes quantités. Pour abréger l'écriture, et pouvoir nous contenter dans tous les cas d'introduire l'expression de l'arc tangente, qui est généralement la plus simple, nous conviendrons que la notation arc tang $\frac{y}{x}$, ou, plus explicitement, arc tang $\frac{+y}{+x}$ représente l'arc dont le sinus a le *même signe* que $+y$, et le cosinus le *même signe* que $+x$. D'après cette convention, on aura

$$\text{arc tang}\frac{-y}{-x} = \text{arc tang}\frac{+y}{+x} \pm \pi.$$

49. On peut donc toujours considérer une quantité géométrique comme équivalente à la *somme* de deux composantes suivant des directions rectangulaires entre elles. C'est à ce point de vue que l'on a donné aux quantités géométriques le nom de quantités *complexes*, qui est le plus généralement adopté, et que nous emploierons le plus souvent dans ce qui va suivre.

50. L'addition de deux ou de plusieurs quantités complexes se ramène à l'addition de leurs composantes, et, d'après ce que nous avons vu, l'addition de ces composantes s'exécute sur chaque axe, d'après la règle de l'addition des quantités réelles. On a ainsi

$$r_p + r'_{p'} + r''_{p''} + \cdots = \left(x_0 + x'_0 + {}''x_0 + \cdots\right) + \left(y_{\frac{\pi}{2}} + y'_{\frac{\pi}{2}} + y''_{\frac{\pi}{2}} + \cdots\right)$$

$$= (x + x' + x'' + \cdots)_0 + (y + y' + y'' + \cdots)_{\frac{\pi}{2}}.$$

La somme de plusieurs quantités géométriques Σr_p est nulle, lorsque les deux conditions nécessaires et suffisantes

$$\Sigma x = \Sigma r \cos p = 0,$$
$$\Sigma y = \Sigma r \sin p = 0$$

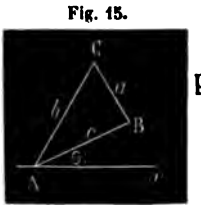
sont satisfaites.

51. Si l'on a une égalité entre deux quantités complexes, cette égalité se décomposera en deux autres égalités, l'une entre les composantes *horizontales*, l'autre entre les composantes *verticales*.

On peut profiter de cette réunion de deux égalités en une seule pour présenter les formules sous la forme la plus simple.

Soit, par exemple, un triangle rectiligne ABC. Prenons pour arc de projection une droite quelconque Ax, faisant un angle θ avec le côté AB. L'égalité géométrique

Fig. 15.



$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

pourra s'écrire

$$c_\theta = b_{\theta+A} + a_{\theta-B}.$$

En donnant à θ diverses valeurs convenables, et ayant égard à l'équation

$$A + B + C = \pi,$$

cette formule fournira successivement toutes les formules de la trigonométrie rectiligne, et elle les résume toutes de la manière la plus succincte.

52. *Des séries à termes complexes.* — De ce que nous venons d'exposer sur l'addition des quantités complexes, il résulte qu'une série dont les termes sont des quantités complexes est *convergente*, quels que soient les arguments, toutes les fois que la série des modules est convergente, pourvu que l'on définisse la convergence des séries complexes par une extension de la définition de la convergence des séries nouvelles.

Une série réelle est dite *convergente* lorsque, pour n assez grand, la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tend vers zéro, quel que soit k, pourvu qu'il ne dépende pas de n.

De même, une série complexe sera dite *convergente*, lorsque, pour n assez grand, le module de la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tendra vers zéro, quel que soit k, indépendant de n.

Si la série des modules est convergente, en la représentant par

$$r^{(1)} + r^{(2)} + \ldots + r^{(n)} + \ldots ,$$

alors on devra avoir

$$r^{(n+1)} + r^{(n+2)} + \ldots + r^{(n+k)}$$

infiniment petit, pour n infini, quel que soit k.

Soit maintenant

$$z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots + z^{(n)} + \ldots$$

la série complexe, dont les termes ont pour modules

$$r^{(1)}, \quad r^{(2)}, \ldots, \quad r^{(n)}, \ldots .$$

Le module de la somme des k termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$,

$$z^{(n+1)} + z^{(n+2)} + \ldots + z^{(n+k)},$$

est moindre que la somme des modules de ces termes, laquelle tend, par hypothèse, vers zéro pour n infini, quel que soit k. Donc il en est de même *a fortiori* du module de la somme $z^{(n+1)} + \cdots + z^{(n+k)}$. Donc la série complexe est convergente, quels que soient d'ailleurs les arguments de ses termes.

On voit aisément que la convergence d'une série complexe entraîne la converge des deux séries réelles qui ont pour termes les composantes horizontales et verticales des termes de la série complexe, et réciproquement.

53. Considérons une quantité complexe variable, dont l'extrémité initiale est fixe, et que l'on peut représenter par sa seule extrémité finale. Nous désignerons, dans ce cas, par la même lettre z la quantité complexe r_p elle-même et son extrémité finale.

Si le point z passe de la position z à la position z', la différence $z' - z$ représentera en grandeur et en direction la distance de ces deux positions.

Si l'on fait varier d'une manière continue la quantité complexe z, ou, ce qui revient au même, son module r et son argument p, ou encore ses deux composantes x et y, le point z se déplacera, en décrivant une certaine ligne dont la forme dépendra de la relation arbitraire que l'on établira entre les coordonnées polaires r et p, ou entre les coordonnées rectangulaires x et y. Nous appellerons cette ligne le *chemin* ou la *trajectoire* du point z.

Lorsqu'on suppose les deux positions z, z' infiniment voisines, leur distance, représentée en grandeur et en direction par la différence infiniment petite $z'-z$, sera dite la *différentielle* de la variable z, et nous la désignerons, en conséquence, par le symbole dz.

Toutes les règles de la différentiation des quantités réelles qui ne dépendent que des règles de l'addition et de la soustraction, subsistent aussi pour les quantités complexes. On aura ainsi

$$dz = d(x_0) + d(y_{\frac{\pi}{2}}) = (dx)_0 + (dy)_{\frac{\pi}{2}}.$$

54. Le module de la quantité complexe dz, que nous représenterons par ρ, a pour valeur

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dr^2+r^2dp^2}\ .$$

C'est l'élément infiniment petit ds de la courbe décrite par le point z.

Pour que dz soit infiniment petit, il faut et il suffit que son module ρ soit infiniment petit.

Mais l'argument de dz, c'est-à-dire l'angle

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{dy}{dx}$$

n'est assujetti à aucune condition, et peut prendre une valeur finie quelconque, dépendant de la forme du chemin de z.

55. Le chemin de z est la limite du polygone infinitésimal qui a pour côtés les accroissements dz successifs. La distance des deux positions extrêmes de z est la limite de la somme géométrique des côtés de ce polygone. Nous représenterons cette limite de somme d'éléments infiniment petits par le signe d'intégration.

Si donc le point z, partant de l'origine, arrive en Z après avoir décrit un chemin quelconque, la quantité géométrique $\overline{OZ}$, ou le point Z qui la représente, seront désignés par l'intégrale

$$Z = \int_0^Z dz \quad , \tag{1}$$

comme dans le cas des quantités réelles.

De même la droite qui joint les deux points $z^{(0)}$ et Z de la trajectoire sera égale à l'intégrale

$$Z - z^{(0)} = \int_{z^{(0)}}^{Z} dz \quad . \tag{2}$$

Si le chemin de z est une courbe fermée, alors en revenant au point de départ on a $Z = z^{(0)}$. Donc l'intégrale $\int dz$, prise tout le long d'un *contour* fermé quelconque, est nulle.

D'après ce que nous voyons ici, les valeurs des intégrales (1) et (2) ne dépendent que des limites de l'intégration, et nullement du chemin parcouru entre ces deux limites. C'est grâce à cette indépendance que nous avons obtenu les valeurs de ces intégrales sous la même forme que dans le cas d'une variable réelle. Mais nous verrons plus tard qu'il ne faudrait pas étendre trop loin cette généralisation.

§ III.

Multiplication, division et élévation aux puissances entières des quantités géométriques.

56. La définition de la multiplication par une quantité réelle se déduit de la définition de l'addition pour les quantités complexes comme pour les quantités réelles.

La multiplication par un nombre entier m est l'addition de m quantités égales au multiplicande. Ces quantités égales ayant même argument, la multiplication se réduira à la multiplication du module, de sorte qu'on aura

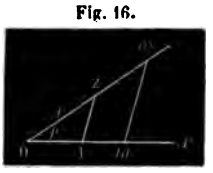
$$r_p \times m = (mr)_p \, . \tag{1}$$

De la multiplication par un nombre entier on passe, à l'aide du raisonnement connu, à la division par un nombre entier, puis à la multiplication par une fraction, et enfin, en invoquant le prin-

cipe des limites, à la multiplication par un nombre incommensurable. On en conclura, dans tous les cas, que, pour multiplier une quantité géométrique r_p par un nombre quelconque m, commensurable ou non, il suffit de multiplier le module r par ce nombre, sans changer l'argument.

On peut maintenant représenter la multiplicateur m par le rapport de deux lignes, $Om : O1$. Soit alors $\overline{Oz} = r_p$ le multiplicande.

Fig. 16.

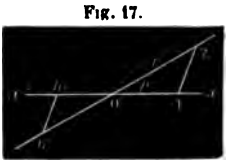


On multipliera le module Oz par m en construisant le triangle Omw semblable à $O1z$, et puisque l'argument ne doit pas changer, $\overline{Ow}$ représentera, en grandeur et en direction, le produit de z par m.

On voit que la construction revient à joindre les points 1 et z, et à mener par l'extrémité m du multiplicateur une parallèle mw à $1z$, jusqu'à la rencontre de la droite Oz.

57. Le multiplicateur arithmétique Om peut être considéré comme une quantité algébrique positive. Étendons maintenant la même construction au cas où le multiplicateur est une quantité négative. Alors le produit Ow, au lieu d'avoir la même direction que Oz, sera dirigé suivant le prolongement de Oz.

Fig. 17.



On a donc

$$r_p \times (-m) = (mr)_{p+\pi} = -(mr)_p . \qquad (2)$$

Or, la quantité algébrique $\pm m$ peut être regardée comme une quantité géométrique de module m et d'argument 0 ou π, et on peut la représenter par m_0 ou par m_π. Dès lors, les deux formules précédentes (1) et (2) deviennent

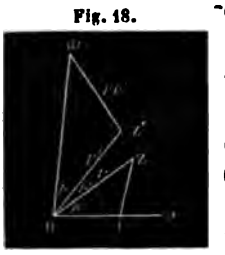
$$r_p \times m_0 = (r.m)_{p+0} ,$$
$$r_p \times m_\pi = (r.m)_{p+\pi} ,$$

et l'on peut dire que la multiplication d'une quantité complexe par une quantité algébrique s'effectue en faisant le produit des modules et l'addition des arguments des deux facteurs.

58. Supposons maintenant que l'on applique la même construction au cas où le multiplicateur réel $\pm m$ est remplacé par une

quantité géométrique quelconque $z' = r'_{p'}$. On devra construire sur Oz' un triangle $Oz'w$ semblable au triangle $O1z$. La quantité géométrique $\overline{Ow}$, ainsi obtenue, aura pour module $Ow = rr'$ et pour argument $wOx = p + p'$.

Fig. 18.



Il est clair que l'on aurait obtenu la même quantité $\overline{Ow}$, en construisant sur Oz un triangle Ozw semblable à $O1z'$.

On peut donc, dans cette opération, prendre l'une pour l'autre les deux quantités z et z'. Cette opération jouit donc de la propriété fondamentale de la multiplication. Donc il est permis de lui donner le nom de ***multiplication***.

Nous définirons donc la *multiplication des quantités complexes* comme *une opération qui consiste dans la multiplication des modules et dans l'addition des arguments des facteurs;* de sorte que l'on a, par définition,

$$r_p \times r'_{p'} = (rr')_{p+p'}.$$

Cette règle comprend, comme cas particulier, la multiplication de deux facteurs algébriques ou d'un facteur complexe par un facteur algébrique.

59. Si l'on considère maintenant un nombre quelconque de facteurs complexes,

$$r_p, \quad r'_{p'}, \quad r''_{p''}, \ldots,$$

il est aisé de voir que, de la définition donnée pour le cas de deux facteurs, résultera la définition pour le cas d'un nombre quelconque de facteurs, laquelle sera exprimée par la formule

$$r_p \times r'_{p'} \times r''_{p''} \times \cdots = (rr'r''\ldots)_{p+p'+p''+\ldots};$$

et de cette définition résulte immédiatement que le théorème sur l'interversion des facteurs d'un produit s'étend au cas où le nombre des facteurs est quelconque.

On en conclut que toutes les règles de l'algèbre relatives à la multiplication des monômes s'appliquent aux produits de quantités complexes.

Pour diviser l'une par l'autre deux quantités complexes, on

prendra le quotient des modules et la différence des arguments, de sorte que l'on aura

$$\frac{r_p}{r'_{p'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{p-p'}.$$

60. Pour élever une quantité complexe à une puissance entière, on élèvera le module à cette puissance, et l'on multipliera l'argument par l'exposant de la puissance. Ainsi,

$$\left(r_p\right)^m = \left(r^m\right)_{mp}.$$

Cette formule est encore vraie lorsque m est un nombre entier négatif.

On peut construire simplement la puissance m de la quantité géométrique r_p. Pour cela, soit $01 = 1_0$, $\overline{OA_1} = r_p$. Joignons $1A_1$; puis construisons la suite des triangles semblables $01A_1$, OA_1A_2, OA_2A_3, ... On aura successivement $\overline{OA_2} = (r_p)^2$, $\overline{OA_3} = (r_p)^3$, ...

Fig. 19.

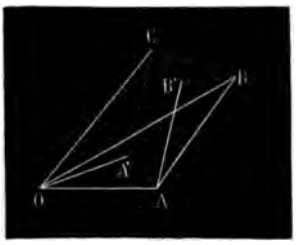
Le lieu des points 1, A_1, A_2, ... est une spirale logarithmique.

On peut abréger la construction dans certains cas. Ainsi, pour obtenir $(r_p)^4$, on construira $\overline{OA_2} = (r_p)^2$; puis on fera le triangle OA_2A_4 semblable à $01A_2$, ce qui donnera

$$\overline{OA_4} = (\overline{OA_2})^2 = \left[(r_p)^2\right]^2 = (r_p)^4.$$

61. Soient maintenant deux quantités complexes $\overline{OA} = z$, $\overline{AB} = z'$. Pour faire les produits $\overline{OA'}$, $\overline{AB'}$ de ces deux quantités par une troisième w, on construira deux triangles semblables OAA', ABB'. En menant $A'C$ égal et parallèle à AB', OC sera la somme de ces produits. Or, on démontre facilement que le triangle OCB est semblable à chacun des deux précédents. Donc $\overline{OC}$ représente le produit de $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ par le même multiplicateur w.

Fig. 20.



On conclut de là que, si z, z' et w sont trois quantités complexes, on a

$$(z + z').w = z.w + z'.w .$$

Donc pour multiplier une somme de quantités complexes par une quantité complexe, on multipliera chaque partie de la somme par le multiplicateur.

De là découle l'extension aux quantités complexes de toutes les règles relatives à la multiplication et à la division des polynômes réels, ainsi que des formules pour les puissances entières des binômes et des polynômes.

En un mot, les règles pour la formation des fonctions rationnelles sont les mêmes pour les quantités complexes que pour les quantités réelles.

62. Considérons spécialement le cas des quantités représentées au moyen de leurs composantes rectangulaires

$$z = x_0 + y_{\frac{\pi}{2}} , \qquad z' = x'_0 + y'_{\frac{\pi}{2}} ,$$

et appliquons à la multiplication de ces quantités la règle de la multiplication des polynômes. On aura

$$\begin{aligned} zz' &= \left(x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}\right)\left(x'_0 + y'_{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= x_0x'_0 + x_0y'_{\frac{\pi}{2}} + y_{\frac{\pi}{2}}x'_0 + y_{\frac{\pi}{2}}y'_{\frac{\pi}{2}} . \end{aligned}$$

Lorsque les modules x, y, x', y', sont tous positifs, le produit devient évidemment

$$\begin{aligned} zz' &= (xx')_{0+0} + (xy')_{0+\frac{\pi}{2}} + (yx')_{\frac{\pi}{2}+0} + (yy')_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \\ &= (xx')_0 + (xy')_{\frac{\pi}{2}} + (yx')_{\frac{\pi}{2}} + (yy')_{\pi} . \end{aligned}$$

ou, à cause de $(yy')_{\pi} = -(yy')_0$,

$$zz' = (xx' - yy')_0 + (xy' + yx')_{\frac{\pi}{2}} .$$

Si un module, x par exemple, était négatif et $= -\mathrm{x}$, on aurait

$$x_0 x'_0 = \mathrm{x}_\pi x'_0 = (\mathrm{x}x')_\pi = (-xx')_\pi = (xx')_0 ,$$

et de même pour les autres cas, de sorte que le résultat précédent est tout à fait général.

63. On peut arriver au même but d'une manière plus simple, en se servant d'une notation plus commode.

On a, d'après la règle de la multiplication,

$$r_p = r_0 \times 1_p ,$$

et cette formule subsiste encore, lors même que r est un module susceptible de signe. On a donc

$$r_p \times r'_{p'} = r_0 r'_0 \times 1_p . 1_{p'} = rr' . 1_{p+p'} .$$

On peut donc, dans la multiplication des quantités géométriques, mettre en facteur le produit des modules, et remplacer ensuite les modules par l'unité.

D'après cette remarque, écrivons la quantité complexe $x_0 + y_{\frac{\pi}{2}}$ sous la forme

$$x . 1_0 + y . 1_{\frac{\pi}{2}} .$$

Remarquons maintenant que 1_0 est l'unité absolue, que l'on peut se dispenser d'écrire comme facteur. Désignons ensuite par la lettre i l'*unité imaginaire* $1_{\frac{\pi}{2}}$, ou celui des rayons du cercle de rayon 1, qui est mené perpendiculairement au diamètre horizontal. La quantité complexe se présentera alors sous la forme

$$x + iy .$$

En appliquant la règle de la multiplication aux deux binômes

$$x + iy , \qquad x' + iy' ,$$

on devra remarquer que l'on a

$$i^2 = \left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{2.\frac{\pi}{2}} = 1_\pi = -1 ,$$

et, par suite, on remplacera le carré de la quantité géométrique i par -1. La formule du numéro précédent deviendra alors

(1) $\quad (x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx') ,$

$xx' - yy'$ étant une quantité d'argument zéro, et le produit

$$i(xy' + yx') = (xy' + yx') \cdot 1_{\frac{\pi}{2}}$$

étant la même chose que $(xy' + yx')_{\frac{\pi}{2}}$.

D'après cela, les quantités complexes, mises sous la forme $x + iy$, pourront être traitées suivant les règles de calcul établies pour les quantités réelles, pourvu que l'on traite le symbole i comme une quantité dont le carré est -1.

Dans le binôme $x + iy$, la composante x porte le nom de *partie réelle;* la composante iy, celui de *partie imaginaire.*

Nous appliquerons toujours la dénomination d'*imaginaires pures* ou simplement d'*imaginaires* aux quantités de la forme iy, formées par la multiplication d'une quantité réelle et de l'*unité imaginaire.*

64. On déduit de là les moyens, indiqués dans les Traités d'Algèbre, pour ramener les produits, les quotients et les puissances entières de quantités complexes à la forme $u + iv$ de quantités complexes. On traitera i comme une quantité ayant pour carré

$$i^2 = -1,$$

et, par suite, pour puissances successives

$$\begin{aligned} i^3 &= -i \\ i^4 &= +1, \\ i^5 &= +i, \\ &\text{etc....,} \end{aligned}$$

et en général, n étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif,

$$\begin{aligned} i^{4n} &= +1, \\ i^{4n+1} &= +i, \\ i^{4n+2} &= -1, \\ i^{4n+3} &= -i. \end{aligned}$$

Remarquons en particulier que l'on a

$$\frac{1}{i} = -i.$$

65. *Théorème de Moivre.* — L'équation

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q}. \tag{2}$$

que nous avons établie comme cas particulier de la multiplication, contient, avec l'équation (1) du n° 63, toute la théorie des fonctions circulaires.

D'après ce que nous avons vu, les fonctions $\cos p$ et $\sin p$ ne sont autre chose que les composantes rectangulaires de la quantité géométrique 1_p. On a donc

$$1_p = \cos p + i \sin p. \tag{3}$$

En substituant cette valeur et les valeurs analogues de 1_q et de 1_{p+q} dans l'équation (2), et effectuant la multiplication d'après la règle exprimée par l'équation (1) du n° 63, il vient

$$\begin{aligned} &(\cos p \cos q - \sin p \sin q) + i(\sin p \cos q + \cos p \sin q) \\ = \ &\cos(p+q) + i \sin(p+q). \end{aligned}$$

Les deux membres sont deux quantités géométriques dont l'égalité entraîne celles de leurs composantes de même nom. On a ainsi les équations fondamentales de la trigonométrie,

$$\begin{aligned} \cos(p+q) &= \cos p \cos q - \sin p \sin q, \\ \sin(p+q) &= \sin p \cos q + \cos p \sin q, \end{aligned}$$

avec toutes leurs conséquences.

66. De l'équation (2) on tire, pour m entier quelconque,

$$(1_p)^m = 1_{mp},$$

ou, en mettant pour 1_p et pour 1_{mp} leurs valeurs tirées de la formule (3),

$$(\cos p + i \sin p)^m = \cos mp + i \sin mp.$$

On peut toujours supposer, dans cette égalité, l'exposant m positif, en donnant à p un signe convenable, ou, ce qui revient au même, en remplaçant i par $-i$. On développera alors le premier membre par la formule du binôme, et on le ramènera à la forme

$$V + iV'.$$

U sera la valeur de $\cos mp$, V celle de $\sin mp$, développées suivant les puissances et les produits de $\cos p$ et de $\sin p$.

Nous n'insisterons pas ici sur les autres conséquences de la formule (2).

§ IV.

Puissances fractionnaires des quantités géométriques. — Équation binôme.

67. Considérons maintenant l'opération inverse de l'élévation aux puissances, l'extraction des racines.

La racine $m^{\text{ième}}$ de r_p est définie par l'équation

$$w^m = r_p$$

Or, si l'on prend une quantité géométrique ayant pour module $r^{\frac{1}{m}}$ et pour argument $\frac{p}{m}$, il résulte de ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, que la puissance $m^{\text{ième}}$ de cette quantité sera r_p. On aura donc

$$\sqrt[m]{r_p} = (r_p)^{\frac{1}{m}} = (r^{\frac{1}{m}})_{\frac{p}{m}}.$$

68. Nous avons remarqué (art. 39) que si l'on donne, comme cela a lieu généralement, une quantité géométrique par sa position sur le plan ou par ses composantes rectangulaires, l'argument p n'est déterminé qu'à un multiple quelconque de 2π près, de sorte qu'on pourra toujours le représenter par

$$p + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier indéterminé, positif, nul ou négatif. Donc l'argument de $\sqrt[m]{r_p}$, ou plutôt de $\sqrt[m]{r_{p+2k\pi}}$, aura pour valeur un quelconque des angles compris dans la formule

$$\frac{p}{m} + \frac{2k\pi}{m},$$

tandis que le module de cette racine aura une valeur arithmétique $r^{\frac{1}{m}}$ parfaitement déterminée.

Les directions distinctes qui répondront aux diverses déterminations de $\sqrt[m]{r_p}$, s'obtiendront en donnant à k les m valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-1.$$

Les directions qui correspondent à des valeurs de k différant entre elles d'un multiple de m, se confondront ensemble.

69. On peut représenter d'une manière très simple la multiplicité de valeurs d'une puissance fractionnaire d'une quantité géométrique.

Sur le cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine, élevons un cylindre de révolution, et traçons sur ce cylindre une hélice d'un pas quelconque, que nous pourrons supposer infiniment petit. Prenons cette hélice pour directrice d'un hélicoïde gauche, ayant pour axe l'axe du cylindre, et dont nous pourrons supposer les génératrices terminées toutes à cet axe (*).

En prenant pour unité d'arc d'hélice l'arc qui a pour projection l'unité d'arc de cercle, la spire de l'hélice ayant ainsi pour mesure le nombre 2π, nous pourrons représenter la quantité géométrique r_p par une génératrice de l'hélicoïde ayant pour longueur r, et interceptant, à partir de l'origine des arcs d'hélice (que nous supposerons coïncider avec l'origine des arcs de cercle), un arc égal à p. Si l'on imagine le pas de l'hélice infiniment petit, les diverses nappes de l'hélicoïde viendront coïncider avec le plan horizontal, qui se trouvera ainsi composé d'une infinité de nappes superposées.

Une quantité géométrique donnée par un point du plan horizontal sera représentée sur l'hélicoïde par un quelconque des points de cette surface situés sur la verticale du point donné. Les rayons vecteurs ou les modules de tous ces points seront égaux au module de la projection. Mais les arguments, mesurés par les arcs d'hélice interceptés par les rayons vecteurs à partir de l'origine commune, seront égaux à l'un quelconque d'entre eux, à celui, par exemple, qui a même valeur numérique p que l'argument de la projection, plus ou moins un nombre entier quelconque de spires de l'hélice. Ces arguments sont donc représentés par la formule

$$p + 2k\pi,$$

l'entier k pouvant prendre toutes les valeurs $\gtreqless 0$. Ainsi, les

(*) On supposerait les génératrices prolongées dans les deux sens à partir de l'axe, si l'on voulait introduire la considération des modules négatifs.

quantités géométriques de même projection r_p auront pour formule générale

$$r_{p+2k\pi}.$$

70. Si l'on élève $r_{p+2k\pi}$ à une puissance quelconque m, cette puissance aura pour expression

$$(r^m)_{mp+2km\pi},$$

et le module r^m de cette puissance sera, dans tous les cas, une quantité arithmétique déterminée.

Si l'exposant m est entier, les différentes valeurs de l'argument

$$mp + 2km\pi$$

différeront entre elles de multiples exacts de 2π. Elles correspondront donc à des directions dont les projections se confondront; de sorte que toutes les valeurs de

$$(r_{p+2k\pi})^m$$

seront des quantités géométriques égales, les points de l'hélicoïde qui les représentent étant tous situés sur une même verticale.

Lorsque, au lieu de l'entier m, on prend pour exposant une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers premiers entre eux, les restes de la division km par n seront, dans un ordre quelconque, les n nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1,$$

lorsqu'on donnera à k toutes les valeurs possibles. Donc les valeurs de l'argument

$$\frac{m}{n}p + 2k\frac{m}{n}\pi$$

seront de la forme

$$\frac{m}{n}p + \frac{2\mu\pi}{n} + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif, et μ un des n nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n-1.$$

En faisant abstraction du terme $2k\pi$, on voit que les valeurs de l'argument correspondent à n directions distinctes, partageant

la circonférence de base en n parties égales. Donc les points de l'hélicoïde qui représenteront les diverses valeurs de

$$(r_{p+2k\pi})^{\frac{m}{n}}$$

se trouveront sur n verticales différentes, distribuées régulièrement sur la surface d'un cylindre de rayon $r^{\frac{m}{n}}$, et elles auront n projections distinctes, qui diviseront en n parties égales la circonférence de base de ce cylindre.

Donc, tant que l'argument p n'est connu qu'à un multiple de 2π près, la puissance fractionnaire $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ aura n valeurs distinctes, de même module, mais d'arguments différents. En d'autres termes, l'équation

$$z^n = (a+ib)^m$$

a n racines distinctes, lorsque m et n sont premiers entre eux, et en particulier lorsque $m = 1$ (*).

(*) Si m n'est pas premier avec n, remplaçons m et n par λm, λn. L'équation deviendra

$$z^{\lambda n} = (a+ib)^{\lambda m}.$$

Si l'on met $(a+ib)^{\lambda m}$ sous la forme

$$(\rho^{\lambda m})_{\lambda m(\varphi+2k\pi)},$$

on aura, sans ambiguïté,

$$z^n = (\rho^m)_{m(\varphi+2k\pi)},$$

m et n étant premiers entre eux. Il y aura donc n solutions.

Mais, si l'on écrivait

$$(a+ib)^{\lambda m} = (\rho^{\lambda m})_{\lambda m\varphi+2k\pi},$$

l'argument de z serait

$$\frac{m}{n}\varphi + \frac{2k}{\lambda n}\pi,$$

le résidu de $\frac{k}{\lambda n}$ étant susceptible de λn valeurs, tandis que celui de $\frac{\lambda mk}{\lambda n}$ n'en avait que n.

On aura donc n ou λn solutions, suivant que l'on supposera donnée la valeur de $a+ib$ ou celle de $(a+ib)^{\lambda n}$.

71. Examinons spécialement le cas de la racine carrée. On voit que, si $\overline{OA} = r_p$ ou $r_{p+2k\pi}$, on obtiendra la valeur de la racine carrée de $\overline{OA}$, ou la valeur de $(r^{\frac{1}{2}})_{\frac{p}{2}+k\pi}$, en construisant une moyenne proportionnelle OB entre les longueurs O1 et OA, et portant OB sur la bissectrice de l'angle AOx ou sur son prolongement OB′, suivant que k sera pair ou impair.

Fig. 21.

72. Si l'on propose, en particulier, d'extraire la racine carrée d'une quantité négative

$$-r = r_{\pi+2k\pi},$$

on pourra d'abord faire abstraction du module, puisque l'on a, en général,

$$(r_p)^m = r^m . (1_p)^m,$$

et qu'ainsi il suffit, dans tous les cas, d'opérer sur 1_p, et de multiplier le résultat par la valeur arithmétique de la puissance du module.

Or, on a

$$(1_{\pi+2k\pi})^{\frac{1}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}+k\pi} = \pm 1_{\frac{\pi}{2}},$$

selon que k est pair ou impair, en posant donc, comme nous l'avons déjà fait (art. 63),

$$1_{\frac{\pi}{2}} = i,$$

la valeur générale de la racine carrée de $-1 = 1_{(2k+1)\pi}$ sera $\pm i$. Donc

$$\sqrt{-r} = \pm i\sqrt{r}.$$

73. Supposons enfin que l'on fasse tendre $\frac{m}{n}$ vers un nombre incommensurable α. Le module de $(r_p)^{\frac{m}{n}}$ tendra vers une limite déterminée r^α. Mais les n points du cercle, qui déterminent les n valeurs de l'argument, deviendront infiniment nombreux et infiniment rapprochés, de sorte qu'il y aura toujours une des valeurs de

l'argument qui aura pour limite un angle quelconque choisi arbitrairement.

Donc si, comme c'est le cas ordinaire, r_p n'est donné que par sa projection sur le plan, et non par sa position même sur l'hélicoïde, c'est-à-dire si l'on ne connaît l'argument de r_p qu'à un multiple de 2π près, une puissance incommensurable de r_p aura bien un module déterminé r^α, mais l'argument de cette puissance sera absolument indéterminé; de sorte que $(r_p)^\alpha$ sera représenté par un point quelconque du cercle de rayon r^α. En d'autres termes, si l'on pose

$$x + iy = (a + ib)^\alpha ,$$

x et y pourront prendre toutes les valeurs pour lesquelles on aura

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^\alpha .$$

On ne pourra donc faire usage de la fonction $(r_p)^\alpha$, pour α incommensurable, que lorsqu'on pourra se contenter de connaître les limites entre lesquelles cette quantité est renfermée, ce qui arrivera, par exemple, si r est infiniment petit.

§ V.

Des équations algébriques.

74. D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, une équation binôme, qui, en quantités réelles, pouvait avoir au plus deux racines, quelquefois une seule ou même aucune, aura maintenant dans tous les cas, par l'introduction des quantités géométriques et la généralisation des opérations, autant de racines distinctes qu'il y a d'unités dans son degré, quel que soit ce degré.

On peut conclure de là que toute équation algébrique résoluble par radicaux, c'est-à-dire pouvant se ramener à la résolution des équations binômes, sera toujours susceptible d'une solution en quantités complexes, d'où l'on conclut, par le raisonnement connu, qu'elle admettra toujours un nombre de racines égal à son degré. Tel est, en particulier, le cas des équations des quatre premiers degrés.

Mais cette propriété s'étend aussi à toute équation algébrique d'un degré quelconque. On sait que, pour le démontrer, il suffit de faire voir que toute équation algébrique, à coefficients réels ou

complexes, admet au moins une racine complexe, de la forme r^p ou $x + iy$. Nous allons reproduire ici la démonstration de ce théorème donnée par Legendre, en la présentant à peu près sous la même forme qu'Argand (art. 12).

75. Soit

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$$

un polynôme entier et rationnel de degré m, dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sont des quantités quelconques, réelles ou complexes. Pour chaque valeur de la variable

$$z = r_p = x + iy,$$

on pourra construire les divers termes du polynôme; en les ajoutant, on obtiendra un polygone, généralement ouvert, et le côté R_p qui fermera ce polygone, sera la valeur du polynôme $f(z)$.

Nous allons démontrer que, pour une valeur de z convenablement choisie, le polygone se ferme de lui-même, et que l'on a alors $R = 0$ ou $f(z) = 0$.

Remarquons d'abord que, pour une valeur infiniment grande du module de z, le module du premier terme $a_0 z^m$, c'est-à-dire $r^m \times \text{mod.} a_0$, finira par surpasser autant que l'on voudra le module de la somme des autres termes, et, par suite, l'extrémité finale du polygone s'éloignera autant que l'on voudra de l'origine.

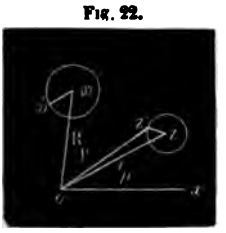
Il est évident, d'un autre côté, que, parmi les positions, en nombre infini, que peut prendre z dans toute l'étendue du plan, il y en a une qui donne pour le module R de $f(z)$ une valeur minimum, et, d'après la remarque précédente, ce module minimum ne peut correspondre qu'à une valeur finie du module de z. Il faut prouver maintenant que cette valeur minimum de R ne peut être autre que zéro.

76. Soit, s'il est possible, $w = R_p$ la valeur de $f(z)$, de module minimum, ce module étant différent de zéro, et soit z la valeur correspondante de la variable. Donnons à z un accroissement infiniment petit

$$dz = \rho_\varphi ,$$

et voyons quelle sera la forme de l'accroissement correspondant du polynôme $f(z)$

Fig. 22.



Le terme $a_0 z^m$ devient

$$a_0(z+dz)^m = a_0\left(z^m + mz^{m-1}dz + \varkappa dz^2\right),$$

$\varkappa$ désignant, abstraction faite de sa valeur numérique, une quantité qui ne devient pas infinie pour $dz = 0$. L'accroissement du terme en question sera donc

$$d.a_0 z^m = ma_0 z^{m-1}dz + \varkappa dz^2.$$

En calculant de même les accroissements des autres termes, et faisant la somme, on obtiendra, pour l'accroissement de $f(z)$, une expression de la forme

$$\left[ma_0 z^{m-1} + (m-1)a_1 z^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\right]dz + \varkappa dz^2,$$

où le coefficient de dz n'est autre chose que la dérivée de $f(z)$. Donc

$$d.f(z) = f'(z)dz + \varkappa dz^2.$$

Supposons d'abord que $f'(z)$ ne soit pas nul, et soit

$$f'(z) = \mathrm{R}'_{\mathrm{P}'}.$$

La valeur de $d.f(z)$ pourra s'écrire

$$d.f(z) = (\mathrm{R}'\rho)_{\mathrm{P}'+\varphi} + \varkappa(\rho^2)_{2\varphi},$$

expression qui, pour ρ infiniment petit, *différera infiniment peu* de son premier terme. Donc, en supposant que l'on fasse décrire au point $z + dz$ un cercle de rayon infiniment petit ρ autour du point z, le module de $df(z)$ différera infiniment peu de $\mathrm{R}'\rho$, et son argument différera infiniment peu de $\mathrm{P}' + \varphi$. Donc le point $w' = f(z+dz)$ décrira autour de w une courbe infiniment peu différente d'un cercle, et dont le rayon vecteur fera, avec le rayon vecteur du cercle décrit autour de z, un angle presque constant et infiniment peu différent de P'.

Lors donc que l'on fera parcourir à $z + dz$ le cercle complet autour de z, la fonction $f(z+dz)$ devant, au bout de cette révolution, reprendre sa valeur primitive, décrira complètement la courbe fermée autour de w, et rencontrera par conséquent le rayon vecteur Ow quelque part entre O et w, si l'on a pris ρ assez petit pour avoir $\mathrm{R}'\rho < \mathrm{R}$, ce qui est toujours possible, tant que R n'est pas nul. Mais alors, pour la valeur de φ qui répond à cette

rencontre, le module de $f(z+dz)$ est moindre que celui de $f(z)$. Donc le module de $f(z)$ n'était pas un minimum, comme on l'avait d'abord supposé.

Nous avons admis, dans cette démonstration, que $f'(z)$ n'était pas nul. Si l'on avait $f'(z)=0$, on pousserait le développement plus loin, et, en désignant par

$$\frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n} = \mathrm{R}'_{\mathrm{P}'}$$

le coefficient de la puissance la moins élevée de dz qui ne disparaisse pas, on aurait

$$df(z) = \frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n}\,dz^n + \varkappa dz^{n+1} = (\mathrm{R}'\rho^n)_{\mathrm{P}'+n\varphi} + \varkappa(\rho^{n+1})_{(n+1)\varphi},$$

expression qui diffère infiniment peu de son premier terme. On verrait de même que si $z+dz$ fait le tour de z sur un cercle infiniment petit, ou seulement la $n^{\text{ième}}$ partie de ce tour, $f(z+dz)$ fera le tour complet de w, et l'on en conclura de la même manière que le module de $f(z)$ ne peut pas être un minimum, s'il est différent de zéro.

Donc puisque ce minimum existe, et qu'il ne peut pas être différent de zéro, il est nécessairement égal à zéro. Donc l'équation

$$f(z) = 0$$

a au moins une racine de la forme r_p ou $x+iy$, d'où l'on conclut ensuite qu'elle en a non-seulement une, mais m, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans son degré.

Ce théorème démontré, on peut établir alors d'une manière générale toutes les propriétés fondamentales des équations algébriques.

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET CIRCULAIRES D'UNE VARIABLE COMPLEXE, ET DE LEURS FONCTIONS INVERSES.

§ I^er^.

Des exponentielles à exposant complexe.

77. De l'équation

$$1_p \cdot 1_q = 1_{p+q}$$

il résulte que la fonction 1_p jouit de la propriété générale exprimée par l'équation fonctionnelle

$$\varphi(p)\cdot\varphi(q) = \varphi(p+q), \tag{1}$$

laquelle caractérise, comme on sait, les exponentielles réelles. On est donc conduit à rapprocher la fonction 1_p des exponentielles.

Or, si l'on développe en série l'expression

$$1_p = \cos p + i \sin p,$$

il vient

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} - \frac{p^2}{2!} - \frac{ip^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + \dots,$$

ce que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$1_p = 1 + \frac{ip}{1} + \frac{(ip)^2}{2!} + \frac{(ip)^3}{3!} + \frac{(ip)^4}{4!} + \dots.$$

Le second membre de cette égalité n'est autre chose que ce que devient le développement de l'exponentielle

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \tag{2}$$

lorsqu'on y remplace x par ip.

Si donc on prend cette série, qui est toujours convergente, pour définition de l'exponentielle e^x, la même définition, appliquée au cas où l'on remplace x par ip, donnera pour résultat 1_p. Il sera donc naturel de désigner cette quantité 1_p par le symbole e^{ip}, de sorte que l'extension de la définition de l'exponentielle par la série, pour le cas de l'exposant imaginaire, s'obtiendra en posant

$$e^{ip} = 1_p.$$

Cette exponentielle imaginaire ainsi définie satisfaisant, comme l'exponentielle réelle, à l'équation caractéristique (1), sur laquelle est fondé tout le calcul des exponentielles, il s'ensuit de là que le calcul des exponentielles imaginaires se fera par les mêmes règles que celui des exponentielles réelles.

Remarquons en particulier les équations suivantes, qui résultent de cette définition :

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = +1 ,$$

k étant un nombre entier quelconque; et de même

$$e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i} = -1 ,$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{(2k+\frac{1}{2})\pi i} = +i ,$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = e^{(2k-\frac{1}{2})\pi i} = -i .$$

78. Si, dans l'équation de définition (2), on remplace x successivement par deux quantités quelconques u et v, on prouve réciproquement, par des identités algébriques, qu'il résulte de cette définition l'égalité

$$e^u . e^v = e^{u+v},$$

c'est-à-dire que toutes les fois que l'on prend l'équation (2) pour définition de l'exponentielle à exposant quelconque, réel, imaginaire ou complexe, cette exponentielle satisfait toujours à l'équation fonctionnelle (1).

Donc les règles du calcul des exponentielles, définies par l'équation (2), subsisteront, quelle que soit la nature de l'exposant, et l'on aura, pour des valeurs quelconques de u et de v,

$$e^u . e^v = e^{u+v} ,$$

$$\frac{e^u}{e^v} = e^{u-v} ,$$

$$(e^u)^m = e^{mu} .$$

m étant une quantité réelle quelconque.

Si l'on remplace m par une quantité complexe quelconque v, nous prendrons pour définition de la puissance $(e^u)^v$ l'équation

$$(e^u)^v = e^{uv} = (e^v)^u ,$$

qui est une extension de la formule établie pour les exposants réels.

79. Nous pouvons maintenant remplacer la notation provisoire, que nous avions employée jusqu'ici pour représenter les quantités géométriques, par une notation plus commode et plus expressive. On a, d'après ce qu'on vient de voir,

$$r_p = r \cdot 1_p = re^{ip} .$$

C'est sous cette dernière forme que nous représenterons désormais les quantités géométriques dont la multiplication et l'élévation aux puissances rentreront dès lors complètement dans les règles générales de l'algèbre des quantités réelles.

80. Étudions maintenant les propriétés de la fonction exponentielle e^z, dont l'exposant z est une quantité complexe, de la forme $x + iy$.

On a (art. 78)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) ,$$

d'où l'on voit que cette expression se présente elle-même sous la forme complexe, e^x étant le module, et y l'argument.

On a, de plus (art. 77),

$$e^{z+2k\pi i} = e^z . e^{2k\pi i} = e^z . 1 = e^z .$$

Donc l'exponentielle e^z ne change pas de valeur, lorsqu'on augmente la variable z d'un multiple quelconque de la quantité imaginaire $2\pi i$; de sorte que, si l'on fait varier z de manière à le faire croître de $2\pi i$ ou d'un multiple de $2\pi i$, la fonction e^z reprendra sa valeur primitive. On dit pour cette raison que e^z est une fonction *périodique* de z, dont l'*indice de périodicité* ou la *période* est $2\pi i$.

Fig. 23.

Représentons géométriquement cette périodicité. Soit $z = x + iy$ un point du plan, y étant d'abord supposé positif et moindre que 2π. Si l'on mène par ce point une parallèle à l'axe des y, et que, de part et d'autre de z, on porte sur cette parallèle, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, on obtiendra une suite indéfinie de points

$$\cdots , z_{-2} , z_{-1} , z , z_1 , z_2 , \cdots ,$$

pour lesquels la fonction e^z aura la même valeur.

Réciproquement, il est aisé de voir que ces points sont les seuls pour lesquels e^z ait la valeur considérée.

Si, de part et d'autre de l'origine O, on porte de même sur l'axe des y, à la suite les unes des autres, des longueurs égales à 2π, et que, par les points de division, on mène des parallèles à Ox, ces parallèles partageront le plan en bandes horizontales, de hauteur 2π, et de longueur infinie dans les deux sens, et dont chacune comprendra évidemment un des points

$$\ldots, z_{-2}, z_{-1}, z, z_1, z_2, \ldots,$$

et un seul. Ces points seront placés de la même manière dans leurs bandes respectives, de sorte que deux de ces points viendront coïncider l'un avec l'autre, si l'on fait glisser l'une des bandes le long de l'axe des y, jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur l'autre.

Il résulte de là que, dans chacune de ces bandes, la fonction e^z parcourt la serie complète de ses valeurs, et qu'elle y prend chaque valeur une seule fois.

Si l'on fait décrire à z une courbe quelconque dans une des bandes, ce qui donnera une certaine série de valeurs de e^z, on obtiendra la même série de valeurs en faisant décrire à z une courbe égale située de la même manière par rapport à une autre bande quelconque.

81. On verrait absolument de la même manière que la fonction

$$e^{iz}$$

est également périodique, sa période étant la quantité réelle 2π.

On représenterait géométriquement la périodicité comme nous venons de le faire, avec cette seule différence, que les bandes, au lieu d'être parallèles à l'axe des x, seraient parallèles à l'axe des y.

§ II.

Des fonctions circulaires.

82. Des équations

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p,$$
$$e^{-ip} = \cos p - i \sin p,$$

on tire

$$\cos p = \frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2},$$

$$\sin p = \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i}.$$

Nous prendrons ces équations, établies pour le cas de p réel, pour définitions des fonctions *cosinus* et *sinus*, dans le cas où l'on remplacera p par une variable complexe z. Nous poserons ainsi, quel que soit z

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Si l'on remplace z par $x + iy$, ces valeurs deviendront

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{Ch} y - i \sin x \operatorname{Sh} y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y,$$

$\operatorname{Ch} y$ et $\operatorname{Sh} y$ représentant les *fonctions hyperboliques*

$$\operatorname{Ch} y = \cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2},$$

$$\operatorname{Sh} y = \frac{1}{i} \sin iy = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}.$$

Ainsi $\cos z$ et $\sin z$ se ramènent à la forme complexe, lorsque z est une quantité complexe.

83. Les exponentielles e^{iz}, e^{-iz} dont les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont formées par addition et soustraction, ayant l'une et l'autre pour période 2π, ces fonctions elles-mêmes auront aussi pour période 2π, de sorte que l'on aura, k étant un entier quelconque,

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z,$$
$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur 2π, les deux fonctions $\cos z$ et $\sin z$ prendront, dans chacune de ces bandes, la totalité de leurs valeurs.

Mais on ne pourra plus dire, comme pour l'exponentielle, que

ces fonctions ne prennent la même valeur qu'une seule fois dans chaque bande. Considérons, en effet, la fonction

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Il est clair qu'elle ne change pas de valeur lorsqu'on remplace z par $-z$. On a donc

$$\cos(-z) = \cos z,$$

et, plus généralement,

$$\cos(-z + 2k\pi) = \cos(z + 2k'\pi),$$

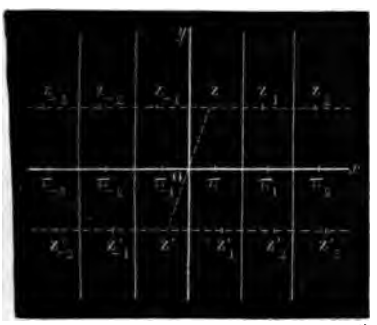
quels que soient les entiers k et k'. De là résulte que $\cos z$ reprend la même valeur non-seulement pour les points

$$\ldots, z_{-1}, z, z_1, \ldots$$

situés dans chaque bande sur une même parellèle à Ox, mais encore pour les points

$$\ldots, z'_1, z', z'_{-1}, \ldots$$

Fig. 21.



disposés symétriquement aux premiers par rapport à l'origine O, et formant une seconde série de points équidistants, rangés sur une autre parallèle à Ox.

Donc la fonction $\cos z$ passe, dans chaque bande, deux fois par la même valeur, et il est aisé de voir que les deux points d'une même bande auxquels répondent deux valeurs égales sont placés symétriquement par rapport aux points

$$\ldots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \ldots,$$

qui occupent sur l'axe des x le milieu de chaque bande.

Si donc on fait décrire à z une courbe quelconque, la série des valeurs de $\cos z$ correspondante aux divers points de cette courbe se reproduira non-seulement pour les courbes égales, disposées de la même manière par rapport aux autres bandes, mais encore pour les courbes symétriques de celles-là par rapport aux points π, *centres* de ces bandes.

84. On pourrait discuter de même directement la fonction $\sin z$.

Mais on peut aussi ramener immédiatement sa discussion à celle de $\cos z$. En effet, on a

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{1^{\frac{\pi}{2}}} = e^{-\frac{\pi i}{2}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})} - e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})} + e^{i\pi}\cdot e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(z-\frac{\pi}{2})}\right)\\ &= \cos(z-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-z).\end{aligned}$$

On aura donc, non-seulement

$$\sin z = \cos(z-\frac{\pi}{2}+2k\pi) = \sin(z+2k\pi),$$

mais encore

$$\sin z = \cos(-z+\frac{\pi}{2}) = \sin\left[\frac{\pi}{2}-(z-\frac{\pi}{2})\right] = \sin(\pi-z),$$

d'où l'on conclura que la fonction $\sin z$ prend, dans chaque bande, la totalité de ses valeurs, et chaque valeur deux fois dans la même bande.

85. La fonction

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

pouvant se mettre sous la forme

$$\operatorname{tang} z = -\frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1},$$

est liée à e^{2iz} par une équation du premier degré, et aura la même période que cette exponentielle, c'est-à-dire la période π, de sorte qu'on aura, quel que soit l'entier k,

$$\operatorname{tang}(z+k\pi) = \operatorname{tang} z.$$

Si l'on partage le plan en bandes verticales de largeur π, tang z prendra dans chaque bande la totalité de ses valeurs, et chaque valeur une seule fois.

86. Ce que nous venons de dire des fonctions circulaires, s'appliquerait aux fonctions hyperboliques

$$\operatorname{Ch} z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{Sh} z = \frac{1}{i} \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{Th} z = \frac{1}{i} \operatorname{tang} iz = \frac{\operatorname{Sh} z}{\operatorname{Ch} z},$$

au seul changement près des bandes verticales en bandes horizontales, et de l'indice de périodicité 2π en $2\pi i$.

§ III.

Des logarithmes.

87. Nous avons vu que la fonction e^z, dans chacune des bandes horizontales de largeur 2π dans lesquelles on divise le plan, prend la série complète de ses valeurs, et prend chaque valeur une seule fois.

Réciproquement, étant donnée *a priori* une valeur quelconque de la fonction e^z, il est facile de voir que l'on pourra toujours assigner à z une valeur qui fasse prendre à e^z la valeur donnée, et de cette valeur de z on en déduira une infinité d'autres, situées chacune dans chaque bande de largeur 2π.

Posons, en effet,

$$e^z = w = u + iv, \tag{1}$$

$w = u + iv$ étant la valeur donnée, et cherchons à déterminer pour z une valeur de la forme $x + iy$. En identifiant

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

avec $u + iv$, il vient

$$e^x \cos y = u,$$
$$e^x \sin y = v,$$

d'où (art. 48, *remarque*)

$$x = \log\sqrt{u^2+v^2},$$
$$y = \text{arc tang}\frac{v}{u}.$$

Si l'on observe que les arcs qui ont pour tangente $\frac{v}{u}$, et dont le sinus et le cosinus ont respectivement les signes de v et de u, ont une infinité de valeurs, différant entre elles par un multiple quelconque de 2π, et que l'on représente par arc tang $\frac{v}{u}$ l'une d'entre elles, la plus petite valeur positive, par exemple, la valeur générale de y sera alors

$$y = \text{arc tang}\frac{v}{u} + 2k\pi.$$

En appelant donc *logarithme* de $w = u+iv$ la fonction z inverse de l'exponentielle, et définie par l'équation (1), on aura

$$(2) \quad \log(u+iv) = \log\sqrt{u^2+v^2} + i\,\text{arc tang}\frac{v}{u} + 2k\pi i,$$

les fonctions logarithme et arc tangente du second membre étant prises dans leur sens arithmétique et restreint, tandis que la fonction logarithme du premier membre est prise dans le sens le plus général, au point de vue des quantités complexes.

Lorsqu'il est utile de distinguer par la notation le sens généralisé des fonctions de quantités complexes, on le fait, en les entourant, à l'exemple de Cauchy, de doubles parenthèses, et en écrivant le premier membre de l'équation précédente sous la forme

$$\log((u+iv)).$$

88. Si la valeur de l'exponentielle e^z était donnée sous la forme r_p ou re^{ip}, on aurait de même

$$(3) \quad \log(re^{ip}) = \log r + ip + 2k\pi i,$$

d'où l'on pourrait déduire immédiatement la formule (2).

En particulier, si w est une quantité réelle et positive, alors $p = 0$, $r_p = r$, et l'on a

$$\log((r)) = \log r + 2k\pi i.$$

Ainsi, parmi les valeurs en nombre infini de $\log((r))$, une seule est réelle : c'est la valeur arithmétique.

Si w est une quantité négative, $p = \pi$, d'où

$$\log((-r)) = \log r + (2k+1)\pi i .$$

89. D'après cela, les valeurs représentées par les formules (2) ou (3) ont toutes même partie réelle, et sont disposées dans chaque bande sur une même parallèle à l'axe des y, comme les diverses valeurs de z dans la *fig. 23* (p. 52).

On voit que la fonction inverse d'une fonction périodique est une fonction *multiforme*, susceptible, pour chaque valeur de la variable, d'une infinité de déterminations, qui diffèrent entre elles par des multiples d'un même intervalle constant.

§ IV.

Fonctions circulaires inverses.

90. Considérons d'abord la fonction inverse du cosinus, c'est-à-dire la valeur de $z = \text{arc cos } w$, déterminée par la formule

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = u + iv = w .$$

On tire de cette équation

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 ,$$

d'où

$$e^{iz} = w + \sqrt{(w+1)(w-1)} ,$$

$$z = \frac{1}{i} \log\left[w + \sqrt{(w+1)(w-1)}\right] .$$

Si l'on pose

$$w + 1 = \rho' e^{i\varphi'} \quad , \quad w - 1 = \rho'' e^{i\varphi''} \quad ,$$

$$\sqrt{\rho'\rho''} = \rho \quad , \quad \frac{\varphi' + \varphi''}{2} = \varphi \quad .$$

d'où

$$\sqrt{w^2 - 1} = \rho e^{i\varphi} = s + it ,$$

la valeur de z prendra la forme

$$z = \frac{1}{i} \log\left[u + s + i(v + t)\right] ,$$

et nous avons vu comment cette valeur peut se ramener à la forme complexe.

Remarquons d'abord que, les angles φ', φ'' pouvant être remplacés par $\varphi'+2k'\pi$, $\varphi''+2k''\pi$, φ pourra l'être par

$$\varphi+(k'+k'')\pi, \quad \text{ou simplement} \quad \varphi+k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque. On a ainsi, pour le radical

$$\sqrt{w^2-1}=\rho e^{i(\varphi+k\pi)},$$

deux valeurs égales et de signe contraire, suivant que k est pair ou impair. Donc z est susceptible de deux séries de valeurs, que l'on peut représenter par

$$z'=\frac{1}{i}\log((w+\sqrt{w^2-1})),$$

$$z''=\frac{1}{i}\log((w-\sqrt{w^2-1})).$$

Les deux quantités $w+\sqrt{w^2-1}$, $w-\sqrt{w^2-1}$ ayant pour produit l'unité, leurs logarithmes seront égaux et de signes contraires, et il en sera de même pour les valeurs z', z''.

Donc enfin la valeur générale de $z=\arccos((u+iv))$ pourra se mettre sous la forme (art. 48, *rem.*)

$$\arccos((u+iv))$$
$$=\pm\left\{\operatorname{arc\,tang}\frac{v+t}{u+s}+\frac{1}{i}\log\sqrt{(u+s)^2+(v+t)^2}\right\}+2k\pi,$$

en posant

$$\rho=\sqrt{[(u+1)^2+v^2]\,[(u-1)^2+v^2]},$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2uv}{u^2-v^2-1},$$

$$s+it=\rho e^{i\varphi}.$$

On voit que les différentes valeurs de z sont distribuées sur le plan, comme l'indique la *fig. 24* (p. 55).

On obtiendrait de même la valeur de

$$\arcsin w=\frac{\pi}{2}-\arccos w.$$

91. Passons maintenant à la fonction inverse de la tangente,

$$z=\operatorname{arc\,tang} w,$$

déterminée par la formule

$$w = \operatorname{tang} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\,.$$

On a, d'après cette équation de définition,

$$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}\,,$$

$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}\,.$$

En faisant $w = re^{ip}$, on a, d'après le paragraphe précédent,

$$z = \operatorname{arc\,tang}(re^{ip}) = \frac{1}{2i}\left[\log(1+ire^{ip}) - \log(1-ire^{ip})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2r\cos p}{1-r^2} + \frac{i}{4}\log\frac{1+2r\sin p+r^2}{1-2r\sin p+r^2} + k\pi\,,$$

ou, sous une autre forme,

$$\operatorname{arc\,tang}(u+iv)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2u}{1-u^2-v^2} + \frac{i}{4}\log\frac{(1+v)^2+u^2}{(1-v)^2+u^2} + k\pi\,.$$

§ V.

Exponentielles et logarithmes à base complexe.

92. Jusqu'ici nous n'avons considéré que les exponentielles relatives à la base e, à laquelle se ramènent immédiatement les exponentielles relatives à une base réelle et positive quelconque a, puisque l'on a

$$a^z = e^{z\log a}\,,$$

$\log a$ désignant le logarithme arithmétique du nombre positif a.

Voyons ce que donnent les règles de calcul établies jusqu'ici, lorsqu'on les applique au cas où a est remplacé par un nombre complexe de la forme $a+ib$, que nous pouvons toujours ramener (§ III) à la forme

$$e^{\lambda+i\mu}\,.$$

On a alors

$$(a+ib)^z = \left(e^{\lambda+i\mu}\right)^{x+iy} = e^{\lambda x-\mu y+i(\mu x+\lambda y)}\,,$$

quantité qui se ramène encore à la forme complexe.

Si la base est donnée sous la forme $a + ib$, son argument μ n'étant connu qu'à un multiple de 2π près, la valeur générale de l'exponentielle sera en réalité

$$e^{\lambda x-(\mu+2k\pi)y} \cdot e^{i[(\mu+2k\pi)x+\lambda y]}.$$

Ici le module, comme l'argument, dépend de k, et l'un et l'autre sont susceptibles d'une infinité de valeurs, correspondantes à la fois à des distances et à des directions différentes.

Pour $y = 0$, l'exposant étant réel, le module de l'exponentielle est déterminé; l'argument seul a une infinité de valeurs, tant que x n'a pas une valeur rationnelle. Dans ce cas l'exponentielle, comme nous l'avons déjà vu dans l'article 73, sera représentée par un point quelconque d'un cercle de rayon e^{x}.

Pour $x = 0$, l'exposant étant imaginaire, l'argument sera déterminé; mais le module aura une infinité de valeurs en progression arithmétique, correspondante à des points en ligne droite.

Dans le cas général, on voit, en faisant varier k, que, pour des arguments croissant en progression arithmétique, on a des modules ou rayons vecteurs croissant en progression géométrique. Donc tous les points obtenus en donnant à k différentes valeurs sont situés sur une même spirale logarithmique, et les rayons vecteurs de deux points consécutifs font entre eux un angle constant (*).

On a donc ici affaire à une fonction multiforme, comme les logarithmes ou les arcs de cercle. Comme les points qui représentent les diverses valeurs sont séparés les uns des autres par des intervalles finis (sauf pour les valeurs infinies de k pour lesquelles ces points tendent vers l'origine, point asymptotique de la spirale), on pourra les séparer les uns des autres de manière à choisir celui qui convient à la question. Donc la fonction

$$(a + ib)^{x+iy},$$

dans le cas où y n'est pas nul, remplit les conditions nécessaires pour être admise en analyse.

93. Nous supposons ici l'exposant $x + iy$ complètement déterminé. Si l'on se contentait, comme on peut le faire dans le cas

(*) J. Warren, *On the geometrical representation of the powers*, etc., art. 42 et 50. (*Philos. Transact.*, 1829.)

d'une base réelle et positive, de donner l'exposant à un multiple de $2\pi i$ près, l'exponentielle deviendrait alors, en remplaçant y par $y + 2h\pi$,

$$e^{\lambda x-(\mu+2k\pi)(y+2h\pi)} \cdot e^{i[(\mu+2k\pi)x+\lambda(y+h\pi)]}$$

Les points qui représentent les valeurs de cette fonction sont alors distribués sur une infinité de spirales logarithmiques. Mais pour des distances de l'origine, finies et différentes de zéro, les points seraient encore séparés par des intervalles finis, et la fonction admissible.

94. Pour que la fonction

$$(a + ib)^z = e^{(\lambda+i\mu)z}$$

reprenne la même valeur, lorsqu'on changera z en $z + g$, il faut et il suffit que l'exposant de e croisse d'un multiple de $2\pi i$, c'est-à-dire que l'on ait, n étant entier

$$(\lambda + i\mu)g = 2n\pi i,$$

$$g = \frac{2n\pi i}{\lambda + i\mu} = \frac{2n\pi(\mu + i\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Donc la fonction $(a + ib)^z$ est périodique comme dans le cas d'une base réelle, et sa période est la quantité complexe

$$\frac{2\pi(\mu + i\lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}$$

Mais il faut remarquer que μ étant susceptible d'une infinité de valeurs de la forme $\mu + 2k\pi$, la période n'est plus la même en passant d'une valeur à l'autre. Elle tend vers zéro pour $k = \pm\infty$. C'est ce qu'éclaircira encore l'article suivant.

95. Proposons-nous maintenant le problème inverse : trouver la fonction

$$z = \log w,$$

déterminée par l'équation

$$(a + ib)^z = w = u + iv,$$

ou, en exprimant $a + ib$ et $u + iv$ au moyen de leurs logarithmes,

$$e^{(\lambda+i\mu+2ik\pi)(x+iy)} = e^{s+it+2ih\pi}.$$

On en conclut, en identifiant les exposants,

$$\lambda x - (\mu + 2k\pi)y = s, \tag{1}$$

$$(\mu + 2k\pi)x + \lambda y = t + 2h\pi. \tag{2}$$

En éliminant k entre ces deux équations, on en tire

$$\lambda(x^2 + y^2) - sx - (t + 2h\pi)y = 0. \tag{3}$$

Les points satisfaisant à la question sont situés à l'intersection des droites représentées par l'équation (1) avec les cercles représentés par l'équation (3). Toutes les droites (1), ainsi que tous les cercles (3), rencontrent l'axe des x au point A, dont l'abscisse est $x = \frac{s}{\lambda}$, et tous les cercles passent par l'origine.

Les droites (1) rencontrent une parallèle aux x en une série de points équidistants. Les centres des cercles (3) forment une autre série de points équidistants.

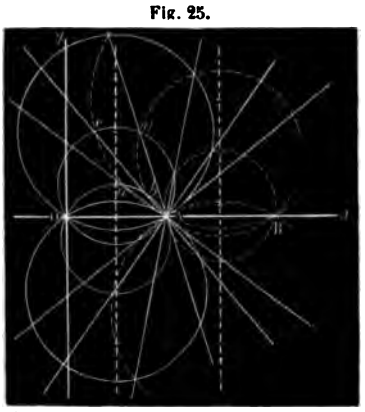
Pour $k = \pm\infty$, les points situés sur chaque cercle (3) convergent vers le point O.

Si l'on cherche le lieu des points pour lesquels la différence $h - k = g$ des indices est constante, on trouve, en éliminant k entre les équations (1) et (2), après y avoir remplacé h par $k + g$,

$$\lambda(x^2 + y^2) - (s +)x - (t - \mu + 2g\pi)y + s = 0,$$

équation d'une série de cercles passant au point A et au point de l'axe des x dont l'abscisse $= 1$, les centres étant distribués à intervalles égaux sur la droite $x = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}$.

Fig. 25.



Les deux systèmes de cercles dont les intersections déterminent les points z, partagent le plan en quadrilatères curvilignes tels que $abdc$, dont les points z forment les sommets.

Il est aisé de voir que, sur chaque droite (1), pour k constant, les points z sont distribués à des distances égales, ce qui correspond à la période de la fonction $(a + ib)^z$ dont il a été question dans l'article précédent. Cet intervalle change d'une droite à l'autre.

MÉMOIRE

SUR UNE MÉTHODE GÉNÉRALE AYANT POUR OBJET

LE DOSAGE VOLUMÉTRIQUE DE L'AZOTE
DANS SES DIVERSES COMBINAISONS

ET SUR UN NOUVEAU PROCÉDÉ

POUR PRÉPARER CE GAZ A L'ÉTAT DE PURETÉ DANS LES LABORATOIRES

PAR J.-P. PRAT

pharmacien

Quoique la science ne soit pas dépourvue de bonnes méthodes servant à déterminer, soit volumétriquement, soit pondéralement, la quantité d'azote contenue dans certains corps, je pense que l'on ne jugera pas comme tout à fait inutile que j'en propose une nouvelle, surtout si l'on considère qu'elle peut s'appliquer à l'analyse de tous les corps azotés, et qu'elle me paraît réunir ces conditions avantageuses : c'est d'être simple, commodément praticable, fort peu dispendieuse, expéditive et exacte.

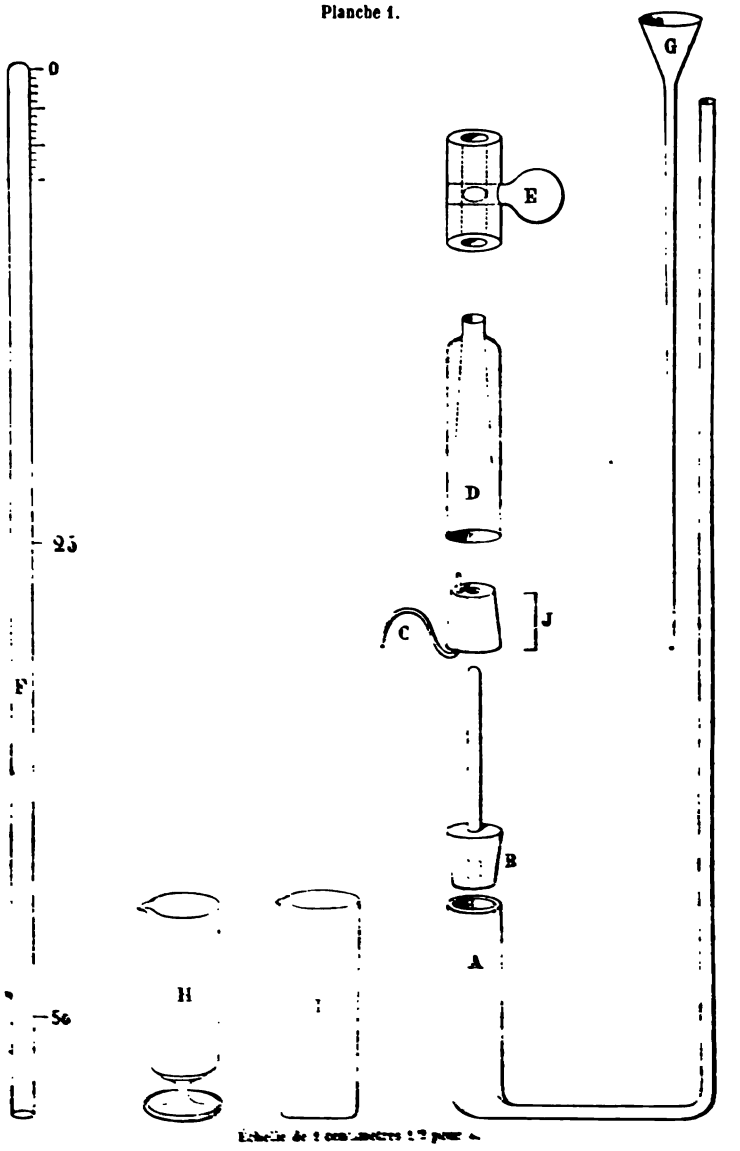
Le principe de cette méthode est fondé sur l'observation que je fis, il y a environ huit ans, que tout sel ammoniacal, en présence des hypochlorites, se décompose sur-le-champ, de manière à se convertir nettement en eau, en chlore et en azote, comme l'exprime l'équation suivante :

$$SO^3AzH^3, HO + {}^3(ClONaO) = SO^3NaO + {}^3(NaO) + {}^4(HO) + Cl^3 + Az$$

Comme on peut le remarquer, trois équivalents de chlore sont en présence de deux équivalents de soude seulement : $Cl^3 + {}^2(NaO) = NaCl + ClONaO + Cl$; l'hypochlorite se régénère

en partie, mais il reste encore un équivalent de chlore libre, ce qui nécessite l'alcalinisation préalable de l'hypochlorite pour fixer

Planche 1.



Échelle de 1 centimètre 1/2 pour A.

A Tube à mercure, tube en U dont l'une des deux branches gagne en largeur ce que l'autre perd en largeur.

B **Bouchon** du tube à mercure A. Ce bouchon est traversé par un tube droit offrant une ouverture capillaire à sa partie supérieure, tandis que l'ouverture inférieure est légèrement évasée.

C **Bouchon** portant un tube d'écoulement en forme d'S, et d'un très petit diamètre. Il est encore percé d'un trou central que remplit exactement la pièce J, sorte de cylindre plein du même diamètre que le tube du bouchon B.

D **Tube** à réaction.

E **Manchon** portant un robinet, et servant à rallier le tube à réaction D avec la cloche graduée F.

H **Burette** à mercure. *G* Entonnoir à longue douille effilée, servant à verser du mercure dans la branche du tube A.

I **Vase** pour recevoir le liquide s'écoulant par le tube en S.

complètement ce gaz, et obtenir à la suite de ces réactions de l'azote pur et sans mélange, si on le recueille convenablement.

La liqueur hypochloritée qui m'a paru fournir les meilleurs résultats est ainsi composée et préparée :

Chlorure de chaux sec et au titre	200 parties.
Carbonate de soude cristallisé.....	400 —
Soude à 40° (lessive des savonniers).....	50 —
Eau.....	2,000 —

Délayer l'hypochlorite d'abord avec très peu d'eau, dans un mortier de porcelaine pour le diviser autant que possible; ajouter par portions environ la moitié de l'eau prescrite; opérer, d'autre part, la dissolution du carbonate de soude, à chaud, dans le reste d'eau et la soude caustique; mêler les liqueurs en les agitant fortement, et filtrer le tout au papier.

Cette liqueur conserve sa force pendant plusieurs mois.

L'application du fait de l'action de cette liqueur sur les sels ammoniacaux a nécessité la création de deux appareils particuliers : l'un, servant à recueillir l'azote à l'abri du contact de l'air et à en mesurer le volume; l'autre, servant à la préparation de ce gaz en grande quantité.

(Voir ci-contre le dessin de l'appareil de dosage, suivi de la description de toutes ses pièces et accessoires.)

La planche II représente l'appareil monté et mis en état de fonctionner. Il me suffira de soumettre sommairement les indications les plus essentielles pour bien guider l'opérateur dans ce montage :

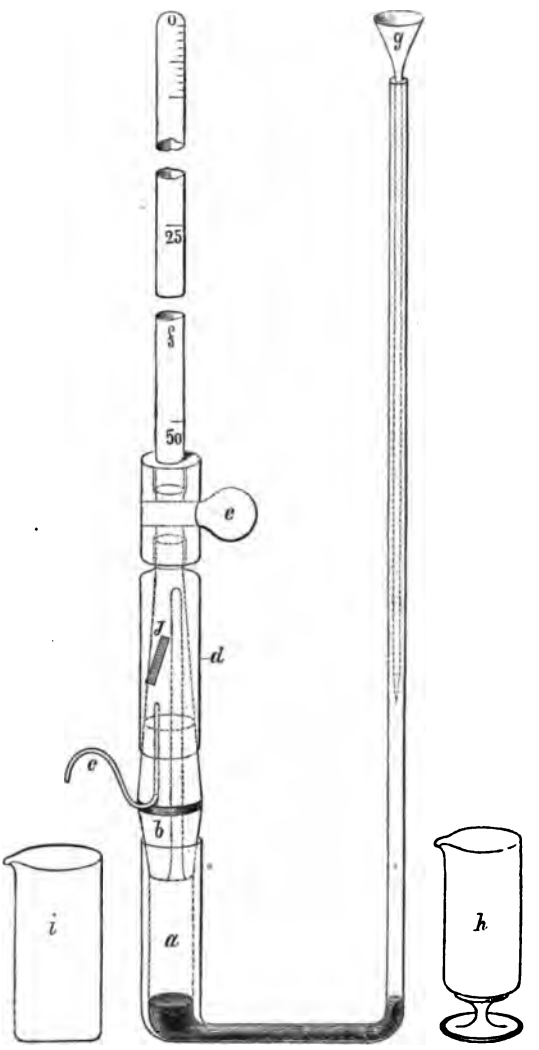
1° Introduire du mercure dans le tube A, uniquement pour intercepter la communication des deux branches.

2° Verser la dissolution azotée dans la large branche du tube A, et boucher celle-ci avec le bouchon B nanti de son tube.

3° Introduire du mercure par la petite branche du tube A et à l'aide de l'entonnoir G, jusqu'à ce que le liquide azoté, ayant fait ascension dans le tube du bouchon B, ait expulsé exactement tout l'air. Pour arriver à ce

degré d'exactitude, il est bon de cesser de verser du mercure lorsqu'il ne reste plus, pour ainsi dire, qu'une petite bulle d'air dans le tube B, et que l'on expulse aisément en serrant le bouchon B dans la grande branche du

Planche 2.



tube à mercure; sans cela, on risquerait de déverser le liquide azoté à travers l'orifice supérieur du tube B.

4° Réunir, à l'aide du manchon E, le tube à réaction D et la cloche gra-

duée F. Le robinet étant ouvert, remplir complètement le tout de liqueur hypochloritée; fixer le bouchon C au tube à réaction D, et boucher le trou central avec le cylindre plein J.

5° Renverser promptement ce système de manière à ce que le cylindre J s'appuie directement sur l'extrémité supérieure du tube B. En imprimant aussitôt une poussée verticale, on fait couler le cylindre J dans le tube à réaction, et on introduit ainsi, dans ce dernier, le tube B dans toute sa longueur, sans que la moindre bulle d'air ait pu pénétrer dans l'appareil.

Je dois faire remarquer que tous les bouchons de l'appareil sont trempés d'avance dans un bain de paraffine avec un quart de cire.

Il ne reste plus, pour faire fonctionner l'appareil, qu'à verser du mercure peu à peu dans la branche libre du tube A, jusqu'à déversement complet du liquide azoté dans le tube à réaction.

Le point fondamental de la méthode que je propose consiste à transformer en ammoniaque tout l'azote des diverses matières dont cet élément fait partie constituante.

Cette transformation s'opérant facilement par des moyens déjà acquis à la science, j'ai pu, en les appliquant réunis et sans presque les modifier, constituer cette méthode unique qui les résume pour ainsi dire toutes, et qui se réduit elle-même simplement au dosage *volumétrique* de l'azote dans les sels ammoniacaux, incontestablement plus exact que le dosage pondéral, lequel n'a point, sous ce rappport, satisfait encore entièrement l'esprit; car il est très aisé de mesurer, jusqu'à une demi-division près, un volume d'azote dans une cloche étroitement graduée et d'un diamètre réduit, tandis qu'à peine le poids d'une dizaine de divisions de ce gaz dans la même cloche pourrait être accusé sur une des balances les plus sensibles.

Il est donc important de s'arrêter maintenant à la description détaillée de la détermination exacte de l'azote dans un sel ammoniacal quelconque.

On prend une telle quantité que l'on voudra de ce sel, sous quelque état qu'il se trouve. S'il est solide, on le dissout dans de l'eau distillée bouillie, de manière à remplir, par exemple, jusqu'au zéro, une burette hydrotimétrique; on prélève ensuite, suivant la capacité de l'appareil de dosage et la concentration de la liqueur ammoniacale, un centième, un dizième, un vingtième, etc., de cette liqueur sur son volume total, et on l'introduit dans la large branche du tube à mercure A; on monte, et on fait fonctionner

l'appareil d'après les indications que j'ai données précédemment.

Si le sel ammoniacal est en dissolution, il est utile de chauffer celle-ci afin d'expulser l'air qu'elle pourrait retenir, et on procède après comme pour le sel solide.

Il est bon de faire remarquer que la méthode peut être appliquée à un mélange de sels divers dont un seul serait azoté.

Lorsque tout l'azote est complètement dégagé, ce qui a lieu assez rapidement, il s'agit de mesurer son volume aussi exactement que possible, et de calculer ensuite son poids sur le nombre de divisions obtenues, en tenant compte, bien entendu, de la pression et de la température actuelles. Pour déterminer exactement le volume, on ferme d'abord le robinet du manchon E, on sépare celui-ci du tube à réaction D seulement; on plonge le manchon, portant la cloche graduée, dans une éprouvette d'eau bouillie; on dégage la cloche du manchon, et on s'applique à mesurer rigoureusement le volume de l'azote, en bien se conformant aux indications précises que donnent à cet effet les grands traités de physique.

Il ne s'agit plus maintenant que de calculer le volume réel sur le volume observé, ainsi que le poids, ce à quoi on arrive facilement à l'aide des formules dressées à ce sujet, et qu'il est utile de rappeler ici.

PRESSION.

Soit P la pression observée, P' la pression normale, V le volume du gaz, on a $\frac{P \times V}{P'} = x$.

DILATATION.

Soit V le volume du gaz, T sa température, 0,00367 son coefficient de dilatation, on a $\frac{V \times 1 + T \times 0{,}00367}{1} = x$.

POIDS.

1 centimètre cube d'azote pèse 0,0025617 de gramme, nombre qui $\times$ V, ou volume réel, $= x$.

Je me propose de dresser une table offrant les calculs tout faits, en partant de la température et de la pression atmosphériques minimum et maximum.

de ses malades pour que je les soumisse à l'analyse. Ces urines présentaient tous les caractères physiques et la composition chimique de celles d'un homme dans son état physiologique, et cependant ce malade était tellement étique, qu'il ne pouvait plus prendre de nourriture et qu'il ne tarda pas à mourir de consomption. Il restait évident que, chez lui, la substance protéique du sang subissait une forte combustion qui la transformait en urée, etc.

En réfléchissant sur ce cas assez singulier, il me parut très important de chercher à doser l'azote dans les urines des malades à l'aide de mon appareil, pensant que l'urée, isomère du carbonate d'ammoniaque, se comporterait comme ce même sel en présence de la liqueur hypochloritée, ce qui a parfaitement lieu.

M. le Dr Sous, l'habile oculiste, s'associant à mon idée, voulut savoir si les diverses opérations qu'il pratique si souvent sur les yeux étaient susceptibles de diminuer ou d'augmenter la quantité d'azote dans les urines de ses opérés de cataracte d'abord. Il me fit envoyer à cet effet l'urine émise le matin avant l'opération, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux de l'urine des six ou huit jours après l'opération.

Je dois me borner à rapporter ce qui se rattache seulement à la question de la proportion d'azote trouvée. Nous avons constaté que cette proportion augmente toujours assez considérablement dès le lendemain de l'opération, et bien plus encore jusqu'au troisième jour, tandis qu'elle diminue dès le quatrième. Ainsi, sur les urines de huit opérés de cataracte :

5	grammes	d'urine	normale.....	11	divisions	d'azote.	
»	—	—	après l'opération....	20	—	—	augmentation au minimum.
5	—	—	normale.....	17	—	—	
»	—	—	après l'opération....	75	—	—	augmentation au maximum.

Ces faits établissent déjà suffisamment combien il est important de doser l'azote dans les urines des malades pour éclairer quelquefois le diagnostic, et font assez ressortir l'utilité de mon appareil dans cette opération, qui n'exige pas plus de dix minutes de temps, en considérant l'urine comme un sel ammoniacal, et en négligeant de déterminer le volume réel, puisqu'il n'y a pas d'importance à le faire.

Quand on a besoin de connaître les quantités respectives d'urée

la hauteur du flacon C. La tubulure du flacon D porte un tube afférent sous l'eau d'une cuve pneumatique, E.

Pour monter l'appareil, il faut tout simplement remplir complètement le flacon C de liqueur hypochloritée, et le flacon D d'une liqueur alcaline (2 ou 3 0/0 de soude dans de l'eau bouillie). Cela fait, on réunit les deux flacons à l'aide du tube deux fois coudé, et on fixe le tube afférent; puis on remplit le tube large A, fermé d'un bout, avec une dissolution saturée de sel marin; on plonge le tube droit B dans celui-ci autour de la bague duquel on a préalablement attaché un fil, afin de pouvoir l'introduire verticalement dans le flacon C. Enfin, on verse de l'eau saturée de sel marin dans l'entonnoir du tube droit, jusqu'à ce qu'il ne reste plus une seule bulle d'air dans l'appareil entier, et, pour le faire fonctionner, on substitue à l'eau salée un sel ammoniacal quelconque; l'azote se dégage alors plus ou moins rapidement, suivant que la quantité de sel ammoniacal soit plus ou moins forte.

Quand le premier flacon de Voulf est d'une capacité d'un litre, on peut recueillir une dizaine de litres d'azote pur; en sorte qu'en établissant en permanence des appareils de cinq litres dans les laboratoires, on peut très commodément recueillir à la minute une éprouvette de ce gaz, ou le faire agir sous forme de courant continu ou intermittent, lent ou rapide, suivant le besoin, ce qui pourrait peut-être conduire à découvrir chez cet élément des propriétés actives.

Tels sont, relativement au dosage et à la préparation de l'azote, les moyens simples que j'avais à recommander aux praticiens, sans préjudice pour ceux qu'ils mettent chaque jour en usage; je serais satisfait si on ne les jugeait pas comme étant dépourvus d'utilité.

RECHERCHES

SUR LA

CONSTITUTION CHIMIQUE DES COMPOSÉS FLUORÉS

ET SUR L'ISOLEMENT DU FLUOR

PAR J.-P. PRAT

pharmacien

Les expériences que je vais avoir l'honneur d'exécuter devant l'assemblée ont pour objet d'établir :

1° Qu'il existe un fluorure d'argent, formé de toute pièce, lequel est insoluble dans l'eau et l'acide azotique bouillant, mais soluble dans l'ammoniaque, se confondant du reste avec le chlorure du même métal quant à ses propriétés générales;

2° Que l'oxygène et le chlore sont sans action sur ce fluorure d'argent à une température élevée, ce qui paraît indiquer que le fluor est plus électro-négatif que le chlore;

3° Que le corps soluble, considéré jusqu'ici comme étant du fluorure d'argent, est un corps ternaire, de même que tous les fluorures correspondants;

4° Que l'hydracide du fluor n'est pas plus connu que les fluorures métalliques proprement dits, et que l'acide retiré du spath-fluor est encore un corps ternaire;

5° Que le fluor appartient essentiellement au groupe des corps halogènes, et doit être regardé comme représentant le type du genre;

6° Que son nombre proportionnel est beaucoup plus élevé que celui qu'on a établi en le déduisant indirectement de l'analyse d'un fluorure considéré comme corps binaire;

7° Qu'enfin, le fluor est constamment déplacé des oxy-fluorures anhydres par l'oxygène *naissant* dès la température rouge, et qu'on peut le recueillir facilement, et même le conserver, dans des vases de verre parfaitement desséchés.

Je vais maintenant démontrer la valeur de chacune de ces assertions, sans m'écarter du domaine de l'expérience.

Lorsqu'on chauffe, dans une capsule de platine, un mélange intime d'une partie de fluorure de calcium naturel ou artificiel, et de deux parties de chlorate de potasse, il dégage de l'oxygène pur à mesure que la matière entre en fusion; et si, quand celle-ci est complète, on retire la capsule du feu, on obtient, par le refroidissement, une masse cristallisée, formée de perchlorate de potasse et de fluorure. Mais si on continue à chauffer, le perchlorate se décompose avec une incandescence bien marquée, et l'oxygène qui se dégage entraîne une certaine quantité d'un autre gaz, quantité qui, pour le spath-fluor, est en raison inverse de la proportion de silice que ce corps peut contenir.

On constate la présence de ce gaz dans l'oxygène : en exposant au courant gazeux une baguette imbibée d'ammoniaque, il se produit des vapeurs intenses; en interposant à plusieurs reprises une lame de verre humide, le verre se dépolit sensiblement; enfin, en interceptant le courant gazeux à l'aide d'une grille de fils de platine sur laquelle on a préalablement disposé des feuilles d'argent, ce métal se trouve d'autant plus rapidement attaqué qu'il se trouve plus rapproché du centre calorifique.

Si on traite l'argent ainsi attaqué par l'acide azotique, on obtient la dissolution de l'argent préservé, tandis qu'il reste un corps insoluble qui est violet s'il a subi l'atteinte de la lumière. Si, au contraire, on fait agir l'ammoniaque sur l'argent attaqué, on obtient la dissolution du sel d'argent formé, car la liqueur précipite abondamment par l'iodure de potassium.

Ce moyen permet de découvrir des traces d'argent attaqué, soit par le fluor, soit par le chlore.

Quand on chauffe un mélange d'argent divisé et de fluorures de calcium à une température voisine de la fusion de celui-ci, l'argent n'est nullement attaqué; tandis que si on joint à ce mélange du chlorate de potasse, l'attaque a toujours lieu, et on peut séparer le sel d'argent formé au moyen de l'ammoniaque.

On peut être conduit à croire que c'est le chlore du chlorate qui, dans ces circonstances, se combine à l'argent; mais il n'en est rien, car la quantité de chlorure que doit fournir le poids du chlorate employé se retrouve intégralement après ces opérations, et si la décomposition du fluorure a été assez complète, la dissolution de chlorure de potassium est alcaline à la manière de l'eau de chaux.

Il est du reste d'autres preuves plus concluantes, c'est qu'on obtient toujours le même gaz se combinant avec l'argent, etc., quand on substitue au chlorate de l'azotate de potasse fondu, du bioxyde de manganèse, du bioxyde de baryum, du minium, et qu'au lieu d'employer le fluorure de calcium on en choisit un autre.

Le fluorure de plomb étant facilement décomposable, fournit proportionnellement plus de sel d'argent que les autres, quand on le calcine avec trois parties de bioxyde de manganèse et de l'argent en poudre; aussi ce mélange doit-il être préféré quand on se propose de préparer de grandes quantités de ce sel d'argent, dont il faut maintenant constater l'identité, ce à quoi l'on arrive en procédant de la manière suivante :

On fait digérer le produit de la calcination du mélange précédent dans l'ammoniaque, en chauffant le tout à une température au-dessous de 100° au bain-marie; on laisse déposer, et on filtre la liqueur décantée. Une nouvelle digestion est nécessaire, car le sel d'argent se trouvant le plus souvent fondu, résiste naturellement davantage à l'action dissolvante de l'ammoniaque.

La dissolution ainsi obtenue étant évaporée à une douce chaleur, laisse déposer des cristaux blancs et opaques; étant traitée jusqu'à saturation par l'acide azotique étendu, on obtient un abondant précipité blanc cailleboté, que l'on peut laver et conserver à l'abri de la lumière; enfin, étant traitée par l'iodure de potassium de manière à convertir exactement tout l'argent en iodure, puis filtrée et évaporée jusqu'à siccité dans une capsule de *platine,* on obtient un sel de potassium qui émet des vapeurs attaquant le verre quand on le décompose par l'acide sulfurique.

Afin de prévenir toute objection sur l'attaque du verre par d'autres vapeurs que celles qui procèdent des fluorures, il est bon de ne faire agir sur le sel de potassium que de l'acide sulfurique étendu, et de se servir ensuite du liquide acide pour graver des traits sur verre suivant les procédés ordinaires.

L'argent attaqué par le fluor libre sur la grille de platine étant traité par l'ammoniaque et la dissolution alcaline, comme je l'indique précédemment, donne en résidu le même sel de potassium, qui, traité par l'acide sulfurique dilué, produit un liquide ayant la propriété de corroder également le verre.

Ces expériences me paraissent bien de nature à prouver que non seulement l'oxygène *naissant* déplace le fluor des fluorures métalliques connus, mais encore que c'est bien le fluor qui s'unit à l'argent pour donner naissance à un fluorure possédant les propriétés du chlorure d'argent à ces différences près : qu'il est plus impressionnable à la lumière que le chlorure, et que sa densité ainsi que son équivalent sont plus faibles.

Au surplus, un courant de chlore sec n'exerce aucune action sur le fluorure d'argent nouveau bien desséché, quand même on élèverait graduellement la température jusqu'au point de fusion du fluorure. Le fluorure d'argent ayant pris naissance à une température rouge franc et en présence de l'oxygène, on conçoit que ce dernier corps ne puisse exercer sur ce sel son action. Est-ce peut-être parce que l'oxyde d'argent ne peut exister à cette température? Je suis porté à le croire, et lorsque j'aurai obtenu le fluorure de plomb binaire, je me propose de vérifier l'action de l'oxygène sur ce corps.

Ne doit-on pas déjà inférer des faits précédents que la véritable composition des fluorures métalliques simples n'est pas plus connue que celle de l'acide qui leur donne naissance et que l'on retire du spath-fluor?

Je dois signaler à l'appui de cette manière de voir des faits très remarquables, qui, s'ils n'établissent pas définitivement la composition des corps fluorés en général, sont de nature à faire avancer rapidement cette intéressante et non moins importante question.

1° On sait que lorsqu'on chauffe le fluorure d'argent soluble des chimistes, ce sel se décompose nettement en eau, acide fluorhydrique, corrodant le verre, et en *oxygène*. L'argent se trouve entièrement réduit à l'état métallique.

2° Preuves nouvelles : toute dissolution aqueuse d'un fluorure chimiquement neutre est susceptible d'absorber du chlore dont une partie se trouve tranformée en acide hypo-chloreux, quelque faible que soit la quantité de chlore agissant par rapport à celle

du fluorure. L'acide chlorhydrique reproduit dans la liqueur la totalité du chlore employé à cet effet. De plus, l'acide hypo-chloreux n'est pas libre, il est combiné, et ce ne peut être qu'avec un oxyde métallique.

Cette seule expérience indique déjà nettement que l'oxygène servant à constituer l'acide hypo-chloreux ne peut procéder que du fluorure employé, et que celui-ci ne devrait plus être considéré, par conséquent, comme étant un corps binaire.

3° Quand on fait passer du chlore dans une dissolution aqueuse de fluorure d'argent obtenu en saturant exactement l'oxyde ou le carbonate d'argent par l'acide fluorhydrique purifié, il se forme aussitôt un précipité blanc cailleboté, et de l'acide hypo-chloreux existe dans la liqueur, quelque faible que soit du reste la quantité du chlore employé. Si on continue à faire passer lentement du chlore de manière à précipiter entièrement l'argent, la quantité d'acide hypo-chloreux trouvée dans la liqueur est en raison de celle du chlore employé.

Connaissant l'existence du chlorure d'argent insoluble FlAg, le seul découvert jusqu'à présent, le rôle du chlore s'explique, tant dans l'expérience précédente que dans celle-ci, et il indique, au surplus, que le fluor reste en combinaison insoluble avec l'argent, car les produits employés étant purs et l'expérience bien conduite, la liqueur ne retient plus en dissolution que de l'acide hypo-chloreux. Si le fluorure d'argent était acide, il se formerait du fluoride de chlore, ainsi que je l'ai signalé.

D'après le poids du fluorure d'argent employé, celui du précipité obtenu et celui du chlore agissant, je suis autorisé à dresser l'équation suivante expliquant les faits précédents :

$$FlAg^2O,HO + Cl^2 = FlAg,ClAg + ClO,HO.$$

Le fluorure d'argent soluble se comportant dans quelques cas comme un corps oxydant, il me paraît plus convenable de le représenter par la formule

$$FlAg^2HO^2,$$

c'est à dire de le regarder comme un sous-fluorure combiné avec les éléments de l'eau oxygénée, ou simplement dissous dans ce

liquide, qui aurait alors pris naissance dans la formation du fluorure.

Le composé jaune et anhydre que laisse le fluorure d'argent hydraté lorsqu'on le dessèche dans le vide est un véritable oxy-fluorure d'argent, lequel, chauffé, perd son oxygène et laisse un sous-fluorure indécomposable par la chaleur :

$$FlAg^2O = FlAg^2 + O.$$

Il m'a paru intéressant de mesurer comparativement le volume d'hydrogène que peut fournir un poids donné de zinc en se dissolvant dans l'acide fluorhydrique en excès avec celui que peut fournir l'acide chlorhydrique en dissolvant le même poids du même zinc. Le volume du gaz obtenu dans ces deux cas ayant été sensiblement le même, il est naturel de penser que le rôle des deux acides est semblable; mais si l'on considère qu'en saturant l'oxyde d'argent par l'acide fluorhydrique il faut deux équivalents d'argent pour un seul de fluor, ainsi que l'atteste le rôle du chlore sur le fluorure d'argent soluble, on comprendra aisément qu'il faudra également deux équivalents de zinc pour un seul d'acide fluorhydrique, tandis qu'il n'en faudra qu'un seul pour un véritable hydracide.

Dans ce cas, le volume d'hydrogène fourni sera juste la moitié de celui qui produit l'acide fluorhydrique du spath.

La connaissance de l'équivalent réel du fluor s'ajoute comme une nouvelle preuve à tout ce qui vient d'être dit se rattachant à la constitution des fluorures métalliques. Il est donc indispensable de faire connaître par quelle méthode je l'ai déterminé, pour le besoin du moment, pour ainsi dire, bien que je me sois placé dans les conditions d'exactitude rigoureuse qu'implique une opération aussi importante.

1 gramme de fluorure d'argent pur et fondu a été exactement pesé sur une bonne balance, et décomposé ensuite par la potasse pure dans une capsule d'argent à la température rouge naissant. Le produit de cette opération a été ensuite traité par l'eau bouillante, et maintenue telle quelques minutes après addition d'un peu de sucre candi pour réduire absolument l'oxyde d'argent qui aurait pu échapper à l'action de la chaleur. L'argent métallique

obtenu a été très soigneusement lavé à l'eau bouillante tant que cela a été nécessaire, puis fortement calciné, minutieusement recueilli, et enfin exactement pesé. 1 gramme de fluorure d'argent a fourni :

Ag	0,785	milligr.
Fl	0,215	*id.*
	1,000	

d'où : $$\frac{215\ \text{Fl} \times 1349{,}01\ \text{Ag}}{785\ \text{Ag}} = 369{,}4746\ \text{Fl}$$

Ce nombre 369 représentant l'équivalent du fluor pour le besoin actuel, ne s'écartera guère de celui qui sera trouvé plus tard dans l'analyse d'une plus grande quantité de fluorure d'argent.

Rapporté à l'hydrogène, le nombre 369 se réduit à 29 au lieu de 19, équivalent ancien du fluor.

La densité du fluorure d'argent a été également déterminée : elle est de 5,3846 par rapport à l'eau. Le fluorure employé à cet effet était en poudre parfaitement desséchée.

Il est évident que le spath-fluor doit avoir une composition correspondante à celle de l'oxy-fluorure d'argent anhydre $FlCa^2O$, puisque le même acide les forme tous les deux. On peut vérifier qu'il doit en être ainsi, en formant l'équivalent du fluorure de calcium des chimistes avec l'équivalent du fluor nouveau :

Fl	369,00
Ca^2	500,00
O	100,00
	969,00

En divisant 500,00 par 369, on a pour quotient le nombre 51,50, qui ne diffère, comme on le voit, que de 0,21 de celui qui a été exactement déterminé comme représentant la quantité de calcium contenu dans 100 grammes de fluorure de ce métal.

D'après ces faits, je crois être autorisé à considérer comme corps ternaires les fluorures métalliques simples, acceptés jusqu'ici comme sels haloïdes, et à leur assigner, pour représenter leur composition, la formule générale : FlM^2O.

Conséquemment, les fluorures binaires ne sont pas encore connus.

La formule de l'acide attaquant le verre me paraît pouvoir être déduite, dès à présent, des faits qui précèdent, en établissant l'équation suivante :

$$FlM^2O + {}^2(SO^3HO) = {}^2(SO^3CaO) + FlH^2O.$$

Il me semble qu'il serait convenable de nommer désormais cet acide : *Acide fluoro-bi-hydrique,* car si ce corps était un hydracide hydraté FlH,HO, on ne pourrait concevoir qu'il agit différemment que les autres hydracides dans les mêmes circonstances.

Du reste, si on s'arrête à examiner le rôle qu'il joue vis-à-vis de l'oxyde d'argent, on constatera que deux équivalents d'argent se substituent dans le groupe à deux équivalents d'hydrogène; il n'y a pourtant qu'un seul équivalent de fluor. Il ressort donc de ce fait que les éléments de l'eau entrent comme parties intégrantes dans la constitution singulière de cet acide, et non comme eau de combinaison.

Ainsi se trouve expliquée, sinon définitivement établie, la constitution des composés fluorés les plus importants jusqu'ici.

Il est très probable que les fluorures nouveaux que l'on découvrira, correspondront, quant à leurs propriétés générales, aux chlorures, aux bromures et aux iodures des mêmes métaux. Le fluorure de calcium, par exemple, sera soluble et décomposable par une certaine quantité d'eau; car, de deux choses l'une : ou le fluor ne peut raisonnablement être de la famille des corps halogènes, ou bien il ne peut faire des exceptions aussi tranchées, à la manière d'agir si remarquablement régulière des autres corps halogènes. Or, aujourd'hui plus que jamais, on est en droit de regarder le fluor comme étant le type de ce groupe d'éléments si importants et surtout si utiles.

Il est encore probable que l'hydracide du fluor n'attaquera pas le verre par lui-même, et pourra former les fluorures haloïdes, qui permettront d'extraire le fluor en grand, et de le rendre peut-être utile aux arts et à l'industrie.

Lorsque M. Louyet fit agir l'acide fluoro-bi-hydrique, qu'il considérait comme un hydracide, sur l'acide phosphorique anhydre, ce dernier, si avide d'eau, ne me paraît pas avoir eu pour effet de déshydrater simplement l'acide fluoré, mais bien de déterminer la

formation d'eau aux dépens des éléments du groupe, en produisant ainsi le véritable acide fluorhydrique :

$$PhO^3 + FlH^2O = PhO^3,HO + FlH.$$

M. Louyet dit que cet acide ainsi traité ne corrode plus le verre. En me fondant sur les résultats de mes premières recherches sur le fluor, je pense que M. Louyet a eu raison, car j'ai souvent obtenu le même acide par des moyens différents, reposant néanmoins sur le même principe.

Cette expérience de M. Louyet, confirmée par mes observations, pourra me diriger dans la voie de mes recherches ultérieures, ayant pour but de trouver le moyen de préparer facilement l'acide *fluo*rhydrique proprement dit.

Suivant la nouvelle théorie que je viens d'exposer très brièvement, le sel désigné sous le nom de *fluorhydrate de fluorure de potassium* doit être représenté comme l'exprime l'égalité de l'équation suivante :

$$FlK^2O + FlH^2O = {}^2(FlK,HO),$$

c'est à dire comme étant un simple fluorhydrate de potassium. Ce corps se dédouble par la chaleur en acide fluoro-bi-hydrique anhydre, et en oxy-fluorure de potassium également anhydre.

Ce fait démontre que l'on ne peut espérer de retirer l'hydracide du fluor d'un fluorhydrate, pas plus que d'un oxy-fluorure métallique, et qu'il faut opérer sur un fluorure anhydre, ou bien, comme je l'ai fait, en présence d'un corps oxydant et d'un acide capable de déterminer la formation d'eau, et de la retenir puissamment ensuite. L'acide sulfurique de Nordhunsen, par exemple, est dans ce cas :

$$FlH^2O + \underset{naissant}{O} + {}^2(SO^3)HO = {}^2(SO^3,HO) + FlH.$$

L'acide que j'ai souvent obtenu d'après ce principe ne m'a jamais paru attaquer le verre sec, tandis qu'il le corrode fortement en présence de quelques gouttes d'eau.

L'acide fluoro-bi-hydrique se combine avec la silice du verre sans la moindre production de gaz. On peut le vérifier en remplissant une ampoule de verre mince d'acide retiré du spath-fluor, et

en l'introduisant promptement dans une cloche graduée, remplie de mercure.

Cela n'indique rien sur la constitution du fluorure de silicium :

$$^{3}(\mathrm{FlH^{2}O}) + \mathrm{SiO^{2}} = \mathrm{Fl^{2}Si} + {}^{6}(\mathrm{HO}).$$

Quant à l'acide hydro-fluo-silicique, il peut être encore considéré comme une dissolution de fluorure de silicium dans l'acide fluorhydrique proprement dit, mais non dans l'acide fluoro-bi-hydrique retiré du spath :

$$^{1}(\mathrm{Fl^{2}Si}) + {}^{3}(\mathrm{HO}) = \mathrm{SiO^{2}} + \mathrm{Fl^{2}Si},{}^{3}(\mathrm{FlH}).$$

ISOLEMENT DU FLUOR

Principe général : tout corps capable de produire de l'oxygène naissant dès la température rouge sombre étant intimement mélangé avec certains oxy-fluorures purs et anhydres, sera propre à déplacer le fluor que ces corps renferment.

L'oxy-fluorure de plomb est celui qui m'a paru remplir au mieux les conditions de cette importante opération. On doit le préparer en chauffant le carbonate de plomb dans la vapeur d'acide fluoro-bi-hydrique, car, dans ce cas, le fluorure de silicium, toujours mêlé à cet acide, ne se combine ni avec le carbonate ni avec l'oxyde de plomb. On obtient ainsi un oxy-fluorure exempt de produits siliceux, lesquels rendent incomplète l'action de l'oxygène naissant sur les oxy-fluorures.

J'ai des raisons de croire que l'acide fluoro-bi-hydrique, obtenu en chauffant le fluorhydrate de fluorure de potassium, retient encore les éléments du fluorure de silicium, bien qu'on l'ait dit pur. Le fluorure de plomb des chimistes, préparé avec cet acide hydraté, s'est toujours trouvé mélangé après fusion d'une quantité plus ou moins grande de silicate de plomb.

L'oxy-fluorure de plomb fondu et réduit en poudre étant traité par l'acide azotique à 36°, produit, quand il est siliceux, une élévation de température qui varie entre 150° et 200°, et la masse se solidifie. Il se dégage dès lors un gaz fluoré qui n'a pas d'action

sur le verre. En chauffant la masse jusqu'à fusion complète et jusqu'à cessation de dégagement de vapeurs d'acide hypo-azotique, il reste un oxy-fluorure de plomb mêlé d'oxyde, qui peut néanmoins très bien servir à l'extraction du fluor.

Les mélanges les plus propres à l'extraction de ce corps sont, jusqu'ici, les suivants :

1° Azotate de potasse fondu (5 parties), et oxy-fluorure de potassium pur (1 partie);

2° Bioxyde de manganèse desséché (2 parties), et oxy-fluorure de plomb (1 partie);

3° Bioxyde de barium (2 parties), et oxy-fluorure de plomb (3 parties);

4° Minium et oxy-fluorure de plomb, parties égales.

5° Chlorate de potasse et oxy-fluorure de plomb, parties égales.

Je dois faire remarquer que le mélange n° 1 m'a paru être le meilleur, sous ce rapport que le fluor qu'il produit ne contient pas d'oxygène libre. Les mélanges 2 et 3 sont également bons, si on s'arrange de manière à arrêter au passage l'oxygène qui peut se dégager en le fixant sur de la baryte ou de l'oxyde de plomb convenablement chauffés. Le mélange n° 4 est défectueux, en ce sens qu'il produit peu de fluor et beaucoup d'oxygène. Enfin, le mélange n° 5 a aussi l'inconvénient d'émettre d'abord de l'oxygène pur; puis la décomposition du perchlorate formé élevant la température en s'opérant trop vivement, empêche l'oxyde de plomb de se transformer, soit en acide plombique, soit en minium.

Je me suis défié de l'emploi du bioxyde de plomb pour un mélange fluorifère, parce que j'ai constaté qu'il est rare qu'on le produise suffisamment pur. Cependant, me ravisant, je crois que celui qui résulte de la décomposition du chlorate de potasse par le minium, pourrait, une fois lavé bien soigneusement, servir avantageusement à l'extraction du fluor, étant mélangé avec de l'oxy-fluorure de plomb. Je me propose de l'essayer, et en attendant j'ai dû adopter, pour cette extraction, les mélanges n° 1, n° 2 ou n° 3.

Dans la cucurbite d'un alambic de platine, on dispose le mélange fluorifère n° 1, et on chauffe jusqu'à fusion complète. D'autre part, on chauffe le chapiteau (muni d'une allonge coudée en angle droit) pour chasser toute trace d'humidité. Enfin, on adapte le

chapiteau à la cucurbite, et on chauffe de nouveau sans dépasser la température rouge.

Le fluor se dégage ainsi lentement, et on peut le recevoir dans des flacons de verre spécialement bien desséchés, où il déplace l'air à la manière du chlore sec.

Dans un Mémoire publié en 1862 dans les travaux du Congrès scientifique de France, et ayant pour titre : *Recherches expérimentales sur le fluor et sur ses combinaisons métalloïdiques*, j'ai décrit les principales propriétés du fluor, que je n'obtenais qu'en très faible quantité, et avec une extrême difficulté quand je réussissais.

Cet élément, obtenu d'une manière différente aujourd'hui, se présente avec les mêmes caractères. Je reproduis donc textuellement la description déjà faite :

« Le fluor est gazeux, presque incolore, d'une odeur particulière, et qui, bien qu'elle se rapporte à celle des autres corps halogènes, est cependant moins vive et surtout moins pénétrante, car son action ne se fait pas sentir si directement dans les bronches, comme celle du chlore. Elle s'arrête dans l'étendue de la muqueuse olfactive, laquelle se trouve vivement irritée quelques instants après. J'attribue cet effet à ce que le fluor en contact avec les tissus humides se transforme aussitôt.

» Répandu dans l'air, le fluor devient très visiblement fumant. Sa densité est supérieure à celle de l'air; mais je n'ai pu encore en déterminer le rapport d'une manière exacte.

» Le fluor est incombustible. Il décolore l'indigo lui-même, mais lentement. Il rougit d'abord le tournesol et finit par le décolorer. Les matières organiques l'absorbent rapidement.

» L'ammoniaque décèle des traces de cet élément par les vapeurs intenses qui se produisent.

» Le fluor ne paraît pas avoir d'action directe sur l'oxygène libre. Il se combine à l'état naissant au chlore (1), au brome et à l'iode.

» Son affinité pour l'hydrogène est poussée au plus haut degré : il décompose l'eau sur-le-champ à la température ordinaire : $Fl + {}^{1}(HO) = FlH^{1}O + O$. Il se combine avec l'hydrogène pur et sec, même à la lumière diffuse.

(1) Le fluoride de chlore a été particulièrement décrit. (Voir les *Actes de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. II, 2e cahier.)

» Le fluor décompose le gaz chlorhydrique. Il élimine le brome et l'iode de leurs combinaisons anhydres. Ces faits prouvent que le fluor est l'élément le plus électro-négatif qui existe.

» Le fluor s'unit au bore et au silicium chauffés.

» Il attaque tous les métaux usuels des cinq premières sections. Parmi les métaux nobles, le mercure et l'argent l'absorbent. Son action sur l'or et le platine réclame un nouvel examen. »

Quoiqu'il me reste encore un bon nombre d'expériences à signaler, et à poursuivre l'interprétation de leurs résultats dans toute leur étendue, l'histoire chimique du fluor et de ses dérivés ne saurait être complétée que par des hommes autrement compétents que moi. Ma satisfaction sera grande si je puis avoir contribué à la résolution d'un problème posé depuis si longtemps.

important Mémoire inséré au 32e volume du *Journal de Crelle* (1), Mœbius, en étudiant l'action de la force perturbatrice sur le mouvement d'une planète, est parvenu à déterminer, par des calculs relativement très simples, les variations de ses éléments.

J'ai essayé de reprendre cette question à un autre point de vue. Lagrange ayant voulu avant tout se conformer à l'esprit des procédés habituels de Newton, ses démonstrations m'ont paru susceptibles d'être simplifiées. J'ai cherché en même temps à en compléter les résultats, en étudiant, à l'aide de la théorie des couples, le déplacement de la ligne des nœuds, et la variation de l'inclinaison. Je suis ainsi arrivé, par des considérations purement géométriques, et en ne faisant usage que des théories fondamentales de la mécanique rationnelle, à un ensemble de formules qui déterminent les variations des éléments elliptiques. Ces formules se ramènent ensuite sans difficulté à la forme sous laquelle elles se présentent lorsqu'on applique à cette importante théorie la méthode générale de la variation des constantes arbitraires.

II

Considérons d'abord le Soleil et une seule planète. On sait que le mouvement relatif de la planète est identique au mouvement absolu que prendrait cette planète autour du Soleil supposé fixe, si l'on ajoutait sa masse à celle de cet astre. On sait en outre que l'orbite décrite est une ellipse, dont les éléments ne dépendent que de la distance de la planète au Soleil, et de sa vitesse à un instant donné.

Faisons intervenir actuellement une force perturbatrice quelconque. Supposons le temps divisé en intervalles infiniment petits, et regardons la force perturbatrice comme formée d'une série de

(1) *Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facilis evolutio.*

Mon travail était à peu près terminé, lorsque j'ai eu connaissance du Mémoire de Mœbius. Malgré l'analogie de la méthode de ce géomètre avec celle que j'ai suivie, j'ai cru devoir faire imprimer le résultat de mes recherches, à cause de leur caractère plus géométrique, et parce qu'elles font voir comment la théorie de Mœbius était contenue en germe dans les propositions démontrées par Lagrange.

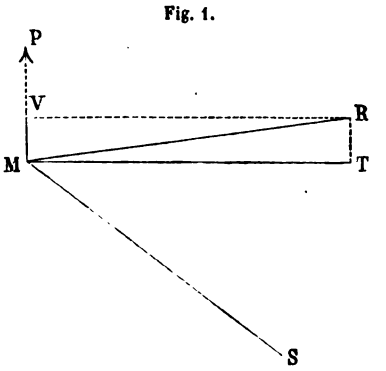
petites forces instantanées qui agissent au commencement de chacun de ces intervalles. Cela posé, considérons la planète à un instant donné t. Dans le mouvement non troublé, elle décrirait une certaine ellipse. Or, la force perturbatrice instantanée qui agit au commencement de l'intervalle de temps dt, change la vitesse initiale, et fait décrire en réalité à la planète, pendant ce temps dt, un élément infinitésimal d'une autre ellipse qui diffère infiniment peu de la précédente. Je me propose de déterminer la différence entre les éléments de ces deux ellipses.

Décomposons la force perturbatrice en deux autres, l'une perpendiculaire au plan de l'orbite, l'autre agissant dans ce plan. La première est la seule qui tende à faire sortir la planète du plan de son orbite primitive, la seule, par conséquent, qui modifie l'inclinaison de cette orbite sur un plan fixe, et la position de la ligne des nœuds. Étudions d'abord l'action de cette composante.

Commençons par faire voir qu'elle ne modifie en rien les éléments qui tiennent à la forme de l'ellipse, c'est à dire son grand axe et son excentricité.

Soient en effet (*fig.* 1) S le Soleil, M la planète, MT la vitesse initiale dans le mouvement non troublé. Par MT et S faisons passer un plan : ce sera le plan de l'orbite non troublée. Supposons que la force instantanée MP perpendiculaire à ce plan vienne à agir

Fig. 1.



sur M au commencement du temps dt. Cette force produit une vitesse infiniment petite MV, et la nouvelle vitesse de la planète s'obtient en composant MV et MT. La résultante MR ne diffère de MT que d'un infiniment petit du second ordre, c'est à dire que si

l'on rabat le plan TMS sur RMS, MT peut être considéré comme s'appliquant exactement sur MR. Donc l'ellipse non troublée vient s'appliquer exactement sur l'ellipse du mouvement troublé, C.Q.F.D. On conclut en outre, de cette coïncidence, que les deux périhélies, par exemple, et en général deux points correspondants des deux orbites, sont, en négligeant les infiniment petits du second ordre, sur une même perpendiculaire au plan de l'orbite primitive.

Mais si la force MP ne change pas les éléments proprement dits de l'ellipse, elle change la position de son plan. Étudions la nature de ce changement.

Pour cela, transportons la force MP à l'origine S qui est fixe par hypothèse. Nous formons un couple perturbateur dont l'axe est situé dans le plan de l'orbite.

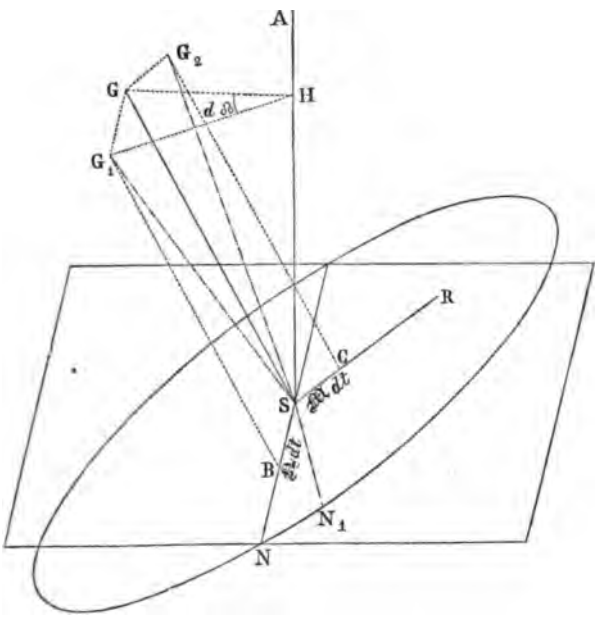
Or, si l'on regarde comme une force la quantité de mouvement dont la planète est animée, et qu'on transporte cette force à l'origine, il en résulte à chaque instant un couple dont le plan est le plan de l'orbite au même instant. S'il n'existait pas d'action extérieure, ce plan serait invariable de position. Le couple serait aussi invariable de grandeur et mesurerait l'aire décrite. On sait en outre, par les principes de la dynamique, que la position de ce couple est changée à chaque instant par l'action du couple perturbateur. Si l'on compose les axes de ces deux couples par la loi du parallélogramme, l'axe résultant est perpendiculaire à la nouvelle position du plan de l'orbite. On a ainsi un moyen simple de mesurer à la fois le déplacement de la ligne des nœuds, et la variation de l'inclinaison.

Décomposons le couple perturbateur en deux autres $\mathcal{M}dt$, $\mathcal{N}dt$ (*fig.* 2) dont les axes soient dirigés respectivement suivant la ligne des nœuds SN de l'orbite sur un plan fixe quelconque, par exemple le plan de l'écliptique, et suivant une perpendiculaire menée à cette ligne dans le plan de l'orbite. Nous supposerons, pour fixer les idées, que les axes SA et SB du plan fixe et de l'orbite soient situés dans l'hémisphère boréal, que N soit le nœud ascendant, et que les mouvements directs soient comptés de droite à gauche.

D'après le principe de la composition des petits mouvements, pour connaître le changement de position qu'éprouve le couple SG pendant le temps dt, il suffit de chercher le changement qui résulte de l'action de chacun de ces couples composants considéré isolé-

ment. Or, ces actions partielles sont faciles à déterminer. Le couple $\mathfrak{N}dt$ composé avec G donne pour résultante SG_1. Or, SG et SG_1 peuvent être considérées comme deux génératrices infiniment

Fig. 2.



voisines d'un cône à base circulaire ayant pour axe la droite SA perpendiculaire au plan fixe. Les angles qu'elles forment avec cet axe ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre; de sorte que l'inclinaison i de l'axe de l'orbite sur l'axe du plan fixe ne change pas par l'effet du couple $\mathfrak{N}dt$.

Mais il n'en est pas de même de la position de la ligne des nœuds. Cette droite, constamment perpendiculaire au plan qui passe par les axes de l'orbite et du plan fixe, vient de SN en SN_1, décrivant un angle NSN_1, ou $d\Omega$ égal à l'angle GHG_1.

Or,

$$GHG_1 = \frac{GG_1}{HG}.$$

Donc,

$$(1) \qquad d\Omega = \frac{\mathfrak{N}dt}{GH} = \frac{\mathfrak{N}dt}{G\sin i}, \text{ ou } \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mathfrak{N}}{G\sin i}.$$

Quant au sens du mouvement, il est direct ou rétrograde, suivant que l'axe du couple $\mathfrak{N}$ est dirigé vers le nœud ascendant N ou vers le nœud descendant. Ainsi, pour que l'équation précédente soit générale, il faut regarder $\mathfrak{N}$ comme positif ou négatif, suivant que son axe tombe sur SN ou sur son prolongement.

Reste le couple $\mathfrak{M}dt$, qui, composé séparément avec G, lui ferait prendre la position SG_1. On voit immédiatement qu'il n'en résulte aucun changement dans la position de la ligne des nœuds; mais l'inclinaison i varie, et l'on a

$$(2) \qquad di = \frac{-GG_1}{SG} = \frac{-\mathfrak{M}dt}{G}, \quad \text{ou} \quad \frac{di}{dt} = \frac{-\mathfrak{M}}{G},$$

équation générale, pourvu que l'on regarde $\mathfrak{M}$ comme positif ou négatif, suivant que son axe aura pour direction SM ou le prolongement de cette ligne.

III

Il reste maintenant à évaluer le couple fini G qui emporte la planète dans son orbite, et les composants $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ du couple perturbateur.

Prenons pour unité de force l'attraction exercée par le Soleil sur l'unité de masse à l'unité de distance, et pour unité de masse la masse du Soleil. Soit m la masse de la planète. Il résulte de ce que nous avons dit plus haut que nous pouvons considérer le Soleil comme fixe, à la condition d'augmenter sa masse dans le rapport de $1 + m$ à 1, ou, ce qui revient au même, à la condition de diminuer la masse de la planète dans le rapport de 1 à $1 + m$, la force attractive totale du Soleil sur la planète restant ce qu'elle est. Cela posé, la quantité de mouvement de la planète sera $\frac{m}{1+m} v$, et le moment de cette quantité de mouvement sera $\frac{m}{1+m} r^2 \frac{dw}{dt}$, v désignant la vitesse de la planète, $\frac{dw}{dt}$ sa vitesse angulaire, r le rayon vecteur.

On a donc

$$G = \frac{m}{1+m} r^2 \frac{dw}{dt} = \frac{m}{1+m} c,$$

c étant la constante des aires.

Or, on a par les formules du mouvement elliptique

$$c = \sqrt{\mu a(1-e^2)},$$

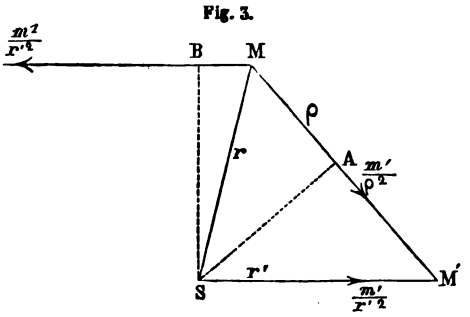
équation dans laquelle a désigne le grand axe de l'ellipse non troublée, e l'excentricité, et μ l'attraction exercée par le centre fixe sur l'unité de masse, à l'unité de distance, attraction qui est évidemment ici égale à $1 + m$.

Donc,

$$G = m\sqrt{\frac{a}{\mu}(1-e^2)}.$$

Calculons actuellement le couple perturbateur, en supposant que ce couple provienne de l'action d'une planète M′, de masse m', que nous regarderons comme immobile pendant le temps dt. Soient r' et ρ les distances respectives de cette planète au Soleil S et à la planète M. On sait que la force perturbatrice relative à l'unité de masse s'obtient en composant la force accélératrice $\frac{m'}{\rho^2}$ provenant de l'attraction directe de M′ sur M avec une force $\frac{m'}{r'^2}$ parallèle et contraire à celle qui résulte de l'action de M′ sur le soleil. On voit donc que si l'on abaisse du point S (*fig.* 3) les

Fig. 3.



perpendiculaires SA et SB sur MM′ et MP, le moment $\mathfrak{L}$ de la force perturbatrice relative à la planète M sera, en regardant les moments comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils agissent de droite à gauche ou de gauche à droite :

$$\mathfrak{L} = \frac{mm'}{\mu}\cdot\frac{1}{r'^2}\,SB - \frac{mm'}{\mu}\cdot\frac{1}{\rho^2}\,SA,$$

$$= \frac{mm'}{\mu}\,r\left(\frac{\sin S}{r'^2} - \frac{\sin M}{\rho^2}\right).$$

D'ailleurs

$$\sin M = \frac{r}{r'} \sin S$$

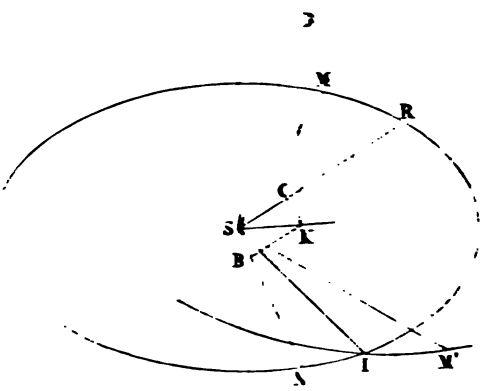
donc

$$\mathfrak{L} = \frac{mm'}{\mu} rr' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin S .$$

Ce couple agit dans le plan des trois corps. Il reste à trouver l'expression du couple composant perpendiculaire au plan de l'orbite, lequel n'est autre que notre couple perturbateur.

Pour cela, projetons sur la sphère céleste (*fig. 4*) les planètes M et M′, ainsi que leurs orbites. Soit I le nœud ascendant de l'orbite de M sur celle de M′. Le couple $\mathfrak{L}$ situé dans le plan M′SM a pour

Fig. 4.



axe une certaine ligne SD, qui est évidemment perpendiculaire à SM. Soit η l'angle que fait cet axe avec l'axe SG de l'orbite de M, et convenons de compter constamment cet angle de droite à gauche, en allant de SG à SD, et en nous plaçant le long de SM, les pieds en S. Le couple perturbateur $\mathfrak{L}'$ a évidemment pour axe la projection SK de SD sur le plan de l'orbite, d'où

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \sin \eta = \frac{mm'}{\mu} rr' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3} \right) \sin S \sin \eta .$$

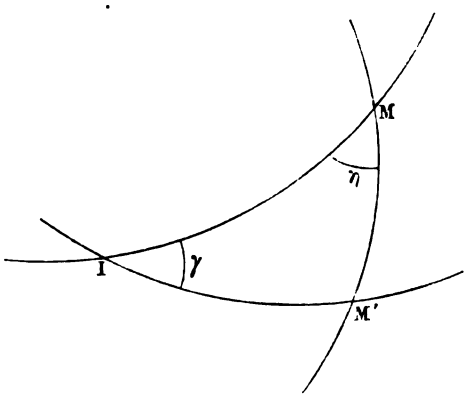
équation générale, si l'on a égard à nos conventions.

D'ailleurs, le triangle sphérique IMM' (*fig.* 5) donne, en désignant par γ l'angle des deux orbites,

$$\sin\eta \sin \mathrm{MM'} = \sin\gamma \sin \mathrm{IM'},$$

l'arc IM' étant toujours compté de I vers M' dans le sens direct

Fig. 5.



Donc,

$$\mathfrak{L}' = \frac{mm'}{\mu} rr' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) \sin\gamma \sin \mathrm{M'I}.$$

Enfin, si nous décomposons à son tour le couple $\mathfrak{L}'$ en deux autres dont les axes soient respectivement dirigés (*fig.* 4) suivant la ligne SN, intersection de l'orbite mobile et du plan fixe, et suivant la ligne SR menée perpendiculairement à SN dans le plan de l'orbite, nous avons les expressions des couples $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$ rapportés à l'unité de temps,

$$\mathfrak{N} = \mathrm{SB} = \mathfrak{L}' \cos \mathrm{KSN} = \mathfrak{L}' \sin \mathrm{MSN},$$
$$\mathfrak{M} = \mathrm{SC} = \mathfrak{L}' \cos \mathrm{KSR} = -\mathfrak{L}' \cos \mathrm{MSN}.$$

Substituant, dans les formules (1) et (2), les valeurs de $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$, de $\mathfrak{L}$ et de G, on obtient :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} rr' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) \frac{\sin\gamma}{\sin i} \sin \mathrm{M'I} \sin \mathrm{MSN},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} rr' \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right) \sin\gamma \sin \mathrm{M'I} \cos \mathrm{MSN}.$$

Pour donner à ces formules l'une des formes qui se déduisent de la théorie de la variation des constantes arbitraires, nous remarquerons d'abord qu'en désignant par ν et Ω la longitude de la planète et celle du nœud ascendant de l'orbite de M sur le plan fixe, par ν' et Π les longitudes de M′ et de l'intersection des deux orbites, comptées sur l'orbite de M′, on a

$$\mathrm{MI} = \nu' - \Pi, \qquad \mathrm{MSN} = \nu - \Omega.$$

En outre, si l'on fait $s = \cos \mathrm{S}$, la fonction perturbatrice R a pour expression (*Mécanique céleste*, liv. II, chap. VI)

$$\mathrm{R} = \frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{\rho} = \frac{rs}{r'^2} - (r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{R}}{ds} = rr'\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho^3}\right).$$

La substitution donne immédiatement les formules connues,

$$(3) \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} \frac{\sin\gamma}{\sin i} \sin(\nu' - \Pi) \sin(\nu - \Omega) \frac{d\mathrm{R}}{ds},$$

$$(4) \quad \frac{di}{dt} = \frac{m'}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} \sin\gamma \sin(\nu' - \Pi) \cos(\nu - \Omega) \frac{d\mathrm{R}}{ds}.$$

III

Après avoir étudié l'action de la composante de la force perturbatrice qui est perpendiculaire au plan de l'orbite, nous allons nous occuper de la composante qui agit dans ce plan lui-même. Cette dernière force est celle qui produit la variation du grand axe, le déplacement du périhélie, et la variation de l'excentricité.

Décomposons cette force en deux autres, l'une tangentielle $\mathrm{T}dt$, l'autre normale $\mathrm{N}dl$, rapportées à l'unité de masse et au temps dt. La première est la seule qui modifie l'intensité de la vitesse, et par conséquent la longueur du grand axe. Nous partirons d'une des formules fondamentales du mouvement elliptique, formule qui se déduit immédiatement du principe des forces vives :

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

a désignant le demi-grand axe.

Au commencement de l'instant dt, la force perturbatrice instantanée donne à la vitesse un accroissement subit, que je désigne par dv. Il en résulte pour a l'accroissement da, et l'on a l'équation

$$2vdv = \frac{\mu da}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad da = \frac{2a^2}{\mu} vdv.$$

Mais, d'autre part, cet accroissement dv produit par la force Tdt est la mesure de cette force instantanée. On peut donc remplacer dv par Tdt, d'où

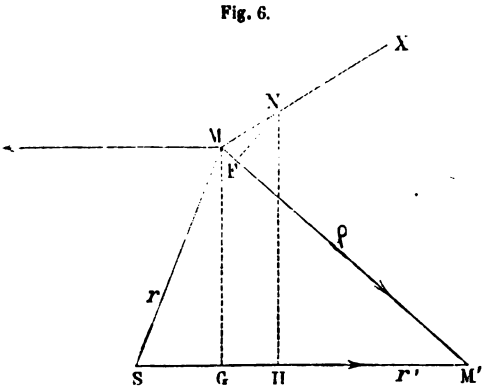
$$da = \frac{2a^2}{\mu} v.\,Tdt = \frac{\dot{2}a^2}{\mu} Td\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément de l'arc.

Pour transformer cette formule, nous commencerons par remarquer que, si la force perturbatrice provient de l'attraction d'une planète M', sa composante suivant une direction MX quelconque, considérée comme un axe de coordonnées, a pour expression $-m'\frac{dR}{dx}$; c'est ce qui résulte immédiatement des équations générales du mouvement troublé (*Mécanique céleste*, livre II, chap. VI), et ce qu'on peut d'ailleurs établir géométriquement comme il suit :

La composante X, suivant MX, de la force perturbatrice (*fig.* 6), s'obtiendra évidemment en prenant la somme algébrique des pro-

Fig. 6.



jections, suivant cette direction, des deux forces partielles dont elle est formée, savoir $\frac{m'}{\rho^2}$ qui va de M vers M', et $\frac{m'}{r'^2}$ menée par M

parallèlement à M'S. Soit donc MN la projection sur MX du chemin parcouru par la planète M dans le temps dt. Abaissons NF perpendiculaire sur MM', et MG, NH perpendiculaires sur SM'. Nous aurons

$$X = \frac{m'}{\rho^2}\frac{MF}{MN} - \frac{m'}{r'^2}\frac{GH}{MN}$$

$$= \frac{m'}{MN}\left\{-\frac{d\rho}{\rho^2} - \frac{d(r\cos S)}{r'^2}\right\} = \frac{m'}{MN}\,d\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r\cos S}{r'^2}\right).$$

D'après ce théorème général, la composante tangentielle $T = -m'\frac{dR}{d\sigma}$, $d\sigma$ désignant l'élément de l'orbite troublée, et la formule de la variation du grand axe devient

$$da = -\frac{2a^2m'}{\mu}\frac{dR}{d\sigma}\,d\sigma,$$

d'où

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2m'}{\mu}\frac{dR}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2a^2m'}{\mu}\frac{dR}{dt}.$$

Mais il faut observer que, dans l'expression de R, ce sont les coordonnées de M qui varient seules, tandis que celles de M' restent invariables par hypothèse, quoiqu'elles soient en réalité fonctions du temps. Pour tenir compte de cette particularité, on remarque que les coordonnées de M sont fonctions de l'anomalie excentrique u, et que l'on a, par les formules du mouvement elliptique, $u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi$, e désignant l'excentricité, n le moyen mouvement, ε la longitude moyenne de l'époque, et ϖ la longitude du périhélie. On voit donc que, dans le développement de la fonction R, le temps est toujours joint à n et à ε, d'où il suit qu'on peut remplacer dans l'équation précédente la dérivée $\frac{dR}{dt}$ par $n\frac{dR}{d\varepsilon}$, et l'on arrive ainsi à la formule connue

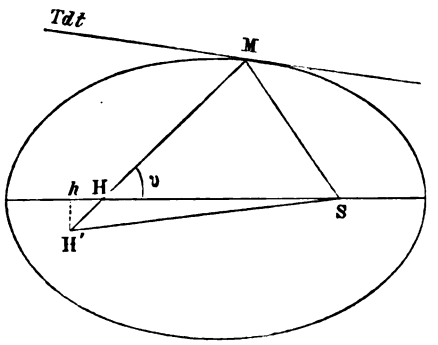
$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2n}{\mu}m'\frac{dR}{d\varepsilon}. \tag{5}$$

IV

Cherchons actuellement la variation de l'excentricité et le déplacement du périhélie. Désignons par E la distance focale SH (*fig.* 7), et par χ l'angle qui fait le grand axe avec une ligne fixe quelconque tracée par le foyer dans le plan de l'orbite. Nous comptons cet angle χ dans le sens direct.

Étudions d'abord l'effet de la force tangentielle, et, pour cela, voyons quel changement elle produit sur la position du second foyer. Soit M la planète et Tdt la force. Pour avoir la position que prend le second foyer, après l'action de cette force, il faut joindre

Fig. 7.



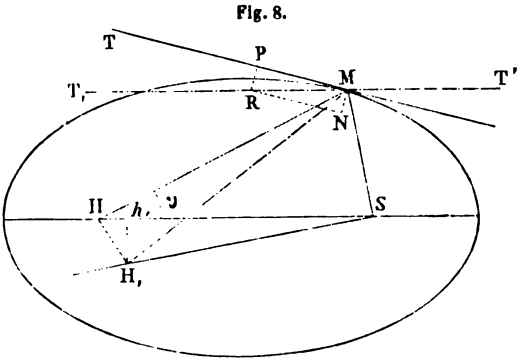
le point S au point M, et mener ensuite par ce point M une droite MH qui fasse avec cette tangente le même angle que la ligne SM. Le second foyer se trouvera évidemment sur la direction MH, mais en un point H' éloigné du point H d'une distance HH' = da; car la somme SM + MH' doit être égale au nouveau grand axe : abaissons H'h perpendiculaire sur SH. On voit que l'accroissement de la longueur SH est égal à Hh, à un infiniment petit près du second ordre, et que l'accroissement de l'angle χ est HSH' ou $\frac{hH'}{E}$. On a donc, en désignant par d_1E et $d_1\chi$ les accroissements qui proviennent de l'action de la force tangentielle, et par υ l'angle MHS,

$$d_1E = hH = HH' \cos hHH' = 2da \cos\upsilon = \frac{4a^2}{\mu} \cos\upsilon T d\sigma,$$

$$d_1\chi = \frac{hH'}{E} = \frac{HH'}{E} \sin hHH' = \frac{2da}{E} \sin\upsilon = \frac{4a^2}{\mu E} \sin\upsilon T d\sigma.$$

Passons aux effets de la composante normale Ndt. Cette force change la direction de la vitesse au temps t. C'est en effet une force instantanée qui donne au point M une vitesse initiale Ndt dans le sens de la normale, et qui lui fait parcourir, dans le temps dt, la petite longueur MN = Ndt . dt = Ndt^2 (*fig.* 8). Cette ligne MN, composée avec l'élément $d\sigma$ ou MP, donne la direction MR du nouvel élément ou de la nouvelle tangente. Pour avoir la nouvelle position du second foyer, il faut donc mener la ligne

Fig. 8.



MH_1 qui fait avec MR un angle égal à SMT', et prendre $MH_1 = MH$; car la force normale ne change pas la longueur du grand axe, puisqu'elle n'augmente la vitesse que d'un infiniment petit du second ordre. L'angle HMH_1 est ainsi le double de l'angle PMR. Abaissons la perpendiculaire H_1h_1, et joignons SH_1. Nous aurons, en désignant par d_2E et $d_2\chi$, les accroissements de E et de χ qui proviennent de la force normale,

$$d_2E = -Hh_1 = -HH_1 \sin\upsilon,$$

$$d_2\chi = \frac{h_1H_1}{E} = \frac{HH_1}{E}\cos\upsilon.$$

D'ailleurs,

$$HH_1 = MH.\ \widehat{HMH_1} = 2MH.\ \widehat{PMR} = MH.\ \frac{2PR}{PM} = (2a-r).\frac{2Ndt^2}{d\sigma}$$

$$= (2a-r)\cdot\frac{2Nd\sigma}{v^2} = (2a-r)\cdot\frac{2Nd\sigma}{\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a}} = 2ar\cdot\frac{Nd\sigma}{\mu}.$$

Donc

$$d_1\mathrm{E} = -\frac{2ar}{\mu}\sin v\,.\,\mathrm{N}d\sigma\,,$$

$$d_1\chi = \frac{2ar}{\mu\mathrm{E}}\cos v\,.\,\mathrm{N}d\sigma\,.$$

On aura donc, en réunissant les deux parties de chacune des variations,

$$\mu d\mathrm{E} = 4a^2\cos v.\mathrm{T}d\sigma - 2ar\sin v.\,\mathrm{N}d\sigma\,,$$
$$\mu\mathrm{E}d\chi = 4a^2\sin v.\mathrm{T}d\sigma + 2ar\cos v.\,\mathrm{N}d\sigma\,.$$

Avant d'aller plus loin, nous pouvons remarquer que ces formules se ramèneraient facilement à celles que Lagrange déduit d'une méthode géométrique différente, et qui me paraît moins simple.

V

Pour arriver, en partant de ces formules, à celles qui se déduisent de la variation des constantes arbitraires, il ne reste plus que des transformations algébriques assez simples à effectuer. Commençons par substituer aux forces tangentielle et normale d'autres forces qui soient dirigées suivant le prolongement du rayon vecteur, et perpendiculairement à ce rayon, en comptant le sens positif dans le sens du mouvement. Désignons ces forces par H et K. On aura, en appelant ω l'angle qui fait la tangente avec le prolongement du rayon vecteur,

$$\mathrm{H} = \mathrm{T}\cos\omega - \mathrm{N}\sin\omega\,, \qquad \mathrm{K} = \mathrm{T}\sin\omega + \mathrm{N}\cos\omega,$$

d'où

$$\mathrm{T} = \mathrm{H}\cos\omega + \mathrm{K}\sin\omega\,, \qquad \mathrm{N} = -\mathrm{H}\sin\omega + \mathrm{K}\cos\omega.$$

Il vient, en substituant, et mettant pour $\sin\omega\,d\sigma$ et $\cos\omega\,d\sigma$ leurs valeurs rdw et dr,

$$\mu\,d\mathrm{E} = \mathrm{H}(4a^2\cos v.dr + 2ar\sin v.rdw) + \mathrm{K}(4a^2\cos v.rdw - 2ar\sin v.dr),$$
$$\mu\mathrm{E}d\chi = \mathrm{H}(4a^2\sin v.dr - 2ar\cos v.rdw) + \mathrm{K}(4a^2\sin v.rdw + 2ar\cos v.dr).$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{E} = 2a\alpha\,, \quad \text{d'où} \quad d\mathrm{E} = 2\alpha da + 2ade.$$

Substituons ces valeurs, en divisant par $2a$ les deux membres, et mettant pour $\frac{da}{a}$ sa valeur

$$\frac{da}{a} = \frac{2a}{\mu} T d\sigma = \frac{2a}{\mu} (H dr + K r dw);$$

il vient

$$(6) \quad \mu de = H \{ 2a (\cos v - e) dr + \sin v . r^2 dw \} + K \{ 2a (\cos v - e) r dw - r \sin v . dr \},$$

$$(7) \quad \mu e d\chi = H (2a \sin v . dr - \cos v . r^2 dw) + K (2a \sin v . r dw + r \cos v . dr).$$

Reste à éliminer l'angle v. Pour cela, posons

$$r + \rho = 2a, \qquad f^2 = 1 - e^2;$$

soient w l'anomalie vraie et ψ l'anomalie excentrique.

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{af^2}{r} = 1 + e \cos w;$$

on a en outre immédiatement les formules suivantes, qui nous seront utiles pour notre substitution :

$$r = a (1 - e \cos \psi), \qquad \rho = a (1 + e \cos \psi),$$
$$r \cos w = a (\cos \psi - e), \qquad \rho \cos v = a (\cos \psi + e),$$
$$r \sin w = af \sin \psi = \rho \sin v,$$
$$af^2 dr = r^2 e \sin w dw = aefr \sin \psi dw,$$
$$\cos v = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{af^2}{\rho} \right),$$
$$\cos v - e = \frac{a (\cos \psi - e) - \rho e}{\rho} = \frac{af^2 \cos \psi}{\rho} = \frac{f^2}{e} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right),$$
$$r^2 dw = c dt = f \sqrt{\mu a}\, dt, \qquad \frac{1}{n} = \frac{a \sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}.$$

Cela posé, transformons successivement nos quatre coefficients.

$$C_1 = 2a (\cos v - e) dr + r^2 \sin w dw$$
$$= \frac{2af^2}{e} \left(1 - \frac{a}{\rho} \right) \frac{e}{af^2} r^2 \sin w dw + \frac{r^2}{\rho} \sin w dw,$$

$$C_1 = r^2 \sin w\, dw \left(\frac{2\rho - 2a + r}{\rho}\right)$$
$$= r^2 \sin w dw = f\sqrt{\mu a}\sin w\, dt,$$

$$C_2 = 2ar\,(\cos v - e)dw - r\sin v\, dr$$
$$= \frac{ar}{\rho}\,(2af^2\cos\psi - er\sin^2\psi)\,dw$$
$$= \frac{ar}{\rho}\,(2af^2\cos\psi - 2ae\sin^2\psi + e\rho\sin^2\psi)\,dw$$
$$= \frac{ar}{\rho}\cdot\left\{2a(\cos\psi - e^2\cos\psi - e + e\cos^2\psi) + e\rho\sin^2\psi\right\}dw$$
$$= \frac{ar}{\rho}\left\{2a(1 + e\cos\psi)(\cos\psi - e) + e\rho\sin^2\psi\right\}dw$$
$$= 2ar\,(\cos\psi - e)\,dw + aer\sin^2\psi\, dw$$
$$= r^2\left(2\cos w dw + \sin w\,\frac{dr}{r}\right)$$
$$= r^2\left(\frac{2}{r}\cos w dw - \sin w d.\,\frac{1}{r}\right)$$
$$= r^2\left(\frac{2\cos w + 2e\cos^2 w}{af^2} + \frac{e\sin^2 w}{af^2}\right)dw$$
$$= \frac{r^2}{af^2}\left\{e + \cos w + (1 + e\cos w)\cos w\right\}dw$$
$$= \frac{r^2}{af^2}\left\{\frac{f^2}{e}\cdot\frac{a - r}{r} + \frac{af^2}{r}\left(\frac{af^2}{er} - \frac{1}{e}\right)\right\}dw$$
$$= r^2 dw\cdot\frac{1}{ae}\left(\frac{a^2f^2}{r^2} - 1\right) = \frac{fr}{e}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\frac{a^2f^2}{r^2} - 1\right),$$

$$C_3 = 2a\sin v\, dr - \cos v\, r^2 dw$$
$$= -r^2(2a\sin v\, d.\,\frac{1}{r} + \cos v\, dw)$$
$$= r^2\left\{\frac{2r\sin w}{\rho}\cdot\frac{e\sin w}{f^2}dw - \left(1 - \frac{af^2}{\rho}\right)\frac{dw}{e}\right\}$$
$$= \frac{r^2 dw}{\rho}\left(\frac{2er\sin^2 w}{f^2} - \frac{\rho - af^2}{e}\right)$$
$$= \frac{r^2 dw}{ef^2\rho}\left\{2e^2 r - 2e^2 r\cos^2 w - f^2\rho + af^4\right\}$$
$$= \frac{r^2 dw}{e\rho}\left\{\rho(1 - e\cos w) - \rho\right\} = r^2\cos w\, dw = f\sqrt{\mu a}\cos w\, dt,$$

$$
\begin{aligned}
C_4 &= 2a \sin v\, r dw + r \cos v\, dr \\
&= 2a . \frac{r^2 \sin w}{p} dw + r \left(\frac{1}{e} - \frac{af^2}{pe} \right) dr \\
&= \frac{r^2}{p} \left\{ 2a \sin w\, dw + (p - af^2) \frac{dr}{er} \right\} \\
&= \frac{r^2}{p} \left\{ 2a \sin w\, dw + (p - af^2) \cdot \frac{r}{af^2} \sin w\, dw \right\} \\
&= \frac{r^2}{p} \sin w dw \left(p + \frac{pr}{af^2} \right) = r^2 \sin w dw \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos w} \right) \\
&= r^2 \left\{ 2 \sin w\, dw - \cos w . \frac{e \sin w dw}{1 + e \cos w} \right\} = r \left\{ 2 \sin w\, dw - \cos w \frac{dr}{r} \right\} \\
&= r^2 \left(\frac{2}{r} \sin w\, dw + \cos w \frac{dr}{r} \right) = r^2 \sin w\, dw \left(\frac{2}{r} - \frac{e \cos w}{af^2} \right) \\
&= fr \sqrt{\mu a} \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{f^2} \right) \sin w\, dt .
\end{aligned}
$$

Ces coefficients transformés, nous n'avons plus qu'à substituer leurs nouvelles valeurs dans les équations (6) et (7). Nous remarquerons que, d'après le théorème démontré plus haut sur les composantes de la force perturbatrice, nous avons

$$H = -m' \frac{dR}{dr}, \qquad K = -m' \frac{dR}{r dw} .$$

Nous diviserons les deux membres par $\mu n dt$, n exprimant le moyen mouvement, et nous obtiendrons en définitive :

$$(8) \quad \frac{de}{ndt} = -\frac{m'}{\mu} a^2 f \sin w \frac{dR}{dr} + \frac{m'}{\mu} \cdot \frac{af}{e} \left(1 - \frac{a^2 f^2}{r^2} \right) \frac{dR}{dw} ,$$

$$(9) \quad \frac{e d\chi}{ndt} = \frac{m'}{\mu} a^2 f \cos w \frac{dR}{dr} - \frac{m'}{\mu} af \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{f^2} \right) \sin w \frac{dR}{dw} .$$

La première de ces formules est sous l'une des formes auxquelles on arrive quand on veut exprimer la variation de l'excentricité dans la théorie de la variation des constantes arbitraires. Il est même à remarquer que c'est peut-être la plus commode pour le calcul. Elle se ramène sans difficulté à la formule suivante, qu'on trouve en note au chapitre IV des *Recherches astronomiques* publiées par M. Le Verrier dans le premier volume des *Annales de l'Obser-*

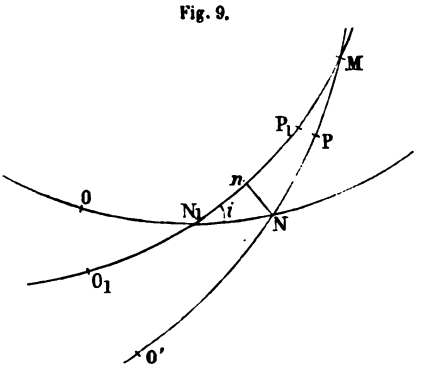
valoire (les différences apparentes tiennent aux notations et au signe choisi pour la fonction perturbatrice) :

$$\frac{de}{ndt} = -\frac{m'}{\mu}a^2 \sin w \frac{dR}{dr} + \frac{m'}{\mu}\frac{af}{e}\left(1 - \frac{a^2 f}{r^2}\right)\frac{dR}{dw} - \frac{fe}{2(1+f)}\frac{d\log a}{ndt}.$$

Quant à la seconde formule, elle donne le déplacement du périhélie, dans le plan même de l'orbite mobile, par rapport à une ligne fixe quelconque tracée par le foyer dans ce plan. C'est la partie du déplacement total du périhélie qui dépend des forces qui agissent dans le plan de l'orbite. Mais, pour avoir le déplacement tout entier, il faut ajouter un terme qui provient du déplacement même du plan de l'orbite, en vertu de la composante normale à ce plan. Ce terme est aisé à calculer directement.

Prenons pour plan fixe le plan de l'orbite de la planète troublante M', et considérons les deux positions infiniment voisines que prend l'orbite de M, avant et après la perturbation produite dans le temps *dt* par la force normale. Ces deux orbites successives se coupent suivant le rayon vecteur qui passe au point M (*fig.* 9). D'après ce que nous avons dit plus haut, on peut les rabattre l'un sur l'autre par une rotation autour de SM. On amène ainsi le

Fig. 9.



périhélie P sur le périhélie P_1. Cela posé, soient N et N_1 l'ancien et le nouveau nœud. Si l'on prend pour origine le point O de l'orbite fixe, on sait que l'usage des astronomes est de compter les longitudes, sur les orbites mobiles, à partir des points O' et O_1, que l'on obtient en prenant NO' = NO et $N_1O_1 = N_1O$. Enfin, si l'on élève en N la perpendiculaire N*n* à l'arc MN, on voit que $PN = P_1n$.

Cela posé, la variation de la longitude du point P est

$$\begin{aligned} P_1O_1 - PO' &= (P_1N_1 + N_1O_1) - (PN + NO') \\ &= (P_1N_1 + N_1O) - (PN + NO) \\ &= (P_1N_1 - PN) - NN_1 \\ &= N_1n - N_1N = N_1N(\cos i - 1) \\ &= -\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i.NN_1 = \operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,d\Omega. \end{aligned}$$

Il suit de là qu'en désignant par ϖ la longitude du périhélie de la planète troublée, comptée à partir du nœud ascendant de son orbite sur l'orbite de la planète troublante, on a, pour exprimer la variation complète de cette longitude, la formule suivante :

$$\frac{d\varpi}{ndt} = \frac{m'}{\mu}\frac{a^2f\cos w}{e}\frac{dR}{dr} - \frac{m'}{\mu}\frac{af}{e}\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{f^2}\right)\sin w\frac{dR}{dw} + \operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\frac{d\Omega}{ndt}.$$

VI

Les cinq éléments dont nous venons d'évaluer les variations suffisent à fixer à chaque instant la forme et la position de l'orbite troublée; mais le mouvement de la planète n'est entièrement déterminé que si l'on connaît en outre le lieu qu'elle occupe sur cette orbite. Le mouvement elliptique dépend donc d'une sixième constante qui s'introduit comme les autres par l'intégration. Les coordonnées de la planète sont en effet fonctions de sa longitude moyenne, et c'est dans l'expression de cette longitude qu'entre cette nouvelle constante.

Soient toujours

ψ l'anomalie excentrique,
ϖ la longitude du périhélie;

soient, en outre,

α l'anomalie moyenne,
λ la longitude moyenne;

on a par les formules du mouvement elliptique,

$$\alpha = \psi - e\sin\psi, \quad \text{avec} \quad r = a(1 - e\cos\psi), \tag{10}$$

$$\lambda = \alpha + \varpi = \psi - e\sin\psi + \varpi, \tag{12}$$

$$\lambda = nt + \varepsilon, \tag{13}$$

ε étant la valeur de la longitude moyenne pour $t = 0$.

Mais cette dernière équation se rapporte, comme les autres, au mouvement elliptique non troublé, dans lequel n est constant. Dans le mouvement troublé, où n varie d'un instant à l'autre, nous définirons la constante ε par l'équation

$$\varepsilon = \lambda - \int_0^t n dt$$

qui se confond avec la précédente, tant que le mouvement reste elliptique.

On tire de là, en désignant par $d\varepsilon$ et $d\lambda$ les variations qui subissent ε et λ pendant le temps dt, sous l'action de la force perturbatrice,

$$d\varepsilon = d\lambda - n dt.$$

Remarquons d'ailleurs que, pendant ce temps dt, deux causes distinctes contribuent à produire l'accroissement de la longitude moyenne : d'une part, le mouvement de la planète sur son orbite qui donne un accroissement ndt; d'autre part, la variation des éléments de l'ellipse. Si l'on désigne par $(d\lambda)$ cette dernière partie de l'accroissement de λ, l'équation précédente donne évidemment

$$d\varepsilon = (d\lambda).$$

Or, $(d\lambda)$ s'obtiendra facilement en faisant varier, dans les équations (10), (11) et (12), les constantes a et e : on a

$$(d\lambda) = d\alpha + d\varpi,$$

et

$$d\alpha = d\psi\,(1 - e\cos\psi) - \sin\psi de.$$

On tire d'ailleurs de l'équation (11), en observant que r doit être traité comme une constante, puisqu'on ne cherche ici que les effets de la variation des éléments de l'ellipse sur les coordonnées de la planète,

$$(1 - e\cos\psi)\,da - a\cos\psi de + ae\sin\psi d\psi = 0.$$

Éliminant $d\psi$ entre cette équation et la précédente, il vient

$$ae\sin\psi\, d\alpha + (1 - e\cos\psi)^2 da = (1 - e\cos\psi)\, a\cos\psi de - ae\sin^2\psi\, de$$
$$= ade\,(\cos\psi - e).$$

Éliminons ψ à l'aide de l'équation (11). On a

$$1-e\cos\psi=\frac{r}{a},\quad \cos\psi-e=\frac{a-r}{ae}-e,$$

$$a^2e^2\sin^2\psi=a^2e^2-(a-r)^2.$$

Donc

$$da\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}=\left(\frac{a-r}{e}-ae\right)de-\frac{r^2da}{a^2}.$$

D'ailleurs

$$a-r=a-\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}=ae\frac{e+\cos w}{1+e\cos w},$$

d'où

$$\frac{a-r}{e}-ae=\frac{af^2\cos w}{1+e\cos w}=r\cos w,$$

et

$$a^2e^2-(a-r)^2=\frac{r^2e^2\sin^2w}{f^2}.$$

Donc enfin

$$da=\frac{f}{e}\frac{\cos w}{\sin w}de-\frac{fr}{a^2e\sin w}da,$$

et

$$(14)\qquad \frac{de}{ndt}=\frac{(d\lambda)}{ndt}=\frac{f}{e}\frac{\cos w}{\sin w}\frac{de}{ndt}-\frac{fr}{a^2e\sin w}\frac{da}{ndt}+\frac{d\varpi}{ndt}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans cette équation, à la place des quotients $\frac{de}{ndt}$, $\frac{da}{ndt}$, $\frac{d\varpi}{ndt}$, leurs valeurs en fonctions de $\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dw}$. Pour cela, il faut commencer par transformer la valeur de $\frac{da}{ndt}$ qui nous est donnée par l'équation (5) :

$$\frac{da}{ndt}=-\frac{2a^2m'}{\mu}\frac{dR}{d\varepsilon}.$$

On a

$$\frac{dR}{d\varepsilon}=\frac{dR}{dr}\frac{dr}{d\varepsilon}+\frac{dR}{dw}\frac{dw}{d\varepsilon}.$$

Nous avons vu d'ailleurs que ε n'entrait dans les équations du mouvement elliptique que par le binôme $nt + \varepsilon$. Dès lors, en partant des équations des aires et des forces vives,

$$r^2 dw = f\sqrt{\mu a}\, dt,$$

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2 dw^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

on trouve immédiatement

$$\frac{dw}{d\varepsilon} = \frac{dw}{ndt} = \frac{a^2 f}{r^2},$$

$$\frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{dr}{ndt} = \frac{ae \sin w}{f},$$

d'où

$$\frac{da}{ndt} = -\frac{2a^2 m'}{\mu}\left(\frac{ae}{f}\sin w \frac{dR}{dr} + \frac{a^2 f}{r^2}\frac{dR}{dw}\right).$$

L'équation (14) devient donc, par la substitution des valeurs de nos trois quotients,

$$\frac{d\varepsilon}{ndt} = \frac{m'}{\mu} a^2 \left(-\frac{f^2}{e}\cos w + \frac{2r}{a} + \frac{f}{e}\cos w\right)\frac{dR}{dr}$$
$$+ \frac{m'}{\mu} a \left\{\frac{f^2}{e^2}\frac{\cos w}{\sin w}\left(1 - \frac{a^2 f^2}{r^2}\right) + \frac{2af^2}{er\sin w} - \frac{f}{e}\sin w\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{f^2}\right)\right\}\frac{dR}{dw}$$
$$+ \operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i \frac{d\Omega}{ndt}.$$

Pour réduire le coefficient de $\frac{dR}{dw}$, groupons les deux premiers termes compris dans l'accolade. Leur somme peut s'écrire

$$\frac{f^2}{e^2 \sin w}\left\{\cos w\left(1 - \frac{a^2 f^2}{r^2}\right) + \frac{2ae}{r}\right\}.$$

Posons

$$r = af^2(k - 1),$$

d'où

$$\frac{a}{r} + \frac{1}{f^2} = \frac{1}{f^2}\frac{k}{k-1}, \qquad \cos w = \frac{1}{e}\cdot\frac{2-k}{k-1},$$

$$\sin^2 w = \frac{-k^2 f^2 + 2(1+f^2)k - 3 - f^2}{e^2 (k-1)^2}$$

On a

$$\cos w\left(1-\frac{a^2f^2}{r^2}\right)+\frac{2ae}{r}=\frac{1}{e}\cdot\frac{2-k}{k-1}\left(1-\frac{1}{f^2(k-1)^2}\right)+\frac{2e}{f^2(k-1)}$$

$$=\frac{1}{e(k-1)}\left(2-k-\frac{2-k}{f^2(k-1)^2}+\frac{2-2f^2}{f^2}\right)$$

$$=\frac{1}{ef^2(k-1)}\cdot\frac{(2-kf^2)(k-1)^2-2+k}{(k-1)^2}$$

$$=\frac{k}{ef^2(k-1)^3}\left(-k^2f^2+2(1+f^2)k-3-f^2\right)$$

$$=\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)e\sin^2 w\,.$$

Le coefficient de $\frac{m'}{\mu}\,a\,\frac{dR}{dw}$ est donc

$$\frac{f^2\sin w}{e}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)-\frac{f\sin w}{e}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)=\frac{(f-1)f}{e}\sin w\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right).$$

Nous trouvons donc pour l'expression définitive de $\frac{d\varepsilon}{ndt}$, en remarquant que

$$\frac{1-f}{e}=\frac{e}{1+f}\,,$$

$$\frac{d\varepsilon}{ndt}=\frac{m'}{\mu}\,a^2\left(\frac{2r}{a}+\frac{fe}{1+f}\cos w\right)\frac{dR}{dr}-\frac{m'a}{\mu}\,\frac{ef}{1+f}\sin w\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)\frac{dR}{dw}$$

$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{ndt}\,.$$

Si maintenant nous réunissons les diverses formules auxquelles nous sommes successivement parvenus, nous avons, pour les variations des six éléments dont dépend le mouvement d'une planète, les équations suivantes :

$$\frac{d\Omega}{ndt} = \frac{m'a}{\mu f}\,\frac{\sin\gamma}{\sin i}\,\sin(\nu'-\Pi)\cos(\nu-\Omega)\frac{dR}{ds},$$

$$\frac{di}{ndt} = \frac{m'a}{\mu f}\,\sin\gamma\,\sin(\nu'-\Pi)\cos(\nu-\Omega)\,\frac{dR}{ds},$$

$$\frac{da}{ndt} = -\frac{2m'a^2}{\mu}\left(\frac{ae}{f}\sin w\,\frac{dR}{dr} + \frac{a^2f}{r^2}\,\frac{dR}{dw}\right),$$

$$\frac{de}{ndt} = -\frac{m'}{\mu}\,a^2 f\sin w\,\frac{dR}{dr} + \frac{m'}{\mu}\,\frac{af}{e}\left(1-\frac{af^2}{r^2}\right)\frac{dR}{dw},$$

$$\frac{d\varpi}{ndt} = \frac{m'}{\mu}\,\frac{a^2f}{e}\cos w\,\frac{dR}{dr} - \frac{m'}{\mu}\,\frac{af}{e}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)\sin w\,\frac{dR}{dw},$$
$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{ndt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{ndt} = \frac{m'}{\mu}a^2\left(\frac{2r}{a}+\frac{fe}{1+f}\cos w\right)\frac{dR}{dr} - \frac{m'a}{\mu}\,\frac{ef}{1+f}\sin w\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)\frac{dR}{dw}$$
$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{ndt}.$$

On voit que ces équations ont été déduites de considérations géométriques très simples et que les calculs sont tous élémentaires. En outre, l'un des avantages de notre théorie est de montrer nettement la signification mécanique de chacun des termes qui entrent dans les expressions algébriques des variations.

On a

$$\cos w\left(1-\frac{a^2f^2}{r^2}\right)+\frac{2ae}{r}=\frac{1}{e}\cdot\frac{2-k}{k-1}\left(1-\frac{1}{f^2(k-1)^2}\right)+\frac{2e}{f^2(k-1)}$$

$$=\frac{1}{e(k-1)}\left(2-k-\frac{2-k}{f^2(k-1)^2}+\frac{2-2f^2}{f^2}\right)$$

$$=\frac{1}{ef^2(k-1)}\cdot\frac{(2-kf^2)(k-1)^2-2+k}{(k-1)^2}$$

$$=\frac{k}{ef^2(k-1)^3}\left(-k^2f^2+2(1+f^2)k-3-f^2\right)$$

$$=\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)e\sin^2 w\,.$$

Le coefficient de $\frac{m'}{\mu}\,a\,\frac{dR}{dw}$ est donc

$$\frac{f^2\sin w}{e}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)-\frac{f\sin w}{e}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)=\frac{(f-1)f}{e}\sin w\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right).$$

Nous trouvons donc pour l'expression définitive de $\frac{d\varepsilon}{ndt}$, en remarquant que

$$\frac{1-f}{e}=\frac{e}{1+f},$$

$$\frac{d\varepsilon}{ndt}=\frac{m'}{\mu}\,a^2\left(\frac{2r}{a}+\frac{fe}{1+f}\cos w\right)\frac{dR}{dr}-\frac{m'a}{\mu}\,\frac{ef}{1+f}\sin w\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)\frac{dR}{dw}$$

$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{ndt}\,.$$

Si maintenant nous réunissons les diverses formules auxquelles nous sommes successivement parvenus, nous avons, pour les variations des six éléments dont dépend le mouvement d'une planète, les équations suivantes :

$$\frac{d\Omega}{ndt} = \frac{m'a}{\mu f}\,\frac{\sin\gamma}{\sin i}\,\sin(\nu'-\Pi)\cos(\nu-\Omega)\frac{dR}{ds},$$

$$\frac{di}{ndt} = \frac{m'a}{\mu f}\,\sin\gamma\,\sin(\nu'-\Pi)\cos(\nu-\Omega)\,\frac{dR}{ds},$$

$$\frac{da}{ndt} = -\frac{2m'a^2}{\mu}\left(\frac{ae}{f}\sin w\,\frac{dR}{dr} + \frac{a^2 f}{r^2}\,\frac{dR}{dw}\right),$$

$$\frac{de}{ndt} = -\frac{m'}{\mu}\,a^2 f\sin w\,\frac{dR}{dr} + \frac{m'}{\mu}\,\frac{af}{e}\left(1-\frac{af^2}{r^2}\right)\frac{dR}{dw},$$

$$\frac{d\varpi}{ndt} = \frac{m'}{\mu}\,\frac{a^2 f}{e}\cos w\,\frac{dR}{dr} - \frac{m'}{\mu}\,\frac{af}{e}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)\sin w\,\frac{dR}{dw},$$
$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{ndt}$$

$$\frac{d\varepsilon}{ndt} = \frac{m'}{\mu}a^2\left(\frac{2r}{a}+\frac{fe}{1+f}\cos w\right)\frac{dR}{dr} - \frac{m'a}{\mu}\,\frac{ef}{1+f}\sin w\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{f^2}\right)\frac{dR}{dw}$$
$$+\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin i\,\frac{d\Omega}{ndt}.$$

On voit que ces équations ont été déduites de considérations géométriques très simples et que les calculs sont tous élémentaires. En outre, l'un des avantages de notre théorie est de montrer nettement la signification mécanique de chacun des termes qui entrent dans les expressions algébriques des variations.

haleine, et qui offre maintes difficultés. Ce sont les résultats d'une première campagne, dans laquelle, malheureusement, mon attention a été trop souvent détournée de l'objet principal de mes études, que j'ai l'honneur de soumettre à la Société (1).

J'ai pris pour objet principal de mes études la Seiche officinale. Je n'avais à choisir, à Arcachon, qu'entre cet animal, le calmar et le poulpe commun. J'aurais préféré ce dernier, qui est beaucoup plus robuste, et vit plus longtemps hors de l'eau; mais sa rareté est telle, sur nos côtes sablonneuses, que je n'ai pu songer à lui. Quant au calmar, il est, au contraire, beaucoup trop délicat, et reste trop peu de temps dans le bassin d'Arcachon.

Avant d'arriver à l'exposé des faits physiologiques, je dirai quelques mots de questions intéressantes pour l'histoire naturelle de l'animal qui nous occupe.

Les seiches pénètrent dans le bassin d'Arcachon vers la fin du mois de mars. Elles y arrivent en grandes troupes, que suivent nombre de cétacés delphiniens, avides d'une pareille proie. Ceux-ci leur tranchent fort habilement la tête, au niveau de l'os, dont leurs dents redoutent probablement le contact. Aussi, au mois de mars et d'avril, voit-on arriver à la côte une grande quantité de seiches décapitées. Lorsque les seiches ont vaqué à la reproduction, elles reprennent le chemin de la mer; dès le mois de juillet, les femelles deviennent extrêmement rares, tellement qu'il m'a été impossible de faire les observations nécessaires sur deux questions que j'avais grandement à cœur d'étudier : la fécondation et le mode de coloration des œufs. On ne trouve presque plus, en septembre, de seiches venues de la mer; mais les jeunes, qui ont commencé à éclore en mai et juin, et qui, sous le nom de *Casserons,* sont fort recherchées pour l'alimentation, sont assez abondantes. Avec le mois d'octobre disparaissent complètement les seiches, à moins qu'il n'en reste quelques-unes dans les chenaux du bassin, où l'on ne fait pas la pêche de fond. Dans l'Océan, les pêcheurs au chalut en prennent, mais rarement, pendant tout l'hiver.

Ayant eu besoin, en plusieurs circonstances, de reconnaître sur le vivant les individus mâles d'avec les femelles, je me suis attaché

(1) J'ai réservé pour un prochain Mémoire les résultats d'ordre histologique ou chimique que m'a fournis l'étude des tissus de la seiche. On ne trouvera ici que quelques indications touchant le sang, les liquides de l'œil, etc.

J'ai cru ne pas faire une chose absolument inutile en relevant exactement les dimensions chez deux seiches adultes, de taille sensiblement égale et de sexe différent, des différentes parties corps.

	Mâle.	Femelle.
Longueur du corps, de la pointe postérieure de l'os à la pointe du bec	20c	20c
De la pointe postérieure de l'os à l'anus	11,8	12,4
Longueur de l'entonnoir	5,3	4,8
Du bord antérieur de l'entonnoir à la pointe du bec	2	2,7
Longueur du 1er bras (l'inférieur)	17	10,5
— bras ravisseur	38	38,5
De l'anus aux orifices vésicaux	2,4	1,6
Distance entre les deux boutonnières (pointes postérieures)	6,5	7,5
— — boutons (pointes externes)	15,5	15
— les origines des deux nageoires (angles ext.)	11,5	11,5
— — — branchies (base)	4,9	6,2
Longueur de la veine branchiale	6,5	6,5
De la base de la branchie à la pointe de l'os	8,1	12,4

On remarquera la longueur du premier bras, beaucoup plus grande chez le mâle (17c) que chez la femelle (10c,5), tandis que les bras ravisseurs sont de dimensions égales dans les deux sexes; les branchies naissent beaucoup plus en avant chez la femelle (12c,4) que chez le mâle (8c,1).

J'ai, de même, pris le poids des différentes parties du corps d'un individu femelle qui venait de pondre une vingtaine d'œufs. (28 juin.)

Tête	60gr	Poids total	254gr
Corps	194		
Ganglion sus-œsophagien			0gr 10
Un ganglion optique			0 80
Cartilage céphalique			1 70
Un œil			4 30
Un cristallin			0 50
Masse buccale			4 50
Bec			0 35
Os			11gr 40
Foie			10
Les deux branchies			4 50
Ventricule artériel			0 40
Les deux ventricules veineux			0 50
Ovaire			39
Glandes de l'oviducte			1 40
— du manteau			23 75

gastéropodes à la présence d'acide sulfurique libre, qui s'y trouve, dans la salive du *dolium galea,* dans la proportion énorme de 4 0/0. J'examinerai s'il en est de même pour la salive de la seiche.

De même, le produit complexe 3°, 4° et 5° est incolore, rarement limpide, et toujours *acide.* Cette acidité se retrouve jusque dans les sucs du tissu même du foie, comme je m'en suis assuré sur l'animal sain et vivant. Lorsqu'on broie le foie dans l'eau distillée, et qu'on filtre, après avoir fait bouillir, la liqueur limpide et incolore est elle-même acide. Je m'occuperai également avec soin de déterminer la cause de cette remarquable acidité, qui n'a pas encore été, que je sache, signalée dans le foie d'aucun animal.

Au moment où j'ai commencé mes recherches, les seiches étaient déjà rares dans le bassin, et je n'ai pu m'en procurer une quantité assez grande pour essayer des digestions artificielles. Je me propose d'expérimenter isolément l'action de la salive, du suc exprimé du foie, des sucs complexes du cœcum, sur les corps féculents, gras et albuminoïdes.

Je dirai seulement dès aujourd'hui que la digestion tout entière paraît se faire dans le premier estomac. En effet, c'est là que se réunissent tous les sucs digestifs; car il est facile, en examinant le jeu des organes sur l'animal vivant, de s'assurer que les sucs du cœcum, bien que se déversant à l'entrée de l'intestin, rentrent tous dans l'estomac pour aller imprégner les aliments. Cependant cet estomac lui-même ne fournit aucun suc particulier; aucune glande ne se trouve dans l'épaisseur de ses parois musculaires, que recouvre un épithélium corné, épais, d'où il résulte qu'il mérite parfaitement le nom de *gésier* que lui a donné Milne-Edwards.

On remarquera sans doute cette acidité qui existe dans toute l'étendue du tube digestif; il y a là quelque chose de fort peu en rapport avec ce qu'on enseigne d'ordinaire sur la digestion.

Sang. — Le sang de la seiche est, comme on le sait depuis longtemps, un liquide blanc très légèrement bleuâtre. Exposé à l'air, il bleuit rapidement, jusqu'à prendre une belle couleur outremer; l'action de l'air se manifeste même à travers les parois des vaisseaux sanguins, et lorsqu'une seiche a été ouverte au contact de l'air, on voit au bout de quelques minutes les gros vaisseaux des branchies se colorer d'une manière manifeste. A l'état normal même, et dans l'eau, on aperçoit une légère différence de teinte

Denis (de Commercy), on n'obtient aucun précipité; il n'y a donc pas de *plasmine* dans le plasma.

Après coagulation et filtration, le sang, soumis soit à l'ébullition, soit à l'action d'une goutte d'alcool ou d'acide, se coagule en masse. Si avant de soumettre ce liquide à la chaleur, on l'a additionné de trois à quatre fois son volume d'eau distillée, et qu'on filtre ensuite, la quantité d'albumine coagulée ainsi retenue est équivalente (desséchée) à 31 pour mille du poids du sang.

Enfin, la dessiccation lente, mais poussée jusqu'à 100°, du sang tiré des vaisseaux, y montre une proportion de matières solides égale à 109 pour mille.

Ainsi, le sang de la seiche contient :

Eau	891	
Albumine	31	109
Fibrine et globules	3 à 4	
Sels et substances incoagulables par la chaleur	75	
	1,000	

Tout cela constitue un liquide dont la densité, autant que les instruments peu délicats dont je disposais m'ont permis de la mesurer, est d'environ 1010.

Je ne manquerai pas, comme on peut bien s'y attendre, de rechercher dans le sang la présence du cuivre, qui y a été signalée par Harless et Bibra, et qui, s'il faut en croire les analyses de plusieurs chimistes, remplacerait le fer dans le sang de beaucoup d'invertébrés.

Circulation. — Les travaux de Delle Chiaje, de Milne-Edwards, nous ont fait connaître tous les points importants du mécanisme de la circulation. Nous savons comment le sang de toutes les parties du corps est poussé en avant par une oreillette et un ventricule veineux, situés à la base de chaque branchie, comment il traverse l'appareil respiratoire, et, recueilli par les deux oreillettes et le gros ventricule aortique, est lancé à travers le réseau artériel dans tout l'organisme. Nous connaissons les vastes dilatations dont la distribution et l'importance varient selon les espèces, et dans lesquelles, chez les seiches, prennent naissance les grosses veines qui rapportent aux branchies le sang de la tête. Sur les parois de ces veines se trouve un épithélium délicat et très difficile à voir. Partout ailleurs la communication des artères avec les

2° Contraction des cœurs veineux;

3° Contraction des oreillettes du cœur artériel;

4° Contraction du ventricule artériel.

Les battements des deux cœurs veineux, faciles à observer sans autre lésion que la section du manteau, sont simultanés, et ont lieu, chez une seiche adulte, environ 40 fois par minute. Lorsque l'animal est mort, ils persistent, en s'affaiblissant, pendant une couple d'heures environ; les contractions vermiculaires de la grosse veine-cave durent encore plus longtemps.

Il est très remarquable que chez les calmars le cœur bat beaucoup plus vite. Chez eux aussi la respiration est plus rapide, la durée de la vie hors de l'eau bien plus courte, la sensibilité aux agents extérieurs plus grande, la contractilité musculaire, les propriétés nerveuses moins durables après la mort, etc. Une proportion exactement inverse est présentée par les poulpes. Je reprendrai tous ces faits dans un travail spécial, et j'espère montrer la liaison constante de ces phénomènes entre eux, et leur rapport avec la composition chimique des tissus eux-mêmes.

J'indiquerai plus loin le mode d'action des nerfs sur les mouvements des cœurs aortiques et branchiaux.

Respiration. — Je n'ai rien à ajouter à ce qui est connu sur le mécanisme de la respiration : inspiration par le sac des deux côtés de la tête, expiration par l'entonnoir. Peut-être n'a-t-on pas assez insisté sur le rôle du long muscle qui, partant du fond du sac, se rend à la base de chaque branchie; il a pour action, simultanément à chaque inspiration, d'étaler la branchie correspondante, et d'en mettre toutes les parties au contact de l'eau aspirée.

Ces mouvements s'exécutent, chez une seiche immobile, à raison de 55 fois environ par minute; chez le poulpe commun, le nombre est de 28. Pendant le sommeil, ce nombre diminue encore, comme à l'ordinaire; il augmente, au contraire, par l'agitation. Le *Loligo vulgaris,* que je n'ai jamais vu en repos, respire environ 65 fois par minute.

Excrétion urinaire. — Personne ne doute plus aujourd'hui que les poches aquifères de Delle Chiaje, cœcum péritonéaux de Milne-Edwards, qui s'ouvrent par deux orifices, l'un à droite, l'autre à gauche du rectum, et communiquent ensemble, ne soient des réservoirs urinaires. Il est facile de s'assurer d'abord, en faisant

usage de liquides colorés, que l'eau extérieure n'y pénètre jamais. Elles contiennent un liquide notablement acide, et dont la limpidité n'est troublée que par la présence de myriades d'infusoires et d'une grande quantité de petits cristaux d'un beau rouge. Ces cristaux, qui se présentent sous la forme de rhomboèdres ou de lamelles rhomboïdales, sont souvent rassemblés en calculs mûriformes, dont quelques-uns ont 2 et 3 millimètres de diamètre. Traités par l'acide azotique, ils se dissolvent avec effervescence; l'action consécutive de l'ammoniaque donne la belle couleur caractéristique du murexide. Leurs caractères chimiques et microscopiques sont donc ceux de l'acide urique.

Le liquide urinaire, filtré, additionné d'un peu d'acide nitrique, et évaporé avec soin, ne donne aucun cristal que l'on puisse rapporter au nitrate d'urée; l'ébullition ou l'addition de l'acide y occasionne un léger trouble indiquant la présence d'une petite quantité d'albumine.

Il est extrêmement probable que la séparation des matériaux uriques a lieu par l'intermédiaire des appendices qui garnissent les grosses veines et flottent dans le liquide; mais cela n'est pas démontré. La structure de ces appendices est difficile à étudier, à cause de la quantité énorme de parasites dont ils sont couverts, et qu'on ne peut en détacher.

Os. — La coquille interne de la seiche contient du gaz, comme le prouve sa légèreté, qui la fait flotter sur l'eau. En ouvrant sous l'eau le sac qui la contient, et en la broyant avec soin, on obtient, par bulles très petites, une certaine quantité de ce gaz. Cette manière de le recueillir ne permet pas de supputer exactement la proportion d'acide carbonique qui y est contenu. Il n'est cependant pas inutile d'indiquer les chiffres obtenus dans des analyses, suites d'extractions aussi rapides que possible, faites sous l'eau de mer. J'ai ainsi trouvé, pour 100 parties de gaz, des traces non mesurables d'acide carbonique, 2 à 3 pour 100 d'oxygène, et le reste en azote.

Il est très probable que la composition de ces gaz varie suivant des circonstances analogues à celles dont Armand Moreau a analysé l'action dans son travail sur l'air de la vessie natatoire des poissons.

Liquides de l'œil. — Le liquide de la *chambre antérieure* est

visqueux, filant comme du blanc d'œuf. Cependant, ni l'ébullition, ni l'alcool, ni les acides, n'y déterminent de trouble appréciable. Il laisse par la dessiccation un résidu de 4,1 pour 100, composé exclusivement de cristaux blancs, cubiques, qui sont probablement du sel marin.

Celui de la *chambre postérieure* n'a rien de visqueux; les coagulants de l'albumine y donnent un très léger trouble; le résidu de la dessiccation est semblable à celui de la chambre antérieure, mais légèrement coloré en brun; il est de 3,7 pour 100.

Sécrétion du noir. — Elle se rapproche beaucoup de celle du lait. Les cellules épithéliales du sac se remplissent de granulations pigmentaires, puis elles se gonflent de liquide; leurs parois deviennent très minces et difficiles à voir, et elles finissent par éclater. Les granules avec le liquide constituent la partie libre du noir, la seule presque qui soit éjaculée par l'animal. Cette provision est bien vite épuisée, et l'animal devient incapable de noircir l'eau. Si on l'ouvre alors, on voit qu'il lui reste dans la poche une grande quantité de noir, mais visqueuse, épaisse et retenue dans les trabécules du sac; l'application d'un courant électrique en fait encore sortir une partie, mais non tout.

Le rejet du noir est dû aux mouvements péristaltiques de la poche, aidés par la contraction vive de la mince couche musculeuse du manteau qui le recouvre; le liquide se dilue alors, sans s'y dissoudre, dans l'eau que contient le sac respiratoire, et est lancé au dehors par les contractions de ce sac.

Locomotion. — Je dirai d'abord un mot de la manière dont la fermeture du sac est assurée. Il existe, comme on sait, sur la partie antérieure du sac deux saillies cartilagineuses, et deux excavations correspondantes sur les piliers de l'entonnoir. C'est la pression atmosphérique qui maintient ces saillies dans ces excavations. On ne parvient, en effet, à les séparer qu'en exécutant une traction énergique; mais si on introduit l'air dans la cavité par une très fine piqûre d'aiguille, immédiatement la saillie se détache.

Le même résultat peut être obtenu en galvanisant une bande musculaire transversale qui réunit les deux saillies du manteau. Cette bande a pour action de les abaisser en les tirant latéralement. Je n'ai jamais vu, dans l'état de santé, les seiches ouvrir ainsi leur manteau.

La locomotion s'exécute exclusivement par l'action du courant aqueux sortant de l'entonnoir, chez les seiches comme chez les calmars. La membrane latérale (seiches) ou terminale (calmars) ne joue que le rôle de régulateur, de directeur des mouvements. Les bras allongés en cône, l'animal se meut du côté opposé à celui où il tourne l'orifice de son entonnoir; en avant, si celui-ci est dirigé en arrière, etc.

Les seiches poursuivent leur proie en avant, mais elles fuient en reculant, parce qu'elles acquièrent ainsi une beaucoup plus grande rapidité.

Les ventouses qui garnissent les bras ne servent à l'animal qu'à saisir et maintenir sa proie. Jamais les seiches ni les calmars, au contraire des poulpes, ne s'en servent pour la locomotion, sinon lorsque ces animaux sont à sec.

Le jeu de ces petits organes est des plus simples : une membrane frangée, gluante, borde l'anneau corné et papilleux qui les constitue. Cette membrane happe à la surface des corps; aussitôt un muscle longitudinal, qui s'épanouit en formant le fond de la capsule, se contracte et fixe la ventouse en tendant à former le vide. Si l'on emploie, après la mort, l'excitant électrique, on obtient ainsi une succion notable. Pour faire lâcher la ventouse, un petit muscle circulaire, situé au bord antérieur de l'anneau, se contracte, et détruit ainsi l'adhérence de la membrane avec le corps étranger.

Contractilité musculaire. — Les muscles de la seiche, bien qu'appartenant tous au type des muscles lisses, peuvent être divisés, comme ceux des vertébrés, en muscles à contraction rapide et muscles à contraction lente. Chez les premiers, la contraction répond immédiatement à l'exoitant, et cesse avec une égale soudaineté; chez les seconds, elle est lente à s'établir, et dure beaucoup plus longtemps.

Les muscles à contraction rapide sont ceux du sac, de l'entonnoir et de ses piliers, des bras, des ventouses, de la peau, des cellules chromatophores, des mâchoires, des cœurs artériel et veineux, des grosses veines qui vont aux cœurs veineux, et de la partie terminale de l'appareil générateur mâle.

Les muscles à contraction lente sont ceux de l'intestin tout entier, qui donnent lieu à des mouvements péristaltiques, et ceux des appendices dits pancréatiques.

Lorsqu'un muscle de seiche se contracte, il ne change pas de volume, et gagne en épaisseur ce qu'il perd en longueur. C'est le même fait que chez les vertébrés, et je l'ai vérifié par la même expérience simple et classique du flacon plein d'eau surmonté d'un tube de verre dont le niveau forme *index*.

La contractilité se conserve, après la mort de l'animal, d'une manière inégale, suivant les différents muscles. Les derniers mouvements excitables sont présentés par les muscles de l'entonnoir.

Quand la contractilité a disparu, le muscle est devenu rigide, et sa réaction, d'abord très légèrement alcaline, est très notablement acide. C'est encore là un fait connu chez les vertébrés.

La contractilité musculaire est encore, comme chez les vertébrés, plus facilement mise en jeu par l'intermédiaire des nerfs moteurs que par une excitation portée directement sur les muscles. En employant des courants électriques graduellement affaiblis, on arrive à un point où leur application sur un muscle ne produit rien ou presque rien, tandis qu'une contraction notable est la conséquence de leur application sur le nerf qui se distribue dans le muscle.

Ceci nous amène à l'étude des propriétés nerveuses.

Propriétés nerveuses (1). — A. Centres nerveux. La grosse *masse sus-œsophagienne* est complètement insensible et inexcitable. Son ablation, quand elle est faite avec soin, de manière à ne pas léser les ganglions sous-jacents, ne paraît déterminer chez l'animal aucun phénomène nouveau. Il nage avec la même facilité, meut également bien ses bras, respire comme auparavant, et est également sensible dans toutes les parties de son corps. Si on le pince en quelque endroit, il se contourne, s'efforce de fuir, et, comme par le passé, essaie, à l'aide de ses bras, d'enlever l'objet qui le blesse. Mais, abandonné à lui-même, il reste immobile, comme inerte, sans nulle détermination volontaire. En un mot, la masse sus-œsophagienne paraît jouir des mêmes propriétés et remplir exactement le même rôle que les hémisphères cérébraux des animaux vertébrés.

(1) Voir, pour les déterminations anatomiques et la structure histologique, l'excellente thèse de Chéron : *Recherches pour servir à l'histoire du système nerveux des céphalopodes dibranchiaux* (*Ann. des Sc. nat.*, 5e série, t. V, 1866), qui m'a constamment servi de guide.

Les gros *ganglions optiques* paraissent également insensibles; leur rôle est tout à fait inconnu.

La *masse sous-œsophagienne* peut être considérée comme composée de deux parties distinctes : l'une, postérieure, de laquelle naissent les gros *nerfs palléaux;* l'autre, antérieure, dite *ganglion en patte d'oie,* qui donne naissance aux nerfs des bras. Ces deux parties sont également excitables, et donnent également lieu à des actions d'ordre réflexe.

C'est, en outre, dans cette grosse masse nerveuse que se passent les phénomènes de régularisation et d'adaptation des mouvements locomoteurs à des usages spéciaux, comme le prouvent les expériences où le ganglion sus-œsophagien a été enlevé. Mais je ne sais pas encore si toutes les parties de ce ganglion jouissent de cette faculté, ou si elle est seulement dévolue à quelque partie plus restreinte, comparable au cervelet des vertébrés, et dont la lésion, sans paralyser les mouvements, empêcherait leur coordination. J'ai cependant des raisons de penser qu'une semblable localisation existe vers la région moyenne du ganglion, au lieu de réunion des deux parties dans lesquelles les anatomistes l'ont divisé.

Le *ganglion en patte d'oie* tient sous sa dépendance les mouvements des bras. Lorsque, chez un animal privé du ganglion cérébral, on l'a séparé par une section transversale de la partie postérieure de la masse sous-œsophagienne, les bras continuent à se mouvoir lorsqu'on les excite, et l'excitation vive de l'un d'entre eux (il va sans dire que les courants électriques ne doivent pas être ici employés) a pour conséquence immédiate l'apparition de mouvements réflexes dans les autres.

De ce ganglion partent, comme on le sait, dix nerfs qui se rendent aux bras. Ces nerfs sont bientôt reliés par un cercle anastomotique, et aux points de rencontre de ce cercle avec les nerfs se trouvent des renflements ganglionnaires. Or, ces renflements sont eux-mêmes le lieu d'actions réflexes; si, en effet, on enlève avec soin le ganglion en patte d'oie, on voit qu'il est encore possible d'obtenir des mouvements dans un bras en pinçant vigoureusement l'un des deux bras voisins; mais l'action est peu étendue et peu énergique.

Enfin, les cellules ganglionnaires répandues sur toute la lon-

gueur des nerfs des bras donnent aussi naissance à des actions réflexes; mais celles-ci sont bornées au bras lui-même. On peut les mettre en évidence en pinçant la peau d'un bras isolé : on voit alors de faibles contractions dans les muscles qui constituent la masse de ce bras lui-même.

La *portion postérieure de la masse sous-œsophagienne* préside aux mouvements respiratoires. On peut enlever, sans arrêter ceux-ci, et le ganglion en patte d'oie et la masse cérébroïde. Mais si la partie dont je parle est détruite ou profondément lésée, ils s'arrêtent aussitôt. Lorsque l'animal, en mourant, a naturellement cessé de respirer, il est possible d'obtenir des mouvements respiratoires des deux côtés du sac, en excitant un des gros nerfs palléaux en un point quelconque de son parcours; il est facile de s'assurer que, dans ce cas, l'action réflexe qui a donné naissance au mouvement respiratoire s'est passée dans la partie postérieure de la masse sous-œsophagienne. Il est à remarquer que les mouvements respiratoires dont je parle ne consistent pas seulement dans la contraction brusque du sac, mais dans l'agitation de la branchie par son muscle érecteur et l'accommodation particulière de l'entonnoir, des valvules latérales du sac, etc.; le centre de tous ces mouvements est dans cette partie dont j'indique en ce moment le rôle.

Il ne m'a pas encore été possible de savoir si cette partie contient quelque point central analogue au point vital ou centre des mouvements respiratoires des vertébrés supérieurs.

Cette portion de la masse sous-œsophagienne commande encore aux mouvements de la nageoire marginale.

Enfin, il est à peu près certain qu'elle tient sous sa dépendance les mouvements des cœurs artériel et veineux, comme on peut le conclure des expériences qui vont être rapportées plus bas; mais je n'ai pas encore fait, pour m'en assurer, d'expériences directes.

Les *ganglions étoilés* ou *palléaux* ne m'ont pas, à mon grand étonnement, présenté d'actions réflexes. Lorsque, sur un animal vivant, je fendais le manteau et coupais le nerf palléal d'un côté, pour isoler le ganglion de l'action des centres péri-œsophagiens, je ne pouvais plus obtenir aucun mouvement d'ordre réflexe, en excitant un point quelconque des nerfs qui sortent de ce ganglion; les expériences les plus variées m'ont toujours donné le

même résultat, alors même que j'employais le courant électrique, à la condition de ne point trop m'approcher du ganglion lui-même. De même, si, sur un animal vivant et intact, on coupe les deux nerfs palléaux, ou, plus simplement, si on tranche complètement la tête, on ne peut plus obtenir aucun mouvement dans le sac ainsi isolé, et dont cependant tous les nerfs moteurs proviennent des ganglions palléaux.

Ceux-ci ne sont donc pas le centre d'actions réflexes; mais ils sont excitables, et leur excitation a pour conséquence un mouvement dans le manteau, et des phénomènes de sensibilité, si l'animal est complet. De plus, ils sont un lieu de renforcement pour les nerfs du manteau. Ainsi, un courant électrique faible, qui ne donnera aucune contraction dans le sac si on l'applique sur le nerf palléal, très près même du ganglion, en donnera une, s'il est porté directement sur ce ganglion. Ainsi encore, quand l'animal est mort, l'excitabilité est conservée dans le ganglion et les nerfs qui en partent un temps notable après sa disparition complète du nerf palléal.

Tous les centres nerveux dont nous venons de nous occuper jusqu'ici contiennent des cellules nerveuses, et, paraît-il, uniquement des cellules apolaires ou unipolaires. Mais d'autres ganglions, appartenant au système du stomato-gastrique (ganglions *sus* et *sous-pharyngien*, ganglion *stomacal*), seraient exclusivement composés, suivant Chéron, de matière nerveuse granuleuse, sans cellules; dans cette matière se perdraient des filets nerveux, tandis que d'autres y prendraient naissance.

Une semblable matière est-elle bien de nature nerveuse? Jouit-elle seulement de la transmissibilité? Est-elle excitable? Est-elle le lieu d'actions réflexes? Autant de questions qui se présentèrent à mon esprit dès que j'eus connaissance des faits annoncés par Chéron, et que je me promis de tenter de résoudre. Questions d'autant plus importantes qu'une semblable matière existe dans les centres nerveux de l'homme, et qu'on voit certains filets sortir des cellules, s'y ramifier et s'y perdre.

Malheureusement, elles sont extrêmement difficiles à attaquer sur les animaux de faible taille dont nous disposons. Peut-être, en effet, pour manifester les actions directes ou réflexes de ces centres, est-il nécessaire d'employer l'électricité, comme pour plu-

sieurs phénomènes dépendant du grand sympathique chez les vertébrés, et l'emploi de l'électricité est la source de maintes erreurs. En outre, les mouvements qu'on peut obtenir par leur intermédiaire sont lents à se manifester, et, d'autre part, souvent spontanés. Aussi, les résultats que j'ai obtenus dans cette première série de recherches ne sont point de nature à porter la conviction dans l'esprit; et, d'autre part, le sujet est si important pour la physiologie générale, qu'il n'y aurait que des inconvénients à énoncer des faits dont les conséquences sont encore douteuses. Cependant, les expériences nombreuses que j'ai faites sur le ganglion stomacal, le plus facile à isoler et à étudier, me font incliner à croire qu'il n'est pas le centre d'actions réflexes.

Nerfs. — A l'exception des nerfs optiques, lesquels ne sont doués que d'une sensibilité spéciale, tous les nerfs de la vie animale sur lesquels j'ai expérimenté, nerfs palléaux avant ou après le ganglion étoilé, nerfs de la nageoire, nerfs des bras, sont à la fois sensibles et moteurs.

Mais je ne saurais affirmer l'existence de ce double rôle chez les nerfs du stomato-gastrique ou sur ceux qui se rendent aux trois cœurs.

Ces *nerfs des cœurs* possèdent une faculté remarquable, tout à fait identique à celle que, simultanément, les frères Weber en Allemagne, et Cl. Bernard, à Paris, ont signalée dans le pneumo-gastrique des animaux vertébrés. Si, en effet, on excite ces nerfs par un fort courant d'induction, on voit s'arrêter en diastole les réservoirs contractiles auxquels ils se rendent. L'expérience peut être faite, d'un seul coup, sur les trois nerfs qui longent tous la grande veine médiane. L'arrêt en diastole m'a paru beaucoup plus long pour les cœurs veineux que pour le cœur artériel. Ces faits expliquent pourquoi un cœur veineux, isolé du corps, exagère pendant quelques minutes la rapidité de ses battements.

Or, sur le trajet des nerfs, à la base des cœurs veineux, il existe un petit ganglion; mais rien de pareil n'a été signalé pour le nerf du cœur artériel. Il y aura donc lieu de vérifier ou d'infirmer ici, en examinant surtout comment se comportent les oreillettes, la théorie bien connue de Remak sur le mode d'action des nerfs *arrêtants,* par l'intermédiaire nécessaire de ganglions spéciaux.

Ces nerfs des cœurs prennent naissance dans la partie posté-

rieure de la masse sous-œsophagienne; il est donc très probable qu'en excitant directement cette région centrale, on obtiendrait les mêmes phénomènes; c'est une expérience à faire.

Reproduction. — Je désirais vivement observer la façon dont le mâle introduit ses spermatophores dans les organes génitaux de la femelle. Malgré l'observation intéressante de Lebert et Ch. Robin (1) sur une sorte de houppe de spermatophores fixés dans la cavité du sac d'une femelle de calmar, je pense que chez la seiche le transport de ces organes doit avoir lieu loin du contact de l'eau, qui les ferait aussitôt éclater. J'ai expliqué plus haut comment la rareté des seiches femelles, au moment où je pouvais faire mes observations, m'a empêché de réaliser cette année mon désir. Je n'ai vu, en effet, que deux accouplements (et, à ce propos, je dirai que les mâles se saisissent parfois par la tête de manière à faire croire à un accouplement); dans l'un, après trois minutes de contact, je séparai vivement les animaux, et examinai la femelle : aucun spermatophore n'existait dans son manteau ni dans ses organes génitaux. Dans l'autre cas, ayant attendu davantage, et séparé de même les animaux, j'ai vu que le bras modifié (hectocotylisé) du mâle était plongé dans la cavité du manteau même de l'animal; rien dans celui de la femelle.

L'hectocotylisation, pour le dire en passant, se voit toujours, comme on le sait, à la base du bras gauche; mais chez un animal dont je n'ai pu malheureusement examiner le reste du corps, l'hectocotylisation existait à droite; y avait-il, en même temps, interversion des organes génitaux ?

Les œufs de seiche sont noirs. A quelle matière doivent-ils leur couleur ? Aristote supposait que c'est à l'encre fournie par la mère. Cette hypothèse n'a pas été acceptée de tout le monde : récemment, un malacologiste de grande autorité, Fisher, la déclarait « invraisemblable » ; d'ailleurs, ce n'est qu'une hypothèse.

Il est certain, d'une part, que les œufs sont noirs dès le moment de la ponte, et, d'autre part, qu'ils sont incolores dans toute l'étendue des organes génitaux. Une seule fois, j'ai vu une seiche pondre des œufs presque blancs; il sont restés tels, et étaient inféconds; or, l'animal, fort malade, n'avait presque plus de noir dans la

(1) *Annales des Sciences naturelles*, 3e série, *Zoologie*, t. IV, 1845.

poche. La teinte noire des œufs est due à des granulations très fines, répandues dans toute l'épaisseur de la coque de l'œuf, de plus en plus serrées à mesure qu'on approche de la surface; elles ressemblent tout à fait aux granulations pigmentaires de l'encre telles qu'elles se précipitent dans l'eau. N'ayant pu faire sur leur origine aucune observation directe, j'ai essayé comparativement l'action de divers dissolvants tant sur les coques d'œufs desséchées que sur l'encre elle-même, desséchée aussi, et sur les glandes colorées en rouge du manteau de la femelle. Or, j'ai trouvé, en opérant ainsi, des différences notables pour plusieurs substances. C'est ainsi que l'éther dans lequel on a plongé des coques d'œuf prend, au bout de deux jours une jolie teinte vert-pomme, qui disparaît après huit ou dix jours, sans que jamais l'éther en contact avec l'encre ou avec les glandes ait rien présenté de pareil. Mais pour la question qui nous occupe actuellement, ces expériences ne m'ont fourni aucune solution.

Strychnine et curare. — Les seiches sont extrêmement sensibles à l'action de la strychnine. Ayant plongé une seiche dont la peau était un peu excoriée, dans une solution contenant 10 centigrammes de chlorhydrate de strychnine pour 3330 grammes d'eau de mer, je l'ai vue immédiatement prise de convulsions terribles, lâcher son noir, et se fixer énergiquement par ses huit bras étendus en éventail (les grands bras ravisseurs ne sortant pas de leurs poches); elle cessa de respirer et mourut dans cette position, en trois ou quatre minutes. Ses muscles étaient encore contractiles, ses nerfs moteurs encore excitables; mais la contractilité comme l'excitabilité nerveuse avaient certainement diminué, et les actions réflexes avaient complètement disparu. Les cœurs battaient encore.

Pour un casseron, j'ai réduit la dose à 0ᵍ005 dans 1 litre d'eau, et j'ai obtenu les mêmes phénomènes après 3 minutes; la mort est survenue en 5 minutes; l'animal présentait des convulsions provocables, comme une grenouille. Avec 0ᵍ0025, mort en 35 minutes.

Tout au contraire, les seiches redoutent peu le curare; je donnerai plus tard des mesures précises, mais je puis dire que le peu de sensibilité des seiches à l'action de ce poison si énergique, et la lenteur de cette action m'ont beaucoup étonné. Ainsi, une seiche a mis plus de deux heures avant de succomber à l'introduction

sous la peau d'une dose de curare qui aurait bien tué deux ou trois lapins. Dans cette circonstance, elle commença à se ralentir dans ses mouvements généraux au bout d'une heure environ; puis, elle pâlit beaucoup, et perdit la faculté de dilater ses cellules chromatophores; enfin, elle fut paralysée, incapable de fuir, bien que les mouvements respiratoires, fait remarquable, aient conservé leur rhythme, sinon leur énergie. Les mouvements des bras persistèrent davantage; enfin tout disparut, sauf les battements des cœurs. Jusqu'au dernier moment, l'animal avait, à l'aide des bras restés libres, donné des signes de volonté et de sensibilité dans les parties déjà paralysées.

Ainsi l'action du curare et de la strychnine sont identiques chez les seiches et chez les animaux vertébrés.

Je me propose d'examiner l'action d'autres poisons, et notamment des poisons du cœur (digitale, *upas antiar,* venin de crapaud).

Eau douce. — Un casseron est immergé dans l'eau douce; immédiatement, agitation convulsive; l'animal devient tout noir; après 7 minutes, il ne fait plus aucun mouvement. Examiné après 15 minutes, les cœurs ne battent plus, les chromatophores sont dilatés, la peau n'est plus contractile; mais les muscles du sac et de l'entonnoir, et les nerfs moteurs obéissent encore à l'influence de l'électricité.

Eau chaude. — Une petite seiche naissante, immergée pendant deux minutes dans l'eau de mer à 37-36°, est un instant immobilisée; remise dans l'eau froide, elle revient parfaitement à elle. Dans l'eau à 39-38°, pendant une minute, elle s'immobilise, mais revient de même; après deux minutes, l'eau froide ne peut plus la rappeler à la vie; mais ses muscles et ses cellules chromatophores sont parfaitement contractiles; il en est de même après quatre minutes de séjour. Mais en deux minutes, toute contractilité est perdue dans l'eau à 41°,5-41°.

Si, au lieu de chercher d'une manière absolue la température à laquelle l'animal meurt, on étudie la succession des phénomènes amenés par une température croissante, on voit chez une seiche de grande taille disparaître successivement toute trace de volonté, de sensibilité, et d'actes réflexes; puis les nerfs palléaux cessent d'agir sur les muscles, tandis que les ganglions étoilés et les nerfs qui en sont issus peuvent encore les faire contracter; simultanément

avec ce dernier phénomène, les cœurs ont cessé de battre; enfin, les muscles prennent une réaction acide très manifeste en perdant leur contractilité, et la seiche noircit par suite de la rigidité des muscles dilatateurs des chromatophores. Le sang, retiré des vaisseaux, bleuit comme d'ordinaire au contact de l'air; mais, chose remarquable, il se coagule spontanément, en masse; au moins cela est-il arrivé dans le seul cas où j'aie examiné le sang. Enfin, l'animal, abandonné à l'air, devient phosphorescent comme dans les circonstances ordinaires.

Mort des différents tissus. — Lorsqu'une seiche est retirée de l'eau et qu'on la laisse mourir par lente asphyxie, on voit d'abord disparaître les phénomènes volontaires, puis les actions réflexes : les premiers au bout de quelques minutes, les secondes à peu près vingt minutes après les premiers. (Temp., 24°.)

Environ 40 minutes après la disparition des mouvements volontaires, les nerfs moteurs perdent leur action sur les muscles. Comme chez les vertébrés, la propriété ou du moins la fonction, se perd du centre à la périphérie. Le ganglion palléal est encore excitable dix minutes après le nerf palléal; puis l'excitabilité se perd du centre à la périphérie dans les nerfs qui en sortent.

Les cœurs marchent environ deux heures, et la grosse veine cave médiane environ trois heures.

La contractilité musculaire se perd en quatre heures, plus tôt si l'animal est resté dans l'eau; elle disparaît d'abord aux parois du sac, puis aux muscles de l'entonnoir, et enfin à ceux de la peau. Mais les chromatophores contractent encore leurs petits muscles dilatateurs, lorsqu'on les excite, vingt heures après la disparition des manifestations volontaires. Chez les calmars, la contractilité du sac est perdue après une heure et demie.

Après 48 heures environ d'exposition à l'air, la seiche présente des phénomènes de phosphorescence extrêmement intenses. Sous l'eau, elle ne devient pas phosphorescente; intacte, sa peau seule s'illumine dans l'obscurité, et non les organes sous-jacents. Ces phénomènes apparaissent plus vite lorsque le temps est à l'orage; ils durent jusqu'à la putréfaction.

La peau tout entière ne devient pas phosphorescente; si on ouvre l'animal, on voit se détacher, comme une tache noire sur le corps brillant, toute la partie de la peau qui recouvre les branchies, le

foie, les organes génitaux digestifs, toute la région viscérale, en un mot. Mais la peau munie de chromatophores, et aussi celle qui revêt la face interne du sac musculeux du manteau, luit dans l'obscurité.

Si on isole les principaux organes d'une seiche qui vient de mourir, et qu'on les place à côté les uns des autres, dans des conditions de chaleur, etc., identiques, on voit devenir phosphorescents : les cartilages céphaliques, la peau, la sclérotique, les muscles, tandis que les ganglions nerveux, le foie, l'intestin, les organes génitaux mâles et femelles, le sac du noir, le cristallin et les liquides de l'œil restent toujours obscurs.

La phosphorescence dure environ 48 heures, dans les conditions moyennes de température; elle disparaît, en dernier lieu, des cartilages céphaliques.

Les expériences dont les résultats viennent d'être rapportés ont été exécutées dans le laboratoire annexé à l'Aquarium de la Société scientifique d'Arcachon. Il n'est pas déplacé, je pense, d'entrer ici dans quelques détails touchant cette belle institution scientifique.

Elle se compose de trois parties : un musée, un aquarium, un laboratoire.

Au musée, qui devra recueillir toutes les productions du riche bassin d'Arcachon, est annexée une salle où des conférences ont été faites pendant la dernière saison des bains.

L'aquarium comprend trente et quelques bacs vitrés, de 1 à 2 mètres de capacité, dont l'éclairage est disposé de manière à permettre l'observation facile des animaux qui y sont contenus.

En outre de ces bacs, six vastes bassins, mesurant de 10 à 25 mètres cubes, sont destinés à conserver les animaux de grande taille et ceux qui ne s'accommoderaient pas d'une captivité plus rigoureuse.

Un courant d'eau de mer continu, puisé à quelques mètres de distance (car l'établissement est installé sur le bord même du bassin), entretient dans ces bacs et ces bassins les conditions les plus favorables possibles à la longue conservation des animaux vivants.

Enfin, le laboratoire, que la Société va encore agrandir, a déjà

fourni un emplacement suffisant pour les recherches simultanées de plusieurs anatomistes ou expérimentateurs.

Tel est, en quelques mots, cet établissement, fondé par les seuls efforts de l'initiative privée, nonobstant de mesquines rivalités locales. Tel il est, ouvert généreusement à tous les hommes de science, que la Société convie, par tous les moyens de publicité dont elle dispose, à venir profiter des coûteux sacrifices qu'elle a faits.

En exposant les faits qui précèdent, je n'ai pas seulement cédé au sentiment de gratitude inspiré par le secours que j'ai reçu dans mes travaux, j'ai la certitude de faire un acte utile à mes confrères en science naturelle, à ceux surtout qui sont engagés dans la voie expérimentale. En venant à Arcachon, ils éviteront les ennuis, les pertes de temps et les petits déboires que connaissent tous ceux qui ont essayé d'aller travailler seuls sur le bord de la mer. Ils y trouveront des facilités de travail qu'il est impossible à un homme isolé de se procurer; et, enfin, ils y seront reçus par le président et les membres de la Société scientifique avec une expansion et un désir d'être utile dont j'ai personnellement éprouvé les bienveillants effets.

Il en coûte à ma reconnaissance de terminer ces quelques lignes sans citer un seul nom propre; mais, faut-il le dire, je devrais en citer trop. Chacun, dans l'accomplissement de cette œuvre utile, a mis son argent, son temps, son dévouement. Il n'a rien moins fallu que ce concours exceptionnel de forces pour triompher des difficultés immenses, aggravées par des oppositions qu'il me serait désagréable de qualifier. Ainsi a été fondé, ainsi est entretenu, ainsi est ouvert aux savants, par de simples particuliers, un établissement scientifique qui n'a son analogue nulle part en Europe; un établissement d'utilité publique de l'ordre de ceux dont, dans d'autres branches, la création incombe à l'État. Une telle chose faite, et faite en France, dispense de tout commentaire louangeur.

Paris, 1er novembre 1867.

ESSAI D'UN EXPOSÉ

DE LA

THÉORIE DE LA DOUBLE RÉFRACTION

PAR M. ABRIA.

---

1. Dans l'introduction remarquable aux œuvres d'Augustin Fresnel, placée en tête de l'édition imprimée par les soins et aux frais du Gouvernement français, M. Verdet expose avec une grande clarté les modifications successives par lesquelles ont passé les idées que cet illustre physicien s'est formé des vibrations auxquelles, dès ses premiers travaux, il avait été conduit à attribuer l'explication des phénomènes de la lumière. Ses recherches sur la diffraction l'amènent d'abord à démontrer, par des expériences nouvelles et directes, la propriété des interférences, et il en déduit l'existence de vibrations lumineuses, vibrations qu'il suppose, avec tous les savants de son époque, s'exercer suivant le sens même de la propagation du rayon de lumière, c'est à dire être longitudinales ou normales à la surface des ondes. Ses recherches sur les rayons de lumière polarisée, celles surtout relatives à leurs interférences mutuelles et aux couleurs des lames cristallisées, le conduisent à modifier ses idées sur la direction de ces vibrations; il admet bientôt qu'elles sont transversales, c'est à dire perpendiculaires au sens suivant lequel se propage la lumière, ou, ce qui revient au même, parallèles à la surface des ondes. Ampère paraît avoir adopté avec Fresnel l'hypothèse des ondulations transversales, dès que celui-ci l'eut émise. Arago, sans se prononcer ouvertement contre elle, ne s'y est rallié, à ce qu'il semble, que plus tard, et ne voulut pas suivre ses deux illustres et ingénieux contemporains dans la voie nouvelle où ils entraient. Enfin, dans la troisième

phase, Fresnel fait l'application de ses idées théoriques aux phénomènes découverts par Arago et par Biot, dans le cristal de roche perpendiculaire à l'axe et dans certains liquides homogènes; il déduit de ses recherches l'existence de vibrations, non plus seulement rectilignes, mais distribuées sur une hélice à base circulaire ou elliptique. De plus, il étudie la double réfraction, et son hypothèse fondamentale le met bientôt en possession de la loi complète du phénomène, et lui révèle des faits dont aucun n'avait été soupçonné jusqu'à lui.

Ces dernières recherches constituent, au point de vue théorique, la partie la plus difficile et la plus délicate de l'optique. On connaissait, avant Fresnel, la loi de la double réfraction donnée par Huyghens; mais Fresnel a fait voir que cette loi n'était vraie que pour une certaine classe de cristaux, les cristaux uni-axes, et que pour ceux à deux axes, elle était toute différente. Après avoir démontré, soit par des expériences d'interférence, soit par la vision d'une ligne lumineuse à travers un prisme formé de fragments taillés en divers sens dans la masse cristalline, que la loi d'Huyghens n'est pas applicable aux cristaux bi-axes, il rechercha par la théorie celle qui leur convient, et fut assez heureux pour y parvenir. On sait que l'une des conséquences les plus remarquables des formules auxquelles il avait été conduit, celle d'où se déduisent les deux réfractions coniques, lui échappa, et ne fut reconnue et vérifiée expérimentalement que plusieurs années après sa mort, par Hamilton et H. Lloyd.

Fresnel a fait la plupart de ses découvertes en se laissant guider par des considérations mécaniques élémentaires, auxquelles il a appliqué des calculs en général assez simples. Déjà de son vivant, mais surtout après lui, les mêmes problèmes ont été repris par les géomètres, et une analyse plus savante a conduit à des formules qui, dans beaucoup de cas, sont celles de Fresnel, et dans quelques autres, notamment dans la polarisation elliptique, en diffèrent par des termes négligeables presque toujours, du moins dans les conditions offertes par les diverses substances auxquelles on a essayé de les appliquer. Mais on ne peut méconnaître que les considérations très simples à l'aide desquelles l'illustre physicien français s'est efforcé de se rendre compte des phénomènes variés de la lumière, offrent un précieux avantage, celui de permettre à

l'esprit de concevoir, jusqu'à une certaine limite au delà de laquelle il faut nécessairement recourir au calcul, comment s'effectuent dans les corps les mouvements dont on est obligé d'admettre l'existence. Ainsi que le dit avec beaucoup de justesse M. Verdet (Introduction, page LXXIX), les théorèmes établis par Fresnel sur la propagation du mouvement dans les milieux cristallisés « doivent être regardés comme le point de départ d'une » science nouvelle, devenue aujourd'hui l'une des branches les » plus importantes de l'étude de la nature : *la théorie générale de* » *l'élasticité*. Sans doute, on avait déjà traité bien des questions » relatives à l'équilibre et au mouvement intérieur des corps; » mais, excepté dans le cas des fluides, et surtout des fluides élas- » tiques, les solutions avaient été toujours empruntées à des » considérations en partie théoriques, en partie empiriques, spé- » ciales à chaque question, et même à des hypothèses inadmissi- » bles. Fresnel fut le premier à introduire dans ces études les » méthodes exactes et générales de la mécanique rationnelle, et » si simple que fût le problème qu'il s'était posé, relativement » aux problèmes qu'on a abordés plus tard, en le résolvant d'une » manière rigoureuse, il fit ce qu'il y a à la fois de plus important » et de plus rare : il ouvrit à la science une voie nouvelle. Les » noms de Cauchy, de Green, de Poisson, de M. Lamé, disent » assez si cette voie a été féconde. »

M. de Sénarmont, dans plusieurs de ses Mémoires, exprime aussi l'opinion qu'on sera obligé de conserver longtemps encore les vues très simples de Fresnel, tout en cherchant néanmoins à établir sur des bases solides, par des déductions rigoureuses, indispensables d'ailleurs dans les applications de l'analyse mathématique, les théorèmes d'optique que nous devons à ce grand physicien.

2. Ces remarques ont une grande importance dans l'enseignement de l'optique; mais depuis qu'on a essayé de rattacher tous les phénomènes naturels à des mouvements d'espèces diverses, elles trouvent une utile application dans toutes les branches de la physique. Il est déjà facile d'entrevoir que les parties les plus élevées de cette science, celles notamment où l'on sera obligé de recourir fréquemment à un calcul long et difficile, devront faire exclusivement partie du domaine de la physique mathématique,

et être réservées à des chaires spéciales, auxquelles il ne faut pas songer dans les Facultés de province. D'un autre côté, l'enseignement secondaire est trop chargé pour qu'il soit utile d'y introduire l'étude des nombreux phénomènes de la lumière; ceux-ci devront être nécessairement réservés à l'enseignement supérieur proprement dit, tel qu'il est organisé actuellement pour la préparation à l'une des trois licences. Il y a tout avantage dans cet enseignement à s'en tenir, pour l'intelligence des phénomènes, à des considérations élémentaires, qui ne peuvent pas, il est vrai, se passer du secours du calcul, mais dans lesquelles celui-ci n'intervient que pour traduire d'une façon simple en formules les conséquences du raisonnement, et permettre, dans un très grand nombre de cas, la comparaison entre les résultats de la théorie et ceux de l'observation.

Le but général que je viens d'indiquer m'a semblé pouvoir être atteint pour l'une des branches les plus intéressantes de l'optique, pour la double réfraction, considérée surtout dans les cristaux à un axe. Je me propose d'indiquer ici, d'une part, le raisonnement élémentaire qui me paraît pouvoir permettre de se rendre compte de l'existence dans cette classe de cristaux du rayon dit *rayon ordinaire,* pour lequel on observe constamment, comme on sait, la loi de Descartes et les considérations plus compliquées, mais encore assez simples, qui établissent la marche du rayon extraordinaire.

Ces cristaux offrent, en effet, cette particularité curieuse, que l'un des rayons dans lesquels se divise la lumière incidente se propage suivant les lois de la réfraction ordinaire, un rapport constant existant pour lui entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction. Ce rapport est, au contraire, variable en général pour le second rayon réfracté, et ne reste constant que dans certaines sections du cristal. Ces deux rayons ont été appelés, à cause de cette propriété, le premier, *rayon ordinaire,* et le second, *rayon extraordinaire;* la loi qui règle la direction de ce dernier, par rapport au rayon incident, a d'ailleurs été donnée par Huyghens et vérifiée par Wollaston, et principalement par Malus.

La constance de l'indice de l'un des rayons peut, du reste, être aisément vérifiée. Il suffit de tailler dans une substance bi-réfringente, dans du quartz, par exemple, des prismes diversement

orientés par rapport à son axe cristallin, et de viser au travers de chacun d'eux une ligne lumineuse parallèle aux arêtes du prisme. On obtient deux images, et on peut mesurer très exactement, par la méthode ordinaire, celle du minimum de déviation, l'indice de réfraction des rayons dans lesquels se dédouble le rayon incident. L'un de ces indices est constant dans tous les prismes; le second seul est variable des uns aux autres.

Une autre méthode non moins exacte consiste à placer, sur le trajet de deux fentes très voisines, deux plaques à faces parallèles, d'épaisseurs égales, mais taillées suivant des sens différents dans la plaque de quartz ou de la substance bi-réfringente sur laquelle on veut expérimenter. Les deux faisceaux qui ont traversé les deux fentes interfèrent à une certaine distance, et donnent naissance à des franges très fines et faciles à distinguer de celles qui sont propres à chaque fente. Lorsque les fentes sont recouvertes par les plaques parallèles, chaque faisceau se divise en deux, polarisés suivant des plans rectangulaires, et ceux émanés de chaque fente, qui sont polarisés parallèlement, peuvent interférer. Or, s'il existe dans les faisceaux de droite et de gauche des rayons ordinaires, c'est à dire ayant traversé les plaques avec la même vitesse, la frange centrale doit occuper constamment la même position, quel que soit le sens suivant lequel les plaques ont été taillées.

3. On sait, d'un autre côté, que l'explication du phénomène de la réfraction dans la théorie des ondes repose sur le mode de propagation du mouvement incident dans le milieu réfracté. Ce milieu étant supposé isotrope, le mouvement se propage dans son intérieur par ondes sphériques, et si l'on considère deux ou plusieurs rayons élémentaires incidents très voisins, on démontre sans difficulté que les mouvements concordants doivent se trouver sur un plan tangent aux ondes sphériques auxquelles ils donnent naissance, et mené à une distance du point d'incidence égale à $\frac{v}{\sin\theta}$, v étant la vitesse de propagation du mouvement dans le milieu extérieur, et θ l'angle d'incidence. Dans ce cas, le rapport des sinus d'incidence et de réfraction est égal à celui des vitesses de la lumière dans les deux milieux. Si le milieu est cristallisé, le mouvement ne se propage plus par ondes sphériques; mais il suffit encore de mener à la même distance un plan tangent aux

nappes intérieures de la surface des ondes pour obtenir les rayons réfractés. Dans le cas où le cristal est uni-axe, cette surface se décompose en deux : l'une sphérique, qui donne le rayon ordinaire; l'autre ellipsoïdale, qui fournit le rayon extraordinaire.

Il n'est pas inutile, pour rendre plus claires quelques-unes des considérations qui vont suivre, de rappeler ici succinctement la démonstration extrêmement simple qu'on donne de ce théorème.

Quoique cette démonstration soit indépendante de la direction particulière des vibrations éthérées, je supposerai de suite que les vibrations lumineuses sont transversales, c'est à dire perpendiculaires à la ligne suivant laquelle le mouvement se propage, ou à la direction du rayon. Cette hypothèse est une conséquence des lois des interférences de la lumière polarisée, et dès lors il vaut mieux, dès le début des phénomènes de l'optique, admettre la constitution des rayons de lumière telle qu'on est obligé de l'établir plus tard, sauf à la justifier complètement, ce qui ne présente du reste aucune difficulté.

On sait de plus que, dans un rayon polarisé rectilignement, la direction des vibrations transversales est invariable, et on admet que le plan de polarisation est le plan mené par le rayon perpendiculairement à cette direction constante. Si celle-ci change, de telle sorte que, dans un très petit intervalle de temps, on puisse compter autant de vibrations dans un sens que dans le sens perpendiculaire, la lumière est neutre. Celle-ci peut donc être considérée comme de la lumière polarisée, dont le plan de polarisation varie sans cesse et ne conserve une direction fixe que pendant une durée fort courte.

La relation entre la direction du plan de polarisation et celle des vibrations n'est pas encore établie, il est vrai, d'une manière définitive. Mais tant que la difficulté ne sera pas tranchée, le plus simple est de s'en tenir sur ce point, comme sur beaucoup d'autres, aux vues de Fresnel.

Enfin, on ne doit jamais oublier, dans l'étude théorique des phénomènes de l'optique, que notre œil, pour éprouver la sensation de la lumière, doit être affecté par une onde plane, c'est à dire par des mouvements de directions parallèles, s'effectuant dans un même plan, d'une étendue très petite, dont la normale coïncide avec le rayon de lumière ou la direction suivant laquelle il se

propage. Les mouvements qui affectent notre organe sont alors concordants, et c'est de leur ensemble que résulte la sensation lumineuse. Dans les directions obliques au plan de l'onde, les mouvements se propagent avec des intensités moindres que dans le sens normal; mais leur résultante peut être sensible sur un plan parallèle au front de l'onde : sur un plan oblique, les différences de marche amènent la destruction du mouvement.

4. Soient AB le rayon lumineux incident sur la surface de séparation MM′ des deux milieux, NAN′ la normale, I l'angle d'incidence. Le mouvement se communique des molécules du milieu supérieur à celles du milieu inférieur, et après une unité de temps (cette unité est égale à la durée d'une oscillation complète des molécules éthérées) sera arrivé sur tous les points d'une surface dont la forme dépendra de la nature du milieu et dont l'intersection avec le plan de la figure est supposée être ici EKL.

Fig. 7

En même temps, les molécules choquantes conservent une portion de leur vitesse et donnent naissance à un mouvement analogue qui se propage dans le milieu supérieur et se trouvera, après l'unité de temps, résider sur la surface sphérique décrite du point A, comme centre avec un rayon égal à la vitesse de propagation V du mouvement dans ce milieu.

Si l'on prend $AF = \frac{V}{\sin I}$, si l'on mène par ce point une perpendiculaire au plan d'incidence, et par cette perpendiculaire un plan tangent à la surface, il s'agit de démontrer que la droite, menée de A au point K de tangence, est la direction du rayon réfracté.

Or, en menant par A un plan perpendiculaire à AB, ce plan sera le front de l'onde incidente : deux rayons élémentaires très voisins, BA, CD, ont en A et D des mouvements concordants. Celui parti de A sera transmis après l'unité de temps de A en K; celui parti de D mettra un certain temps pour aller de D en E dans le milieu supérieur; arrivé en E, il donnera naissance à une onde dans le milieu inférieur, et le mouvement parti de E mettra pour arriver de E en H (EH étant parallèle à AK) un temps mesuré par $\frac{EH}{AK}$.

Calculons le temps total nécessaire pour que le mouvement parti de D arrive en H, et démontrons qu'il est encore égal à l'unité.

Or, si l'on mène FG tangente au cercle supérieur, on a dans le triangle AGF, $\sin AFG = \frac{AG}{AF} = \frac{V}{\frac{V}{\sin I}} = \sin I$, d'où $AFG = I$.

Les deux triangles semblables AGF et AED donnent : $\frac{DE}{AG} = \frac{AE}{FA}$ mesure du temps employé par le mouvement pour aller de D en E.

D'autre part, $\frac{EH}{AK} = \frac{EF}{AF}$.

Ainsi, le temps cherché vaut $\frac{AE + EF}{AF} = 1$.

Les mouvements en H et K sont donc concordants comme ceux en A et D. Le plan tangent FHK à la surface des ondes est donc le lieu des mouvements concordants du rayon réfracté. Par suite, il n'y aura de lumière efficace transmise que suivant AK : dans toute autre direction, telle que APQ, le mouvement arrivera en P, après l'unité de temps, et en Q un peu plus tard : les mouvements en H et Q seront donc discordants, et on pourra disposer de AD; de telle sorte que cette différence de marche soit d'une demi-longueur d'ondulation.

Remarquons que cette démonstration est indépendante de la direction particulière des mouvements transversaux que nous admettons dans la lumière incidente. Cette direction peut être

dont l'axe est parallèle à AB. Si les molécules d'un point quelconque de l'intérieur du cristal ou de la surface sont ébranlées normalement à AB, le mouvement se propagera avec la vitesse constante V_0, et le sens de l'ébranlement, pourvu qu'il soit toujours normal à l'axe, n'influera pas sur la grandeur de cette vitesse, qui sera toujours égale à V_0, et qui devra être comptée sur une direction quelconque dans un plan mené par l'axe perpendiculairement à la direction de l'ébranlement.

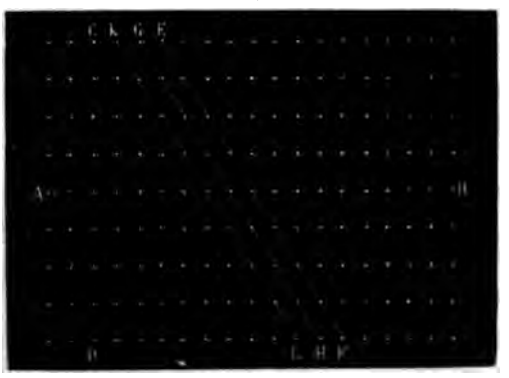
5. Si, au contraire, l'ébranlement est parallèle à AB, le mouvement se propagera circulairement autour de AB avec une vitesse différente de la première, et que nous appellerons V_e. Cette vitesse doit être différente, parce que, d'après les principes généralement admis, la vitesse de propagation d'un mouvement dans un milieu élastique ayant pour mesure la racine carrée du rapport de l'élasticité développée par le déplacement moléculaire à la densité du milieu, si l'un des termes varie seul, la vitesse doit évidemment changer. Or, d'après la constitution moléculaire que nous admettons dans la substance, constitution qui en entraîne une correspondante dans l'éther environnant, l'élasticité développée lorsque les molécules sont déplacées normalement à l'axe est différente de celle qui prend naissance lorsque le déplacement est parallèle à ce même axe, et cela à cause de l'inégale distribution des molécules dans ces deux directions.

Dans les cristaux positifs, V_0 est plus grand que V_e, d'où résulte, en suivant les conséquences de la théorie, que l'élasticité développée lorsque les molécules sont déplacées perpendiculairement à l'axe est plus grande que celle qui correspond au déplacement parallèle à l'axe. Pour cette raison, la direction axiale est dite, dans ce cas, celle de plus petite élasticité. En d'autres termes, la force élastique développée par le déplacement des molécules, parallèle à cette direction, est moindre que celle engendrée lorsque les molécules se meuvent dans le sens perpendiculaire. Mais on ne doit pas oublier que, par suite des hypothèses admises, le mouvement se propage perpendiculairement à la direction de l'ébranlement, c'est à dire de l'ébranlement suivant lequel l'élasticité se trouve développée.

Ces deux directions, à savoir, celle de l'axe et celle qui lui est perpendiculaire, sont, du reste, les seules pour lesquelles la force élastique qui prend naissance par le déplacement des molécules

soit parallèle à ce déplacement. Dans tous les autres sens, cette force fait un certain angle avec la ligne suivant laquelle le déplacement a été effectué. On en comprend aisément la cause, si l'on suppose ces molécules alignées régulièrement, mais à des distances

Fig. 3.



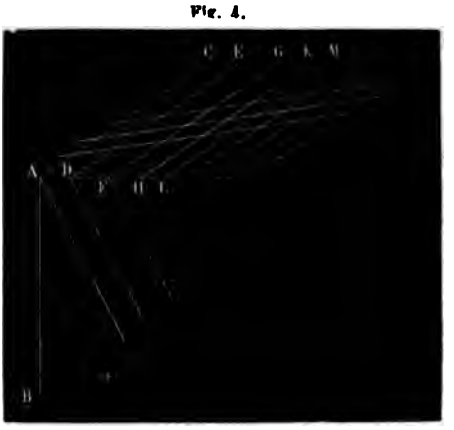
inégales, suivant qu'on les considère dans le sens de l'axe ou dans le sens perpendiculaire. Admettons, pour fixer les idées, qu'une section faite suivant l'axe nous donne une distribution de molécules semblable à celle de la figure 3, celles qui sont dans le sens vertical étant plus éloignées que celles qui se trouvent sur une même ligne horizontale, si l'on fait glisser la tranche AB de la gauche vers la droite, les molécules qu'elle contient seront déplacées symétriquement par rapport aux files du dessus et du dessous. Il en sera de même si une tranche CD est déplacée dans le sens vertical. Mais si l'on considère trois files obliques EF, GH, KL, et si celle du milieu GH est déplacée dans le sens suivant lequel les molécules sont distribuées, il est visible que la symétrie de ses molécules, par rapport aux tranches de droite et de gauche, sera détruite, et on conçoit que la force élastique provenant du déplacement pourra ne pas être dirigée suivant GH.

6. Nous n'avons considéré, dans ce qui précède, que les effets provenant du déplacement d'une file de molécules; mais il importe de remarquer que les phénomènes ne s'accomplissent pas, en réalité, dans des conditions aussi simples. Au lieu d'une seule file de molécules, c'est toujours un ensemble de files constituant le front de l'onde qui sont animées à chaque instant de mouvements égaux et parallèles, et rencontrent la surface réfringente, soit

simultanément, soit successivement, suivant l'incidence, comme dans le raisonnement du § 4. Quoique dans le langage on semble ne tenir compte que d'une seule file de molécules, on ne doit pas oublier qu'il y en a toujours un nombre considérable engagées dans le phénomène.

Cela posé, lorsque, dans un cristal à un axe, un ébranlement a lieu dans le sens perpendiculaire à l'axe, cet ébranlement se

Fig. 4.



communique à toutes les files parallèles, de telle sorte que si AB représente l'axe et AC, DE, FG une série de files parallèles situées dans un plan perpendiculaire à l'axe *(fig. 4)*, dès que l'une FG est ébranlée, par exemple dans le sens de sa longueur, toutes les autres, d'après les idées émises sur la constitution de l'éther, se meuvent parallèlement, non seulement dans le plan AM, mais dans le plan parallèle; et après l'unité de temps, ce mouvement se trouve communiqué dans tous les sens aux files de molécules situés à la distance V_0 de FG. L'onde générale résulte de toutes les ondes correspondantes à chacun des points de la file FG, ainsi que des files voisines. Si les molécules sont ébranlées simultanément en F dans tous les sens, mais toujours dans le plan AM, le mouvement se propagera dans toutes les directions avec la même vitesse, et l'onde correspondante au point F sera sphérique.

On peut même remarquer qu'une série de files parallèles ébranlées dans le plan AM doit, en général, déterminer d'autres ébranlements dans le même plan dans différentes directions, et donner aussi naissance à une onde sphérique.

Si les molécules, au lieu d'être ébranlées perpendiculairement, le sont dans un sens parallèle ou oblique à l'axe; si on conçoit, par exemple, dans le plan de la figure une série de files parallèles aboutissant aux points A, D, F, H, L....., et qui soient déplacées dans le sens de leurs longueurs, soit simultanément, soit successivement, le mouvement se propagera de même dans tous les sens; mais à cause de la différente distribution des molécules, il ne se propagera plus avec la vitesse V_o.

Notre but définitif est d'arriver à trouver la forme de la surface des ondes. Les recherches de Fresnel, complétées par Ampère; celles de M. Plucker, donnent deux méthodes générales, distinctes, mais qui exigent l'une et l'autre de longs calculs. Dans le cas des cristaux uni-axes, ils semblent pouvoir être simplifiés, et conduire cependant à des notions exactes sur le mode de propagation du mouvement.

Si l'on se borne à l'examen des phénomènes dans un plan quelconque mené par l'axe, dans lequel on supposera que s'effectuent les déplacements moléculaires, la courbe d'intersection de la surface des ondes par ce plan se trouve être une ellipse. De telle sorte que si les molécules sont supposées déplacées simultanément dans toutes les directions autour de l'axe AB, la surface des ondes devant donner dans tous les plans menés par cet axe des ellipses égales, sera nécessairement un ellipsoïde de révolution autour de l'axe du cristal.

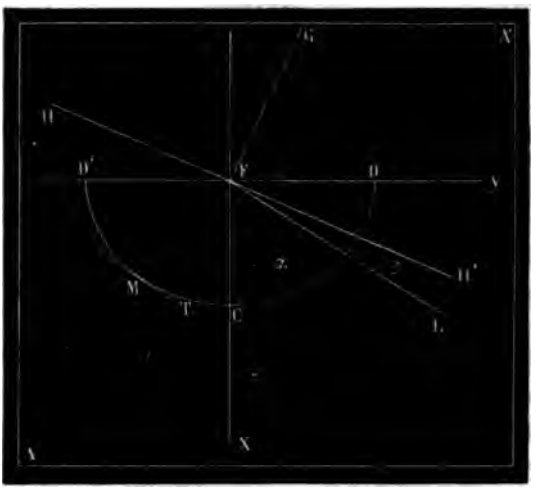
Si l'on suppose maintenant que les molécules soient ébranlées autour du point A dans tous les sens, les déplacements perpendiculaires à l'axe devront engendrer, comme nous l'avons dit en premier lieu, une surface sphérique de rayon V_o, et les déplacements obliques donneront naissance à une onde ellipsoïdale de révolution autour de l'axe du cristal.

On peut ainsi se rendre compte des phénomènes en examinant simplement ce qui arrive pour les déplacements effectués dans un plan quelconque passant par l'axe. Il est aisé de résoudre la question dans ce cas simple, à cause des simplifications de calcul qui s'offrent d'elles-mêmes.

7. Soit donc *(fig. 5)* YFX l'intersection d'un cristal AA′ par un plan dans lequel s'effectuent les vibrations dirigées par hypothèse, suivant HFH′, FX étant l'axe. (Il n'est pas inutile de faire remarquer

que ces vibrations ne sont pas des vibrations incidentes; elles sont envisagées dans la masse cristalline.)

Fig. 5.



Si l'on représente par K le déplacement très petit imprimé suivant FH′ aux molécules éthérées, et par α l'angle H′FX, les projections de ce déplacement sur les deux axes des coordonnées FX et FY auront pour valeurs :

$$K \cos \alpha \text{ suivant FX}$$
$$K \sin \alpha \text{ » FY.}$$

Si l'on appelle d la densité du fluide et si l'on se rappelle que la force élastique développée par un déplacement K est, d'une part, proportionnelle à ce déplacement, de l'autre, au carré de sa vitesse de propagation par la densité du fluide, on aura pour les forces élastiques développées suivant FX et FY, par les déplacements correspondants, les expressions

$$K d V_\alpha^2 \cos \alpha$$
$$\text{et } K d V_\alpha^2 \sin \alpha.$$

Nous ne devons pas oublier que V_α représente la vitesse de propagation de l'ébranlement dirigé suivant l'axe FX, et V_0 cette même vitesse, lorsque l'ébranlement est perpendiculaire à cet axe.

La force correspondante au déplacement suivant FH′ doit être dirigée dans le plan XFY (il n'y pas de raison pour qu'elle le soit

d'un côté de ce plan plutôt que de l'autre); si on représente par R et λ son intensité, et l'angle qu'elle fait avec FX, on aura :

$$\begin{aligned} R\cos\lambda &= Kd V_e^2 \cos\alpha \\ R\sin\lambda &= Kd V_o^2 \sin\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$R = Kd\sqrt{V_e^4\cos^2\alpha + V_o^4\sin^2\alpha}$$

$$\cos\lambda = \frac{V_o^2\cos\alpha}{\sqrt{V_e^4\cos^2\alpha + V_o^4\sin^2\alpha}}$$

$$\sin\lambda = \frac{V_o^2\sin\alpha}{\sqrt{V_e^4\cos^2\alpha + V_o^4\sin^2\alpha}}$$

On voit par ces valeurs de cos λ et sin λ que si V_o est $\gtrless V_e$, λ sera $\gtrless \alpha$, ainsi que nous l'avons annoncé. La force R sera donc dirigée suivant une droite FL faisant avec FH' un angle $\varepsilon = \alpha - \lambda$. Elle pourra dès lors être décomposée en deux : l'une, $R\cos\varepsilon$ suivant FH'; l'autre, $R\sin\varepsilon$ suivant une perpendiculaire à FH'. On admet que cette dernière, qui tend à rapprocher les unes des autres les files parallèles à FH' ou à faire naître des vibrations longitudinales, doit être considérée comme nulle sous le rapport optique et n'exerce aucune influence sur la vitesse de propagation de l'ébranlement, laquelle dépend de la seule valeur $R\cos\varepsilon$. Il en résulte que si l'on appelle u cette vitesse comptée dans le plan YFX et dans la direction normale à FH', la seule qui nous intéresse, on aura :

$$R\cos\varepsilon = Ku^2$$

ou

$$Kdu^2 = R\cos(\alpha-\lambda) = R\cos\lambda\cos\alpha + R\sin\lambda\sin\alpha$$

$$Kdu^2 = Kd(V_e^2\cos^2\alpha + V_o^2\sin^2\alpha)$$

$$u^2 = V_e^2\cos^2\alpha + V_o^2\sin^2\alpha. \qquad (1)$$

Sur une perpendiculaire à FH', menée par le point F, prenons $FT = u$ et menons par T une parallèle TM à FH', elle représentera la position de l'onde plane après l'unité de temps. Mais cette onde doit être tangente à la courbe cherchée, soit M le point de contact. Si $y = f(x)$ représente l'équation inconnue de cette courbe et si l'on pose $\frac{dy}{dx} = p$, on a :

$$u^2 = \frac{(px-y)^2}{1+p^2},$$

donc

$$\frac{(px-y)^2}{1+p^2} = V_e^2 \cos^2\alpha + V_o^2 \sin^2\alpha,$$

on a de plus :

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

l'équation devient donc, en supprimant le facteur $\frac{1}{1+p^2}$,

$$(px-y)^2 = V_e^2 + p^2 V_o^2 \tag{2}$$

qu'il s'agit d'intégrer.

On en déduit :

$$y = px \pm \sqrt{V_e^2 + p^2 V_o^2} \tag{3}$$

différentiant

$$pdx = pdx + dp\left(x \pm \frac{pV_o^2}{\sqrt{V_e^2 + p^2 V_o^2}}\right)$$

d'où

$$x \pm \frac{pV_o^2}{\sqrt{V_e^2 + p^2 V_o^2}} = o. \tag{4}$$

Car il est aisé de voir que la solution $dp = o$ ne convient pas à la question.

Il ne reste plus, pour obtenir l'équation entre x et y, qu'à éliminer p entre (3) et (4).

On a successivement :

$$x^2(V_e^2 + p^2 V_o^2) = p^2 V_o^4,$$

$$p^2 = \frac{x^2 V_e^2}{V_o^2(V_o^2 - x^2)}$$

$$\left(\frac{x^2 V_e}{V_o\sqrt{(V_o^2 - x^2)}} - y\right)^2 = V_e^2 + \frac{x^2 V_e^2}{(V_o^2 - x^2)} = \frac{V_o^2 V_e^2}{V_o^2 - x^2}$$

$$x^2 V_e - V_o y\sqrt{(V_o^2 - x^2)} = V_o^2 V_e,$$

$$V_e\sqrt{V_o^2 - x^2} = -V_o y,$$

$$V_e^2(V_o^2 - x^2) = V_o^2 y^2,$$

$$\frac{y^2}{V_e^2} + \frac{x^2}{V_o^2} = 1. \tag{5}$$

Équation d'une ellipse dont les demi-axes principaux sont V_o et V_e, le premier étant dirigé suivant l'axe du cristal.

8. On peut donc admettre comme vérifié qu'un cristal à un axe ébranlé en un point quelconque dans toutes les directions, doit donner naissance à deux espèces d'ondes : les premières, sphériques, ayant pour rayon, après l'unité de temps, la vitesse V_o; les secondes, ellipsoïdales, de révolution autour de l'axe du cristal, dont les demi-axes sont V_o, V_e, le premier coïncidant avec l'axe.

Pour trouver la direction des rayons réfractés, il suffit donc, d'après la règle générale (paragraphe 4), de mener des plans tangents à ces deux surfaces, perpendiculaires au plan d'incidence, et qui rencontrent la trace de ce plan à la distance $\frac{1}{\sin I}$ du point d'incidence, si l'on prend pour unité de vitesse celle de la lumière dans le milieu extérieur.

Il n'est cependant pas inutile d'examiner en détail quelques-uns des cas particuliers qu'offre la double réfraction dans les cristaux uni-axes; de se rendre compte de la direction des vibrations et des lois du phénomène dans ces cas simples qui offrent d'utiles vérifications de la règle générale.

9. 1er CAS. Soit *(fig. 2)* le rayon incident normal à la face AC, par conséquent parallèle à l'axe; les vibrations étant transversales seront parallèles à la face AC, et le front de l'onde se composera d'une série de mouvements parallèles entre eux. La symétrie seule indique ici que ces vibrations doivent se propager dans le cristal, en restant toujours parallèles entre elles et à leur direction primitive. La normale à l'onde réfractée sera donc dirigée suivant AB, et la vitesse de propagation du mouvement sera V_o; il n'y aura qu'un seul rayon. C'est aussi ce qu'indique la règle d'Huyghens.

10. 2e CAS. Soit GF le rayon incident. Le plan d'incidence contient alors l'axe. Supposons que les vibrations normales au rayon le soient aussi au plan d'incidence : elles seront dès lors parallèles à la surface. Si l'on considère deux rayons élémentaires très voisins GF, G'F', les vibrations qui les constituent arriveront successivement à la surface; chacune d'elles se propagera dans le cristal avec la vitesse V_o, conservera sa direction, et donnera naissance à des ondes distribuées sur un cylindre à base circulaire, ayant V_o pour rayon. Les mouvements se détruiront par interférence, sauf dans la direction pour laquelle $\frac{\sin I}{\sin r} = \frac{1}{V_o}$, r étant l'angle

de réfraction. Il n'y aura donc qu'un rayon réfracté. C'est ce que l'expérience vérifie, ce cas étant celui d'un rayon polarisé dans la section principale.

Si les vibrations sont parallèles au plan d'incidence, elles seront dirigées suivant les droites FH, F'H', perpendiculaires à la direction des rayons. Les ébranlements qui arriveront successivement sur la surface seront obliques à l'axe, et chacun d'eux donnera naissance à une onde. On peut se borner, dans ce cas, à considérer ce qui arrive dans le plan de la figure, en admettant que le rayon réfracté doit y être compris, à cause de la symétrie du cristal. La courbe engendrée sera l'ellipse

$$\frac{X^2}{V_o^2} + \frac{Y^2}{V_e^2} = 1,$$

en supposant l'axe des X parallèle à AB. On n'aura qu'un seul rayon, dont les vibrations seront dirigées dans le plan primitif; la direction de ce rayon sera déterminée par la règle générale, sur laquelle nous allons revenir. Ce cas est celui d'un rayon polarisé perpendiculairement à la section principale.

Si les vibrations, toujours perpendiculaires au rayon incident FG, sont obliques au plan d'incidence, on pourra les décomposer en deux : les unes normales à ce plan, et, par suite, parallèles à l'axe; les autres situées dans ce plan et obliques à l'axe. Les premières donneront naissance à une onde sphérique, c'est à dire au rayon ordinaire; les autres engendreront une onde ellipsoïdale, et produiront le rayon extraordinaire.

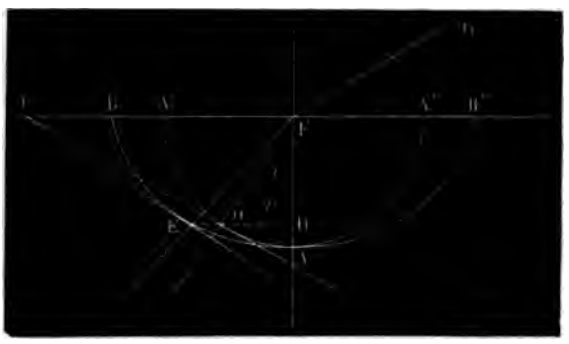
La lumière neutre, pouvant être considérée comme de la lumière polarisée dont le plan de polarisation varie sans cesse, devra aussi donner naissance à ces deux sortes de rayons.

L'expérience vérifie exactement ces conclusions; elle vérifie aussi la relation très simple qui existe entre les directions des deux rayons correspondants au rayon incident, relation qu'il est facile d'établir.

11. FG étant le rayon incident *(fig. 6)*, soient A'AA'' la circonférence décrite avec V_o comme rayon, et BAB' l'ellipse qui a pour demi-axes V_o et V_e; pour avoir les rayons réfractés, il faut prendre

$FC = \frac{V}{\sin I}$, et mener, par le point C, deux tangentes au cercle et à l'ellipse, lesquelles déterminent le rayon ordinaire FO et l'extraordinaire FE. D'après une propriété connue, la droite EOH est perpendiculaire à FA, et on a, de plus :

Fig. 6.



$$\frac{OH}{EH} = \frac{FA'}{FB} = \frac{V_e}{V_o} ;$$

mais en appelant r, r' les deux angles de réfraction, on a, en outre :

$$OH = FH \operatorname{tang} r \qquad EH = FH \operatorname{tang} r' .$$

Donc

$$\frac{\operatorname{tang} r}{\operatorname{tang} r'} = \frac{V_o}{V_e} .$$

Ce rapport doit donc être constant, et il est aisé de le vérifier avec une plaque bi-réfringente à faces parallèles ou inclinées, pourvu que la face sur laquelle se présente le rayon incident soit normale à l'axe du cristal.

12. 3e cas. Considérons actuellement le cas où la face d'incidence est parallèle à l'axe; celui, par exemple, où le rayon tombe sur la face NC *(fig. 2)*; et supposons d'abord le rayon SJ normal à la face.

Le plan de section principale est dans ce cas JCSD. Si les vibrations sont perpendiculaires à ce plan, c'est à dire si le rayon est polarisé dans la section principale, elles seront parallèles à la face NC, et en même temps perpendiculaires à l'axe; elles devront, comme dans le premier cas, se transmettre en conservant leur

parallélisme avec la vitesse V_o. On devra donc avoir un seul rayon ordinaire sur le prolongement de JS.

Si elles sont parallèles à l'axe, elles devront encore se propager dans le cristal, en conservant leur parallélisme avec une vitesse uniforme pour toutes, mais égale à V_e. On devra donc avoir un seul rayon extraordinaire, situé encore sur le prolongement de JS.

Si elles sont obliques à l'axe, elles pourront être remplacées par leurs deux composantes. On aura donc, dans ce cas, deux rayons se propageant suivant la même direction, mais avec des vitesses différentes, V_o, V_e.

L'expérience justifie ces déductions, et ce cas, quoique un des plus simples, était l'un des plus importants à étudier à part, à cause des applications nombreuses qu'on en fait dans l'étude des couleurs des lames minces et en polarisation circulaire.

13. Supposons maintenant le rayon oblique à NC, et considérons d'abord le cas où le plan d'incidence est parallèle à l'axe, ayant, par exemple, pour trace la droite SD, SL étant le rayon incident.

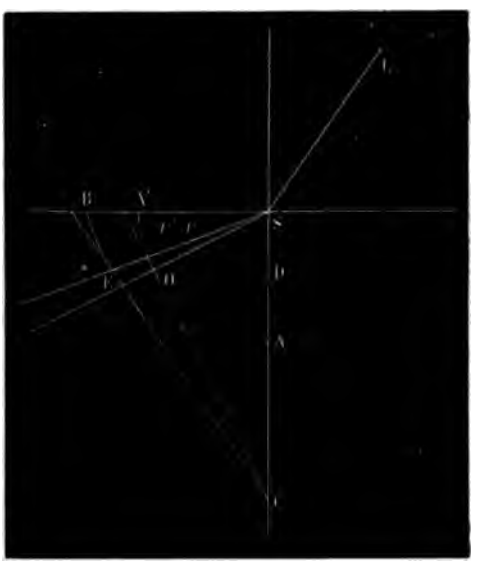
Si les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence, elles le seront aussi à l'axe, et devront se propager avec la même vitesse, c'est à dire la vitesse V_e, quelle que soit l'incidence. Le rayon réfracté devra donc suivre la loi ordinaire. C'est ce que l'expérience vérifie. Dans ce cas, le rayon étant polarisé dans le plan d'incidence ou de section principale n'admet, en effet, qu'un seul rayon, à savoir, le rayon ordinaire.

Si les vibrations sont parallèles au plan CSL, elles ne se propageront plus avec une vitesse indépendante de l'incidence. Nous rentrons dans le cas déjà traité dans le paragraphe 7, et l'intersection de la surface des ondes par le plan d'incidence est encore une ellipse, ayant pour demi-axes V_o et V_e, le premier coïncidant avec l'axe du cristal. Cette courbe est bien celle que l'on doit obtenir d'après la loi d'Huygens; on n'a alors que le rayon extraordinaire.

Les vibrations obliques au plan d'incidence donneront deux composantes : l'une normale, l'autre parallèle à ce plan. On aura donc les deux rayons ordinaire et extraordinaire. C'est le cas de la lumière polarisée dans un azimut différent du plan d'incidence et du plan perpendiculaire; c'est aussi celui de la lumière neutre. Mais les positions relatives des deux rayons réfractés ne sont plus les mêmes que dans le cas où la face d'entrée est perpendiculaire à l'axe. En effet, si on trace *(fig. 7)* l'ellipse et la circonférence

décrite du rayon V_0, et que, du point C pris à la distance $SC = \frac{V}{\sin i}$, on mène les deux tangentes CO et CE au cercle et à l'ellipse, on aura les deux rayons ordinaire SO et extraordinaire SE.

Fig. 7.



Le dernier est plus réfracté que le premier : l'inverse avait lieu dans le cas de la figure 6.

Les deux points O, E sont sur une même parallèle à SB, et on a :

$$\frac{DO}{DE} = \frac{V_0}{V_e};$$

mais

$$DO = \frac{DS}{\operatorname{tang} r}, \qquad DE = \frac{DS}{\operatorname{tang} r'};$$

donc

$$\frac{\operatorname{tang} r'}{\operatorname{tang} r} = \frac{V_0}{V_e},$$

relation vérifiée par l'expérience.

14. Le rayon tombant toujours sur une face parallèle à l'axe, si le plan d'incidence est perpendiculaire à cet axe, au lieu de lui être parallèle; si sa trace est, par exemple, représentée par la ligne OPQ *(fig. 2)*, PR étant le rayon incident, les vibrations pourront être parallèles ou perpendiculaires au plan d'incidence. Dans le premier

cas, elles seront obliques à la face d'entrée, mais perpendiculaires à l'axe, quel que soit l'angle d'incidence; la vitesse de propagation sera donc constamment égale à V_o, et on aura le rayon ordinaire seul. C'est, en effet, le cas d'un rayon polarisé suivant la section principale.

Dans le second, les vibrations seront parallèles à la surface et à l'axe, quelle que soit l'incidence. La vitesse de propagation sera donc constante, mais égale à V_e. Le rayon extraordinaire devra suivre, dans ce cas, la loi de Descartes.

Cette conséquence résulte de la loi générale. La surface des ondes, coupée par un plan normal à l'axe, donne, en effet, pour intersection l'équateur même de l'ellipsoïde qui la représente, c'est à dire un cercle ayant V_e pour rayon.

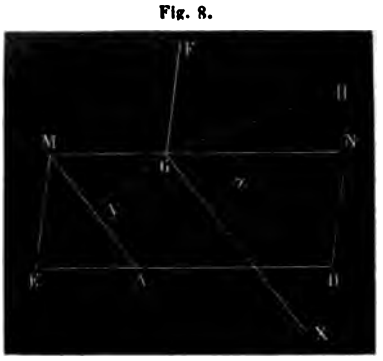
Si les vibrations sont obliques au plan d'incidence, on les décomposera comme précédemment en deux, et on aura deux rayons se réfractant chacun suivant la loi de Descartes, mais avec des indices différents.

L'observation est en parfait accord avec ces conséquences théoriques. On détermine les deux indices ordinaire et extraordinaire en se servant d'un prisme dont les arêtes sont parallèles à l'axe, et appliquant la méthode connue du maximum de déviation.

15. Passons au cas d'une face oblique à l'axe, et supposons d'abord le rayon normal à cette face.

Menons la section principale, c'est à dire le plan qui passe par

Fig. 8.



l'axe et la normale, à la face d'entrée, et supposons que cette section soit le plan de la figure 8, dans laquelle MA représente l'axe, FG le rayon incident.

Si les vibrations sont normales à la section principale, elles

seront parallèles à la surface et perpendiculaires à l'axe, se propageront dans le cristal avec la vitesse V_0, en conservant leur direction; le rayon réfracté devra donc, d'après la règle générale, suivre la loi de Descartes, c'est à dire être situé sur le prolongement de la normale, quel que soit l'angle AME. C'est le cas d'un rayon polarisé suivant la section principale.

Si les vibrations sont, au contraire, parallèles à cette section, elles seront obliques à l'axe; leur vitesse de propagation dans le cristal dépendra, dans ce cas, de l'angle AME. Mais si l'on admet, à cause de la symétrie, que le rayon réfracté reste compris dans le plan d'incidence, on reconnaît, comme dans le cas examiné paragraphe 7, que l'intersection de la surface des ondes par le plan d'incidence sera encore une ellipse ayant pour demi-axes V_0 et V_e, V_e étant porté sur l'axe du cristal. De plus, les vibrations resteront dirigées dans la section principale.

Le cas des vibrations obliques au plan d'incidence se ramène, sans difficulté, aux deux précédents.

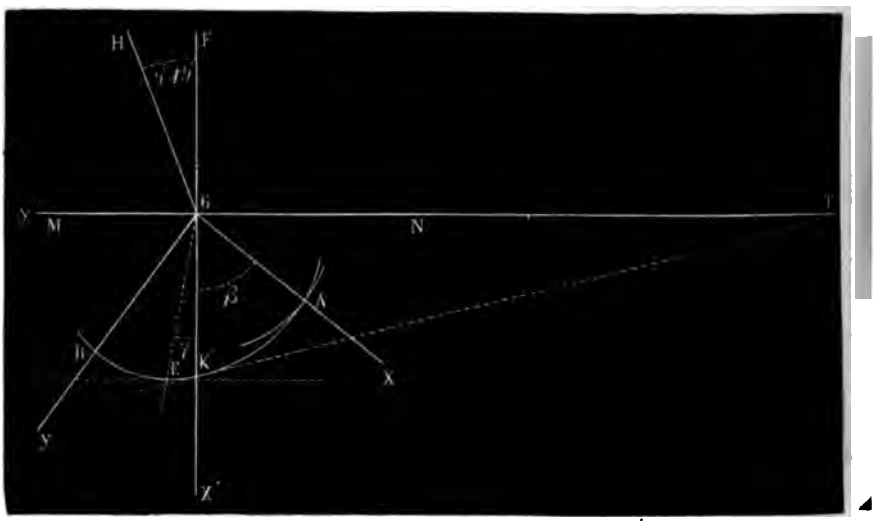
16. Si le rayon incident, au lieu d'être normal à la face MN, était oblique à cette face, mais situé dans le plan de section principale, on pourrait répéter les mêmes raisonnements, et on trouverait encore que, dans le cas d'un rayon polarisé dans la section principale, c'est à dire de vibrations perpendiculaires à ce plan, on ne doit avoir que le rayon ordinaire; et, dans celui du rayon polarisé perpendiculairement à la section principale, c'est à dire de vibrations parallèles à ce plan, on n'aura qu'un rayon extraordinaire déterminé, comme précédemment, par l'ellipse construite avec V_0 et V_e pour demi-axes. Dans le cas des vibrations obliques, on aura ces deux rayons. Les vibrations du premier seront perpendiculaires à la section principale; celles du second seront dans ce plan, et dirigées dans le plan tangent à l'ellipsoïde.

17. Dans le cas du rayon normal à MN, le rayon réfracté extraordinaire est compris dans le plan de section principale, et il est déterminé, d'après la règle générale, par la tangente à l'ellipse parallèle à la face MN. Si GX *(fig. 9)* représente l'axe dont l'angle avec la normale est supposé égal à β, et AEB l'ellipse, intersection de la surface des ondes par le plan de la figure, la tangente parallèle à MN détermine le point de contact E, et le rayon réfracté extraordinaire est GE. Il est aisé de calculer l'angle γ qu'il doit former

avec le rayon ordinaire GK ou la normale. Cet angle est égal à 6°12′39″ pour le spath, la face MN étant une face naturelle; cas pour lequel $\beta = 44°37'$.

18. Lorsque le rayon GH est oblique à la face MN, mais com-

Fig. 9.



pris dans la section principale, le rayon réfracté se trouve encore dans cette section, et on peut se proposer de rechercher quel doit être l'angle d'incidence, pour que le rayon extraordinaire coïncide avec la normale GK. La question revient à mener par le point K une tangente à l'ellipse, et à calculer GT, puisqu'on sait que $GT = \frac{1}{\sin i}$, i étant l'angle cherché.

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{V_o^2} + \frac{y^2}{V_e^2} = 1 .$$

Si on veut la rapporter aux deux axes GX′, GY′, on a, en désignant par x', y', les nouvelles coordonnées :

$$x = x' \cos\beta - y' \sin\beta ,$$
$$y = x' \sin\beta + y' \cos\beta ,$$

d'où résulte, pour l'équation transformée :

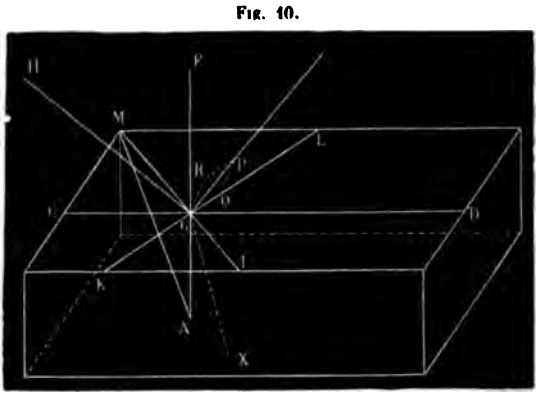
$$\frac{(x' \cos\beta - y' \sin\beta)^2}{V_o^2} + \frac{(x' \sin\beta + y' \cos\beta)^2}{V_e^2} = 1$$

ordinaire. Les deux rayons réfractés doivent donc coïncider, et l'angle i' se calcule par la formule très simple :

$$\sin i' = \frac{\sin i}{V_o}.$$

20. Examinons actuellement le cas le plus général, celui où le cristal étant taillé obliquement à l'axe, le rayon incident n'est pas compris dans la section principale.

Fig. 10.



Soient *(fig. 10)*.

MA la direction de l'axe,

CGHD le plan d'incidence,

GH le rayon incident,

MAGI la section principale,

GX la parallèle à l'axe menée par le point G.

La droite KGL menée sur la surface du cristal perpendiculairement à MGI, l'étant aussi à FGA, le sera également à la section principale.

Les vibrations du rayon GH lui sont perpendiculaires, mais elles peuvent être dirigées dans un plan quelconque passant par GH, soit GP leur direction. On pourra toujours faire passer un plan par GP et KL et décomposer dans ce plan la vibration GP en deux dirigées, l'une GQ suivant GL, et l'autre GR suivant une perpendiculaire à GL.

La première sera parallèle à la surface du cristal et normale à l'axe, quelle que soit l'incidence : elle devra donc engendrer une onde sphérique de rayon V_o. Ainsi, le rayon tombant sous une

incidence quelconque, on aura toujours une vibration ordinaire.

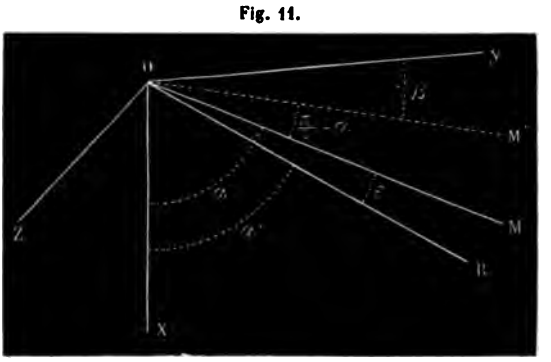
La seconde, GR, sera oblique à l'axe, et devra donner naissance à une onde ellipsoïdale, comme nous l'avons indiqué dans le cas général, dont celui-ci n'est, à vrai dire, que la reproduction.

21. On arrive donc à la conclusion que, dans cette classe de corps, on doit toujours avoir, en appliquant la théorie des ondes, les deux rayons déterminés par la loi d'Huyghens, l'un de ces rayons pouvant s'évanouir dans certaines directions que l'on peut trouver aisément dans les cas particuliers examinés précédemment. Nous n'avons, du reste, ici en vue que la recherche de la direction des rayons réfractés, laissant de côté la question de savoir dans quelle proportion la lumière incidente se partage entre les faisceaux réfléchis et réfractés; problème important, mais tout différent du premier.

La direction des vibrations dans chacun des rayons réfractés se détermine aisément dans les divers cas étudiés précédemment, à l'exception du dernier. Dans ce cas, qui est le plus général, on peut démontrer facilement que les vibrations du rayon extraordinaires sont dirigées dans le front de l'onde, c'est à dire dans le plan tangent à l'ellipsoïde, suivant la projection du rayon sur ce plan tangent.

Soient OX, OY, OZ *(fig. 11)*, trois axes rectangulaires, dont l'un

Fig. 11.



coïncide avec l'axe du cristal : un déplacement ζ, opéré suivant OM, aura pour projection sur les trois axes :

$$\zeta \cos\alpha, \qquad \zeta \sin\alpha \cos\beta, \qquad \zeta \sin\alpha \sin\beta,$$

Les trois composantes de la force développée seront :

$$R\cos\alpha' = V_0^2 \zeta \cos\alpha, \; R\sin\alpha' \cos\beta = V_0^2 \zeta \sin\alpha \cos\beta,$$
$$R\sin\alpha' \sin\beta = V_0^2 \zeta \sin\alpha \sin\beta.$$

La résultante R aura pour valeur :

$$R = \zeta \sqrt{V_e^2 \cos^2\alpha + V_o^2 \sin^2\alpha}.$$

La composante de R suivant OM, la seule qu'il nous importe de considérer, sera :

$$R\cos\varepsilon = R(\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha') = \zeta(V_e^2\cos^2\alpha + V_o^2\sin^2\alpha).$$

Portons sur tous les rayons vecteurs OM que l'on peut mener par le point O des longueurs égales, pour chacun d'eux, à la valeur correspondante de $\frac{1}{\sqrt{R\cos\varepsilon}}$ (en supposant $\zeta = 1$), c'est-à-dire égales à l'unité divisée par la vitesse de propagation de l'ébranlement dirigé suivant chaque rayon vecteur, nous obtiendrons ainsi une surface dont l'équation sera, ρ étant le rayon vecteur OM,

$$\rho^2 = \frac{1}{R\cos\varepsilon} = \frac{1}{V_e^2\cos^2\alpha + V_o^2\sin^2\alpha}.$$

et en coordonnées rectangulaires,

$$\rho^2\left(V_e^2\frac{x^2}{\rho^2} + V_o^2\cdot\frac{y^2+z^2}{\rho^2}\right) = 1,$$

ou

$$V_e^2x^2 + V_o^2(y^2+z^2) = 1, \qquad (C)$$

ellipsoïde de révolution autour de OX, qui est, d'après sa construction même, l'ellipsoïde inverse des vitesses, et qu'on appelle aussi *ellipsoïde de Plucker*.

La force étant dirigée dans le plan XOM, le mouvement se propagera dans ce plan, perpendiculairement à OM, avec la vitesse $\frac{1}{OM}$. Si donc nous avons une onde plane dont le front soit perpendiculaire à XOM, elle se transmettra dans le sens perpendiculaire à OM et à son propre plan, en restant plane, avec la vitesse $\frac{1}{OM}$, sans que ses mouvements puissent interférer.

Si le front de l'onde était ou parallèle ou oblique au plan XOM, ses divers mouvements se détruiraient par interférence.

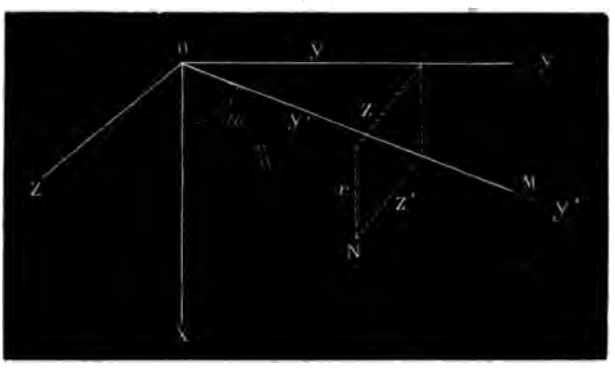
Ainsi, OM étant la direction des vibrations, il n'y a de propagation possible que pour l'onde dont le plan est perpendiculaire à XOM.

Ce plan coupe la surface (C) suivant une ellipse dont l'un des

demi-axes est $OM = \frac{1}{\sqrt{V_e^2 \sin^2\alpha + V_o^2 \cos^2\alpha}}$, l'autre étant $\frac{1}{V_o}$.

On peut, en effet, sans nuire à la généralité de la question, supposer OM dans le plan des XY, et alors, en rapportant la courbe

Fig. 12.



aux deux axes OY', OZ, on a, pour l'un quelconque N de ses points *(fig. 12)* :

$$x = y' \cos\alpha, \qquad y = y' \sin\alpha, \qquad z = z',$$

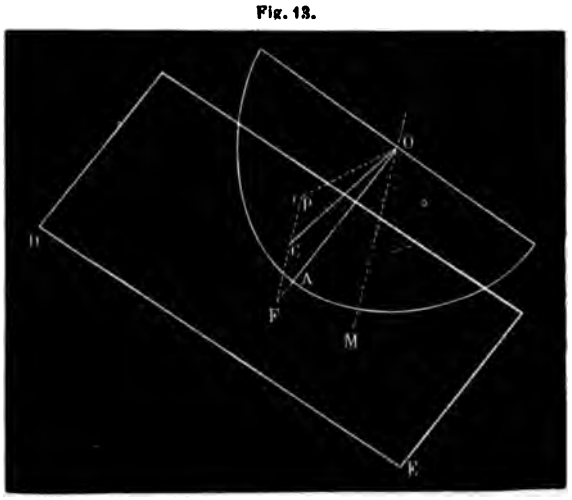
d'où l'on déduit :

$$(V_e^2 \cos^2\alpha + V_o^2 \sin^2\alpha)\, y'^2 + V_o^2 z'^2 = 1,$$

équation qui donne bien pour les demi-axes les valeurs énoncées.

22. Maintenant, soit DE *(fig. 13)* le plan tangent en C à l'ellip-

Fig. 13.



soïde d'Huygens, dont l'axe est OA, lequel rencontre le plan en F. Ce plan tangent est normal au plan méridien qui passe par le point C, puisque l'ellipsoïde est de révolution. Menons par le point O, dans le plan méridien FOC, la droite OM parallèle à FC, et concevons par le point O, supposé le point d'incidence, une onde plane parallèle à DE, et dont les vibrations soient dirigées suivant OM; cette onde satisfera aux conditions qui doivent être remplies pour que le mouvement se propage sans interférence; elle sera perpendiculaire au plan XOM du paragraphe précédent, lequel est ici représenté par FOM; et comme elle est la seule qui puisse se propager ainsi, on en doit conclure que FC, projection du rayon OC sur le plan tangent, représente la direction des vibrations du rayon extraordinaire.

OP, perpendiculaire abaissée du point O sur le plan tangent, est la vitesse de propagation de l'onde plane, qu'il ne faut pas confondre avec celle du rayon réfracté, laquelle est égale à OC; OP est précisément égal à $\frac{1}{OM}$ du paragraphe précédent. Nous avons trouvé, en effet, $\frac{1}{OM} = \sqrt{V_e^2 \sin^2\alpha + V_o^2 \cos^2\alpha}$, et OP, qui n'est autre que la quantité u du paragraphe 7, a précisément la même valeur.

Ainsi, en général, les vibrations du rayon extraordinaire sont dirigées, suivant la projection du rayon lui-même sur le plan tangent à l'ellipsoïde d'Huygens. Il est aisé de voir que cette règle s'applique aux cas particuliers précédemment examinés, toutes les fois, du moins, que le rayon n'est pas perpendiculaire au plan tangent.

Remarquons, en outre, que ces vibrations sont dirigées dans le plan tangent qui est le front de l'onde; de sorte que, considéré dans le cristal, le plan de l'onde extraordinaire n'est pas normal au rayon correspondant.

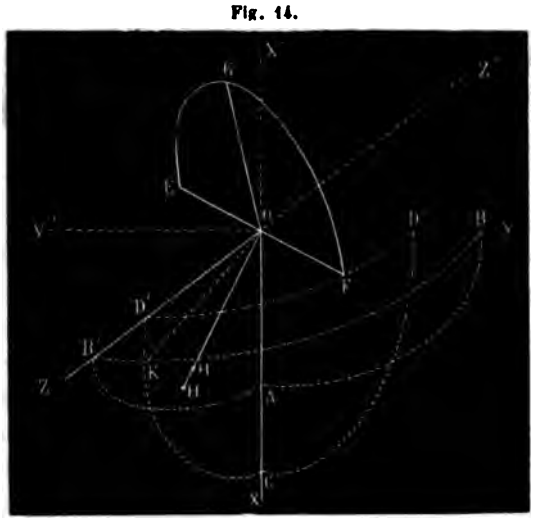
23. La direction des vibrations ordinaires peut, comme nous l'avons vu, se déterminer dans tous les cas. Il est aisé de reconnaître qu'elle est parallèle, en général, à l'axe $\frac{1}{V_o}$ de l'ellipse qui résulte de l'intersection de l'ellipsoïde (C) par un plan perpendiculaire au rayon ordinaire. Le caractère de ces vibrations est, en effet, de se propager avec la vitesse V_o. Or, si les vibrations sont parallèles à l'axe $\frac{1}{V_o}$ de l'ellipse d'intersection, il est aisé de voir,

coïncide avec l'axe du cristal. La surface des ondes, rapportée à ces trois axes, a pour équation :

$$(A) \qquad \frac{x^2}{V_o^2} + \frac{y^2 + z^2}{V_e^2} = 1.$$

Les intersections de cette surface par les trois plans coordonnés sont les ellipses AOB, AOB' et le cercle BOB' de rayon V_e.

Fig. 14.



Portons sur l'axe OX une longueur égale à V_e, c'est-à-dire à la racine carrée de la force élastique développée quand les molécules sont déplacées suivant sa direction, et sur les deux autres axes OY, OZ, les longueurs V_o, qui sont aussi proportionnelles à la racine carrée de l'élasticité qui prend naissance lors du déplacement des molécules suivant ces droites. Construisons un ellipsoïde de révolution autour de OX avec ces valeurs pour demi-axes, son équation sera :

$$(B) \qquad \frac{x^2}{V_e^2} + \frac{y^2 + z^2}{V_o^2} = 1.$$

Les ellipses COD, COD' et le cercle DOD' de rayon V_o se rapportent à cet ellipsoïde.

Si l'on coupe ce dernier ellipsoïde par un plan quelconque, la courbe d'intersection sera une ellipse dont les deux demi-axes sont précisément égaux aux rayons vecteurs de la surface des ondes, dirigés suivant la normale au plan sécant.

L'un de ces rayons vecteurs étant constamment égal à V_e, l'un des demi-axes de l'ellipse d'intersection doit avoir la même valeur, quelle que soit la direction du plan sécant, et le second demi-axe doit être égal au rayon vecteur de l'ellipsoïde qui coïncide avec la normale au plan.

Cette propriété peut être démontrée sans difficulté.

Remarquons d'abord que r, représentant le rayon vecteur qui aboutit au point x, y, z de la surface (B); on a :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + V_e^2\left(1 - \frac{x^2}{V_e^2}\right),$$

d'où l'on déduit :

$$r\,dr = x\,dx\left(1 - \frac{V_e^2}{V_e^2}\right).$$

Les valeurs maxima et minima de r étant déterminées par l'équation $dr = o$, correspondent à $x = o$, laquelle donne $r = V_e$. Il est évident, du reste, que cette valeur est maxima ou minima suivant que l'on a $V_e \gtrless V_e$.

Maintenant, tout plan mené par le point O coupe le cercle BOB' dont le rayon est V_e : ainsi, l'un des axes de la courbe d'intersection est égal à V_e, et il reste à démontrer que le second est égal au rayon vecteur de l'ellipsoïde (A), perpendiculaire au plan sécant.

Soit EGF ce plan dont la trace sur le plan des YZ est EOF : la normale OG à EF, tracée dans le plan de la courbe, est le second axe et doit être égale à OH, rayon vecteur de l'ellipsoïde (A), mené perpendiculairement au plan EGF.

Or, le plan XOH détermine dans l'ellipsoïde (A) une section qui est une ellipse dont les deux demi-axes sont V_e, V_e, OH faisant avec V_e un angle $HOX = \beta$.

Ce même plan est perpendiculaire à OF et détermine dans l'ellipsoïde (B) une section elliptique dont les deux demi-axes sont encore V_e et V_e, et le rayon vecteur OG fait, avec l'axe OK ou V_e, un angle GOK qui est égal à β : tous deux, en effet, sont complémentaires du même angle GOX'.

Les deux rayons OH et OG sont donc égaux, puisqu'ils ont la même position dans deux ellipses égales.

25. On pourrait donc retrouver la surface des ondes en construisant l'ellipsoïde (B), menant une infinité de plans par le centre et prenant sur la normale, à chacun d'eux, des longueurs égales aux deux demi-axes de l'ellipse d'intersection; on obtiendrait ainsi

une sphère, puisque l'un de ces demi-axes est constamment égal à V_o, et, en outre, l'ellipsoïde d'Huyghens.

Une autre conséquence découle de la propriété que nous venons de démontrer.

Par le point O pris à la surface du cristal, menons dans son intérieur une droite quelconque OH *(fig. 14)*. Les deux rayons ordinaire et extraordinaire qui se meuvent suivant cette direction auront des vitesses OH, OH' représentées par les demi-axes de l'ellipse obtenue en faisant dans l'ellipsoïde (B) une section normale à OH.

Les rayons incidents qui fourniront les deux rayons réfractés OH, OH' sont liés l'un à l'autre par une relation trop compliquée pour que nous essayons de la faire connaître. L'ordinaire est d'ailleurs facile à trouver, puisqu'il suffit de mener par le point H un plan normal à OH, d'abaisser de O une perpendiculaire sur la trace de ce plan, et en appelant l la longueur de celle-ci, de prendre l'incidence I déterminée par la relation $\sin I = \frac{1}{l}$. Le plan d'incidence passe par la normale à la face d'incidence et cette perpendiculaire elle-même.

26. L'ellipsoïde (B) est connu sous le nom d'*ellipsoïde de Fresnel*. Il a les mêmes axes que la surface d'élasticité, c'est à dire que la surface dont chaque rayon vecteur est égal à la racine carrée de la force élastique développée lorsque les molécules sont déplacées suivant sa direction. Nous avons trouvé, pour la valeur de cette composante de la force élastique, en supposant le déplacement $\zeta = 1$ (parag. 21),

$$R \cos \varepsilon = V_e^2 \cos^2 \alpha + V_o^2 \sin^2 \alpha,$$

ρ étant le rayon vecteur de la surface d'élasticité, on a pour l'équation de cette surface:

$$\rho^2 = V_e^2 \cos^2 \alpha + V_o^2 \sin^2 \alpha,$$

Si on veut avoir l'équation de cette courbe rapportée aux axes des X et des Y, il suffit de poser :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

et l'on obtient :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = V_e^2 x^2 + V_o^2 (y^2 + z^2),$$

ou

$$\rho^4 = V_e^2 x^2 + V_o^2 (y^2 + z^2). \qquad (D)$$

27. D'après les considérations qui précèdent, on est conduit à étudier, dans la théorie ondulatoire des cristaux bi-réfringents uni-axes, quatre surfaces qui ont entre elles des relations curieuses, savoir :

1° l'ellipsoïde d'Huyghens $\frac{x^2}{V_o^2} + \frac{y^2+z^2}{V_e^2} = 1$; (A)

2° celui de Fresnel $\frac{x^2}{V_e^2} + \frac{y^2+z^2}{V_o^2} = 1$; (B)

3° celui de Plucker $\frac{x^2}{V_o^2} + \frac{y^2+z^2}{V_e^2} = \frac{1}{V_o^2 V_e^2}$; (C)

4° la surface d'élasticité $V_e^2 x^2 + V_o^2 (y^2+z^2) = \rho^4$. (D)

Le premier donne la surface des ondes extraordinaires, laquelle fait connaître par ses plans tangents la direction des rayons réfractés et celle de leurs vibrations par la projection de ces rayons sur le plan tangent correspondant.

Le second a pour axes les racines carrées de la force élastique développée par les déplacements dirigés suivant ces axes ou les vitesses des ondes correspondantes. Il a une relation intime avec celui d'Huyghens, puisque chacun des rayons vecteurs de ce dernier est égal à l'un des axes de l'ellipse obtenue en coupant l'ellipsoïde (B) par un plan perpendiculaire à ce rayon vecteur.

Les surfaces (C) et (D) ont entre elles une relation très facile à démontrer : le produit de deux rayons vecteurs ayant même direction est égal à l'unité; soient, en effet, x', y', z', ρ' les coordonnées et le rayon vecteur d'un point quelconque de l'ellipsoïde (C), et x, y, z, ρ les coordonnées et le rayon du point de la surface (D) situé sur la même ligne, de telle sorte que l'on ait :

$$\frac{x'}{\rho'} = \frac{x}{\rho} \qquad \frac{y'}{\rho'} = \frac{y}{\rho} \qquad \frac{z'}{\rho'} = \frac{z}{\rho}.$$

On peut écrire ainsi les deux équations (C) et (D) :

$$\frac{x'^2}{\rho'^2 V_o^2} + \frac{y'^2+z'^2}{\rho'^2 V_e^2} = \frac{1}{\rho'^2 V_o^2 V_e^2}$$

$$\frac{x^2}{\rho^2 V_o^2} + \frac{y^2+z^2}{\rho^2 V_e^2} = \frac{\rho^2}{V_o^2 V_e^2}$$

Les premiers membres étant égaux, on a : $\rho\rho' = 1$.

Il résulte de cette propriété que si l'on coupe les deux surfaces par un plan quelconque, la section faite dans la surface (D) devra offrir deux axes ayant la même direction que ceux de l'ellipse déterminée par le même plan sécant dans l'ellipsoïde (C), le plus petit de l'une correspondant au plus grand de l'autre et *vice versâ;* de sorte qu'on peut déduire de la considération seule de l'ellipsoïde (C) les conséquences auxquelles conduirait l'étude de la surface d'élasticité (D). En un mot, les trois ellipsoïdes (A), (B), (C) suffisent pour l'étude du phénomène. La surface (D) s'introduit d'elle-même dans cette étude, parce que chacun de ses rayons vecteurs fait connaître la vitesse de propagation de l'ébranlement ayant la même direction; mais comme cette vitesse est égale à l'unité divisée par le rayon vecteur correspondant de l'ellipsoïde (C), cette dernière surface suffit pour la déterminer. Elle permet, en outre, de fixer plus aisément la direction des vibrations qui peuvent se propager sans interférence dans une onde plane et d'orientation donnée : ces directions sont celles des axes de l'ellipse que le plan de l'onde détermine dans l'ellipsoïde (C).

Les deux ellipsoïdes (B) et (C) sont réciproques l'un de l'autre, ce qui établit entre eux des relations qu'il serait trop long de développer ici, mais qu'il est nécessaire d'indiquer. L'ellipsoïde (C) établit ainsi la liaison entre la surface d'élasticité et celle des ondes.

28. La vérification des lois de la double réfraction dans les cristaux à un seul axe a été faite avec beaucoup de soin par Malus, dont les expériences sur le spath ont été très nombreuses. Le procédé dont il s'est servi pouvait donner, dans ce cas, des résultats suffisamment exacts, et son Mémoire renferme, en effet, une vérification complète de la loi d'Huyghens, quoique ses expériences ne se rapportent qu'à des sections particulières du cristal. Ce procédé aurait été insuffisant pour les autres substances bi-réfringentes dont la double réfraction est peu énergique, et il s'est contenté de déterminer les valeurs des indices ordinaire et extraordinaire. Quoiqu'il les eût mesurés sur des échantillons appartenant à des cristaux à deux axes, tels que l'arragonite, le sulfate de baryte, il ne reconnut pas la variation des deux indices, et supposa, du reste avec tous les physiciens de son époque, que la loi d'Huyghens était applicable à cette classe de corps. Fresnel, quelques années plus tard, découvrit l'erreur, et vérifia, par des expériences faites sur

la topaze, que la loi de la double réfraction était autre qu'on ne l'avait supposé. Les propriétés de la lumière polarisée permettent aujourd'hui de décider rapidement, et sans être obligé de recourir à des mesures, dans quelle classe doit être rangée une substance bi-réfringente.

La découverte des raies du spectre a permis d'apporter une plus grande précision dans la mesure des indices, et plusieurs physiciens les ont déterminés pour quelques cristaux et les principales raies. Il ne serait pas sans intérêt de reprendre par le même procédé la vérification de la loi d'Huyghens, laquelle pourrait être faite ainsi avec une grande exactitude.

La vitesse de la lumière dans le vide étant prise pour unité, les valeurs de V_o et V_e, rapportées à la raie D, sont :

Pour le quartz, cristal positif...	$V_o = 0{,}648$	$V_e = 0{,}644$.
Pour le spath, cristal négatif...	$V_o = 0{,}603$	$V_e = 0{,}673$.

29. Indiquons, en terminant, quelques règles pratiques qui permettent de reconnaître les cristaux uni-axes et leur signe.

Si le cristal est taillé en prisme, ayant les arêtes parallèles à l'axe, une mire, vue au travers, donne deux images, dont l'ordinaire est facile à reconnaître, puisqu'elle est polarisée parallèlement aux arêtes. Lorsqu'elle est plus déviée que l'extraordinaire, le cristal est négatif : il est positif dans le cas contraire.

Le plus souvent, la lame est à faces parallèles; il peut alors se présenter plusieurs cas.

Lorsque la lame est parallèle à l'axe, exposée à la lumière polarisée parallèle, sur la plate-forme de l'appareil de Norremberg, par exemple, elle offre une teinte uniforme, qui est la plus vive quand son axe est à 45° du plan de polarisation. Si on superpose à la lame un mica quart d'onde, avec son axe parallèle à celui de la lame, la teinte descend, si la lame est positive, comme le mica; elle remonte dans le cas contraire.

On peut, par ce moyen, découvrir le signe du mica, en se servant d'une lame de quartz, dont le signe peut être reconnu aisément avec un prisme de la même substance.

Lorsqu'elle est perpendiculaire à l'axe, si on l'expose à la lumière polarisée convergente, elle offre, vue à travers un analyseur, des

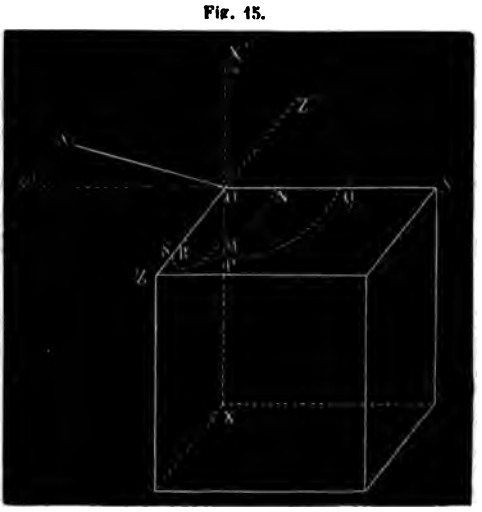
anneaux circulaires, traversés par une croix noire ou blanche. Pour que la croix apparaisse, il est nécessaire, si le cristal jouit du pouvoir rotatoire, que son épaisseur ne dépasse pas certaines limites. Supposons le cas de la croix noire. Si on interpose un mica quart d'onde à 45° de l'analyseur, immédiatement avant ou après la lame cristallisée, la croix noire se divise en deux branches d'hyperbole, réduites dans la plupart des cas à leurs sommets, représentés par deux taches. La ligne qui les joint est perpendiculaire à l'axe du mica dans les cristaux positifs; parallèle, au contraire, à ce même axe dans les négatifs. De plus, les anneaux se disloquent; ils se dilatent dans le sens de l'axe du mica et se contractent dans le sens perpendiculaire, si le cristal est négatif. L'inverse a lieu pour les cristaux positifs.

Si la lame est oblique à l'axe, on peut, en l'inclinant convenablement sur le faisceau polarisé convergent, arriver à obtenir les anneaux, et il ne reste plus qu'à appliquer le même caractère.

Les considérations dont nous nous sommes servis sont applicables aux cristaux bi-axes, et permettent de comprendre quelques-unes des particularités qu'offre la double réfraction dans cette classe de corps.

Dans cette classe de substances, il existe *(fig. 15)* trois direc-

Fig. 15.



tions OX, OY, OZ, perpendiculaires entre elles, dont chacune jouit de propriétés semblables à celles de l'axe, et des directions perpendiculaires dans les cristaux uni-axes. Si les molécules sont ébranlées parallèlement à OX, le mouvement se propagera circulairement autour de cette ligne, et dans une direction perpendiculaire avec la vitesse constante a.

Il en sera de même pour les ébranlements parallèles à OY et à OZ, qui se propageront avec des vitesses égales respectivement à b et c.

Dans toutes les autres directions, la force élastique développée par le déplacement des molécules ne sera pas dirigée suivant le sens de l'ébranlement, et pourra, comme nous l'avons vu (paragraphe 7), être décomposée en deux, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction considérée. L'équation de la surface des ondes s'obtient en suivant une marche analogue à celle que nous avons suivie pour reconnaître la forme de l'intersection de cette surface, dans le cas des cristaux uni-axes, par un plan mené par l'axe. Ces calculs sont plus longs et plus compliqués, parce qu'au lieu d'une tangente à une courbe, on doit considérer un plan tangent à une surface. Mais si l'on se borne à examiner ce qui arrive dans les trois plans coordonnés, il est facile, en s'appuyant sur les considérations déjà exposées, de reconnaître la forme des courbes d'intersections de la surface des ondes par ces plans.

On peut, sans nuire en rien à la généralité de la question, admettre $a > b > c$.

31. Concevons le cristal taillé sous la forme d'un parallélipipède rectangle dont les arêtes *(fig. 15)* soient parallèles aux trois axes OX, OY, OZ. Supposons, en premier lieu, que le plan d'incidence soit parallèle à XOY, le rayon incident ayant, pour fixer les idées, la direction OA. Si les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence, c'est à dire parallèles à l'axe OZ, la vitesse de propagation de l'ébranlement sera indépendante de l'angle d'incidence et toujours égale à c. Le rayon réfracté suivra donc la loi de Descartes, et l'intersection de la surface des ondes par le plan XOY devra être, dans ce cas, une circonférence décrite du point O comme centre avec c pour rayon (arc MN).

Si les vibrations toujours perpendiculaires à OA sont dirigées dans le plan d'incidence, elles seront obliques à OX. Nous rentrons

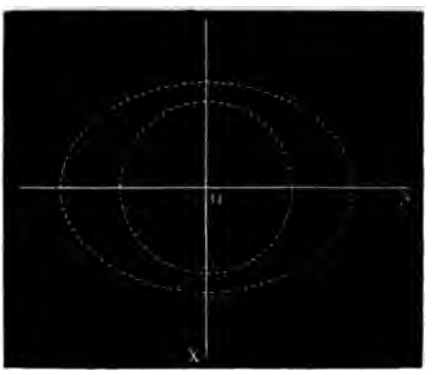
alors dans le cas déjà traité paragraphe 7, et nous trouverions de même, pour la courbe d'intersection de la surface des ondes par XOY, l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 ,$$

dont un quadrant est représenté par PQ *(fig. 15)*.

Ainsi, dans le cas général où les vibrations seront obliques au plan d'incidence, on aura le cercle et l'ellipse pour les courbes d'intersections de la surface des ondes par le plan XOY *(fig. 16)*.

FIG. 16.



32. Si le plan d'incidence est parallèle au plan XOZ, on reconnaîtra sans difficulté que les courbes d'intersection doivent être un cercle, de rayon b, pour les vibrations parallèles à OY, et une ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 ,$$

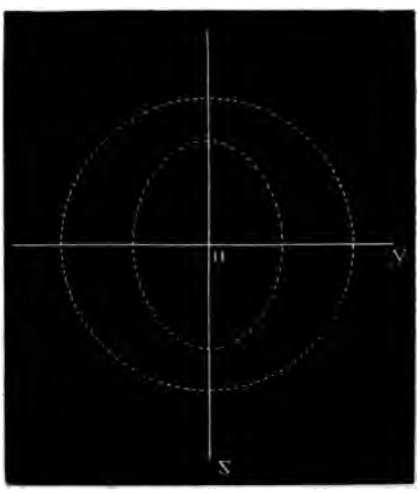
représentés *(fig. 15)* : le premier, par l'arc PR; la seconde, par le quadrant MS, et en totalité sur la figure 17.

33. Enfin, si le plan d'incidence est parallèle au plan YOZ, on verrait de même que les deux courbes d'intersection doivent être le cercle de rayon a pour les vibrations parallèles à OX, et l'ellipse

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad \text{(fig. 18)}.$$

(Pour ne pas compliquer la figure 15, on n'y a pas tracé ces deux dernières courbes.)

Fig. 18.

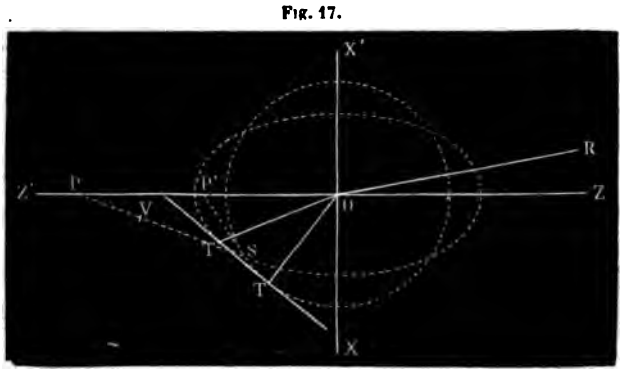


L'équation générale de la surface des ondes donnée par Fresnel reproduit, en effet, ces diverses courbes; cette équation est :

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(a^2+c^2)y^2 -c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2 = 0 .$$

34. Lorsque le plan d'incidence est perpendiculaire à l'axe moyen OY, les courbes sont un cercle et une ellipse qui se coupent *(fig. 17)*. On peut, dans ce cas, leur mener une tangente

Fig. 17.

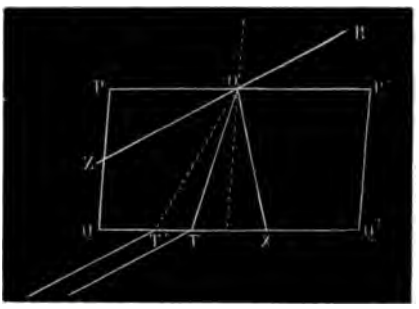


commune TT′, qui coupe ZZ′ en un point V, et dont la normale OT fait, avec l'axe OX, l'angle TOX = α.

Or, si un rayon OR, venant de l'extérieur, tombe sous l'incidence θ déterminée par l'équation $\sin\theta = \frac{1}{OV}$, le rayon réfracté devra se diviser en deux, OT, OT′; mais un calcul que nous ne pouvons reproduire ici démontre que le plan tangent à la surface des ondes, mené suivant TT′, la touche suivant une circonférence dont TT′ est le diamètre. Le rayon incident OR devra donc, à son entrée dans le cristal, s'épanouir suivant un cône TOT′; arrivé à l'autre surface du cristal, les rayons réfractés dont se compose le cône devront suivre des directions parallèles entre elles, et donner naissance à un cylindre lumineux dont l'intérieur sera obscur.

Le cristal est ordinairement à faces parallèles; mais il n'est pas nécessaire pour la vérification du phénomène qu'elles soient perpendiculaires à l'axe OX; il suffit qu'elles soient parallèles à l'axe moyen OY, le cristal étant taillé de manière à offrir deux faces, PP′, QQ′, parallèles entre elles *(fig. 19)* et satisfaisant à cette

Fig. 19.



condition; si le plan d'incidence coïncide avec celui des deux axes OX, OZ, il sera facile de trouver un rayon incident OR, dont l'un des réfractés fera, avec l'axe OX, l'angle TOX = α; c'est celui qui donne naissance au cône intérieur TOT′ : les divers rayons qui le composent reprendront à leur sortie des directions parallèles à OR et fourniront un cylindre à enveloppe lumineuse.

35. Cette réfraction multiple, qui a reçu le nom de *réfraction conique intérieure,* est l'un des phénomènes les plus curieux de l'optique, et il est aisé de déterminer l'angle TOX = α, d'où dépend l'incidence sous laquelle il doit se produire.

Appelons x', z', x'', z'' les coordonnées des points de contacts de la tangente commune au cercle et à l'ellipse *(fig. 15)*. Les deux tangentes auront pour équation :

$$x - z' = -\frac{x'}{z'}(x - x')$$

$$z - z'' = -\frac{a^2}{c^2}\frac{x''}{z''}(x - x'')$$

et pour qu'elles coïncident, on devra écrire :

$$\frac{x'}{z'} = \frac{a^2}{c^2}\frac{x''}{z''} \tag{1}$$

$$z' + \frac{x'^2}{z'} = z'' + \frac{a^2 x''^2}{c^2 z''} \tag{2}$$

on a de plus :

$$x'^2 + z'^2 = b^2 \tag{3}$$

$$\frac{x''^2}{c^2} + \frac{z''^2}{a^2} = 1. \tag{4}$$

Des trois dernières, on déduit :

$$\frac{b^2}{z'} = \frac{a^2}{z''}$$

laquelle, combinée avec la première, donne :

$$\frac{b^2}{x'} = \frac{c^2}{x''};$$

par suite (4) devient :

$$\frac{x'^2 c^2}{b^4} + \frac{z'^2 a^2}{b^4} = 1;$$

celle-ci, avec (3), donne :

$$\frac{c^2 x'^2}{b^4} + \frac{a^2}{b^4}(b^2 - x'^2) = 1,$$

d'où

$$x' = b\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}}$$

et

$$z' = b\sqrt{\frac{(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2}}$$

et enfin

$$\text{tang}\alpha = \frac{z'}{x'} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$$

Si l'on pose $T'OX = \beta$, on trouve sans difficulté :

$$\text{tang}\beta = \frac{a^2}{c^2}\,\text{tang}\,\alpha.$$

36. Le point S d'intersection du cercle et de l'ellipse *(fig. 17)* jouit aussi d'une propriété remarquable. Parmi les rayons incidents dans le plan ZOX, il y en a deux qui fourniront un réfracté dirigé suivant OS ; leurs incidences ψ, ψ' seront déterminés par la condition $\sin\psi = \frac{1}{OP}$, $\sin\psi' = \frac{1}{OP'}$. Mais le point S jouit de la propriété que les diverses tangentes à la surface pour lesquelles il se trouve être le point de contact forment un cône ; de sorte que, si l'on mène par la normale XOX' une infinité de plans, on pourra dans chacun d'eux tracer deux rayons incidents dont les réfractés se confondront avec OS. Finalement, il existe un cône de rayons incidents qui donneront naissance à un seul réfracté, et celui-ci, à la sortie du cristal, devra fournir également un cône de rayons émergents parallèles aux arêtes du cône incident, si la lame est à faces parallèles.

Ce phénomène est celui de la *réfraction conique extérieure.*

La direction de la droite OS peut être déterminée aisément.

On a $\text{tang SOX} = \frac{z}{x}$, z et x étant les coordonnées du point S commun aux deux courbes:

$$x^2 + z^2 = b^2$$
$$\frac{x}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1,$$

on obtient sans difficulté :

$$z = a\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

$$x = c\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$$

$$\text{tang SOX} = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = \frac{a}{c}\,\text{tang}\,\alpha.$$

L'angle des deux axes peut être mesuré aisément à l'aide de l'appareil construit par M. Soleil.

La bissectrice de l'angle aigu de ces axes peut coïncider soit avec l'axe OX, soit avec l'axe OZ; et de là résulte la division naturelle de ces cristaux en deux classes. Lorsque la bissectrice coïncide avec l'axe OX, c'est à dire avec celui de plus grande élasticité, le cristal est dit *négatif,* par analogie avec ce qui arrive dans les uni-axes (paragraphe 5); si elle coïncide avec l'axe de plus petite élasticité OZ, le cristal est dit, au contraire, *positif.* On peut reconnaître le signe d'un bi-axe par des expériences analogues à celles que nous avons indiquées pour les uni-axes (paragraphe 29).

SUR LA MORT

DANS L'EAU DOUCE

DES POISSONS DE MER

DEUXIÈME NOTE (1)

PAR LE Dr PAUL BERT

ancien Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, Professeur suppléant au Muséum d'histoire naturelle de Paris.

Les expériences que j'ai rapportées dans ma première Note démontrent que la mort des poissons de mer immergés dans l'eau douce est due, en partie, à la diminution de la densité du liquide. « Très probablement, disais-je, la différence des densités agit surtout en raison de la différence des pouvoirs osmotiques, avec laquelle elle est en rapport. »

Mais le pouvoir osmotique d'un liquide est en rapport, non seulement avec sa densité, mais, comme chacun sait, avec sa composition chimique. Or, l'eau de mer est un liquide très complexe, contenant plusieurs sels qui manquent à l'eau douce : il était intéressant de chercher comment agiraient des modifications portant seulement sur la densité seule de ces liquides et sur la quantité absolue de ses matériaux salins, non sur leur nature ou leur proportion relative.

Les expériences ont été faites avec de jeunes hippocampes, âgés de cinq ou six jours : 1° Trois de ces animaux ont été mis dans l'eau distillée préalablement bien aérée; 2° trois dans l'eau douce (l'eau dite *blanche* à Arcachon); 3° trois dans l'eau de mer, qui, la veille, avait été maintenue en ébullition jusqu'à ce que sa

(1) Voir *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1866, p. 47, — et *Notes d'Anatomie et de Physiologie comparées*, 1re série, 1867, p. 7.

densité surpassât la densité de l'eau de mer autant que celle-ci surpassait celle de l'eau douce n° 2; cette eau avait ensuite été agitée et laissée vingt-quatre heures au contact de l'air; 4° trois dans l'eau de mer ramenée par l'addition d'eau distillée à la densité de l'eau douce n° 2; 5° trois dans l'eau de mer ordinaire (comme *témoins*). J'ai à peine besoin d'ajouter que toutes les autres conditions (capacité des vases, etc.) étaient égales pour tous les animaux en expérience.

Les poissons des n^{os} 1 et 2, c'est à dire de l'eau distillée et de l'eau douce, sont morts sensiblement dans le même temps (maximum une heure); ceux du n° 3 ont vécu bien plus longtemps (maximum cinq heures); enfin, ceux des n^{os} 4 et 5 étaient encore vivants vingt-huit heures après le début de l'expérience.

Il résulte d'abord de ces faits que les poissons d'eau de mer redoutent beaucoup plus l'augmentation de la densité du liquide dans lequel ils sont plongés que la diminution de cette densité : étant supposé, bien entendu, que la valeur de l'augmentation est égale à celle de la diminution.

Mais nous en tirerons encore une conséquence bien plus importante : Si les poissons de mer immergés dans l'eau douce y périssent rapidement, ce n'est pas à cause de la moindre densité de ce liquide, en tant que densité; c'est à cause de la composition chimique différente du liquide, laquelle est nécessairement liée à une certaine différence dans son pouvoir osmotique, et, par suite, dans la perméabilité des membranes respiratoires. Nous arrivons donc, par une autre voie, à la conclusion déjà énoncée dans ma première Note; il n'y a rien d'étonnant à ce qu'en augmentant, à l'aide d'un peu de sucre, le pouvoir osmotique de l'eau douce, j'aie pu me rapprocher des conditions physiques présentées par l'eau de mer, et conserver un peu plus longtemps mes poissons vivants.

Si, au lieu d'employer le sucre, on emploie le sel marin, on arrive à des résultats bien plus favorables encore, comme, du reste, on le sait depuis longtemps. De jeunes hippocampes semblables à ceux dont il vient d'être question, placés dans l'eau distillée ramenée à la densité de l'eau de mer par l'addition de chlorure de sodium, vivent dans cette solution plus longtemps que dans l'eau douce (maximum six heures).

Le sel marin est donc une des causes importantes de la propriété que nous étudions dans ce moment; mais les autres substances contenues dans l'eau de mer agissent évidemment dans le même sens, et ne peuvent pas être, sans danger pour l'animal en expérience, supprimées ou remplacées par le chlorure de sodium.

Je n'ai parlé jusqu'ici que de l'action de l'eau douce sur les membranes respiratoires, parce que cette action est la seule qui puisse expliquer la mort rapide des poissons recouverts d'écailles, ou surtout des poissons cuirassés, comme les hippocampes. Ainsi, quand ces animaux ont perdu tout mouvement volontaire, quand ils sont considérés, et doivent l'être, comme morts, ils possèdent encore et la contractilité musculaire et l'excitabilité nerveuse, et même, pendant un temps, ils présentent encore les phénomènes réflexes.

Mais si on met en expérience des animaux dont la peau non protégée peut être comparée à une muqueuse, on obtient des résultats différents. D'abord, la mort est beaucoup plus rapide. Ainsi, un Amphioxus immergé dans l'eau douce est presque aussitôt pris de convulsions violentes, et, après trois ou quatre minutes, devient immobile et tombe au fond du vase. Il est alors raide, dur; les muscles des cirrhes buccaux sont fortement contractés; sa peau et bientôt les tissus sous-jacents perdent leur transparence et deviennent opaques, effet que l'eau douce produit sur un grand nombre de substances albuminoïdes. Dans cet état, il est ou insensible ou incapable de manifester sa sensibilité, bien qu'il ait conservé sa contractilité musculaire, diminuée déjà. Le laisse-t-on dans l'eau douce quelques minutes encore, cette contractilité elle-même est détruite, et le mouvement des cils vibratiles intestinaux est la dernière manifestation vitale que présente l'animal. Ainsi, chez lui, la différence de pouvoir osmotique du liquide ambiant a agi sur toute la superficie du corps, et ses effets ont graduellement supprimé les propriétés vitales des éléments anatomiques nerveux et musculaires. Du reste, cette perte n'est pas définitive. Si l'on n'attend pas trop longtemps (de dix à quinze minutes) et qu'on replonge l'animal dans son élément naturel, on le voit redevenir peu à peu transparent, se ramollir, et exécuter, quand on l'excite, des mouvements réflexes.

Une seiche nous présenterait des phénomènes analogues, et la

noirceur de sa peau, due à la rigidité des muscles dilatateurs de ses cellules chromatophores, témoignerait, immédiatement après l'immersion, de l'exosmose dont ceux-ci sont le siége.

Tous les faits que nous avons jusqu'ici constatés concordent donc pour nous faire admettre que la mort des animaux marins immergés dans l'eau douce est la conséquence de l'action exosmotique de ce liquide. Si l'animal n'a point, pour protéger ses tissus, quelque cuirasse cutanée, ceux-ci souffrent directement; l'immobilité et la mort surviennent rapidement. Dans le cas contraire, ces phénomènes ne sont que secondaires, et résultent de l'asphyxie consécutive à l'altération des membranes respiratoires.

Il reste à voir maintenant en quoi consiste cette altération; il nous faut, en outre, chercher à expliquer comment, chez certains poissons (anguilles, saumons, mulles...), la modification apportée dans les actes respiratoires se fait assez lentement pour que la mort n'en soit point la conséquence. D'autres questions, qu'il serait oiseux d'énoncer ici, devront encore être étudiées, et peut-être de leur étude résultera-t-il quelque explication de l'action spéciale incontestable dans ses effets, inconnue dans sa cause, que les bains de mer et, en général, les bains minéraux exercent sur l'organisme de l'homme.

Les expériences ci-dessus rapportées ont été faites dans le laboratoire de la Société scientifique d'Arcachon.

Paris, 1er Décembre 1867.

LA

SCIENCE ABSOLUE DE L'ESPACE

PAR J. BOLYAI

PRÉCÉDÉ D'UNE

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE W. ET DE J. BOLYAI

PAR M. Fr. SCHMIDT

NOTE DU TRADUCTEUR.

Depuis que la publication de la Correspondance de Gauss avec Schumacher a exhumé les idées du grand géomètre sur la théorie des parallèles, le nom de Bolyai est devenu inséparable de ces profondes découvertes. C'était donc un devoir pour la science européenne d'arracher à un injuste oubli la mémoire des deux hommes qui ont illustré ce nom.

L'auteur de la Notice dont nous publions la traduction, M. Fr. Schmidt, s'est consacré à cette œuvre de réparation avec un dévouement infatigable, que n'ont rebuté ni la lenteur des communications entre les diverses parties de l'empire hongrois, ni la difficulté de se procurer, dans la patrie même de Bolyai, les détails nécessaires sur les deux hommes qui l'ont rendue célèbre.

C'est encore au savant architecte de Temesvár que nous devons la possession du rarissime opuscule de J. Bolyai, que nous avons reproduit à la suite de la Notice sur l'auteur, certain qu'il ne manquera pas d'exciter l'intérêt de tous ceux qui aiment vraiment la science.

Par cette publication, la Société des Sciences physiques et naturelles continue l'œuvre qu'elle a commencée en insérant dans son

précédent volume les recherches de Lobatschewsky sur le même sujet.

Puisse cet hommage rendu au géomètre hongrois décider ses compatriotes à tirer de ses papiers, déposés au Collége de Maros Vásárhely, les remarquables travaux qu'ils doivent renfermer, et dont nous ne connaissons encore que les titres !

J. H.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DES DEUX MATHÉMATICIENS HONGROIS

WOLFGANG ET JOHANN BOLYAI DE BOLYA

PAR M. FRANZ SCHMIDT,

ARCHITECTE A TEMESVÁR.

L'esquisse biographique que je vais tracer est encore fort incomplète; mais comme il n'y a guère lieu de s'attendre à voir paraître prochainement une histoire détaillée des deux hommes éminents auxquels sont consacrées ces pages, je me suis décidé à publier les documents que j'ai pu rassembler, d'après les renseignements imprimés, oraux ou manuscrits que j'ai pu me procurer, dans l'espoir que les personnes qui sont à même de fournir des informations plus nombreuses ou plus précises seront engagées par cet essai à les livrer bientôt à la publicité.

Ces deux hommes, le père et le fils, après avoir consacré leur puissante intelligence à une science bien peu cultivée dans leur patrie, vivant à l'extrémité de la Transylvanie, dans une contrée magnifique, mais où le commerce des livres n'a point encore pénétré, se sont trouvés hors d'état de propager et de faire apprécier leurs découvertes, qui maintenant, longtemps après leur mort, attirent de plus en plus l'attention des hommes de science chez toutes les nations cultivées de l'Europe. Les noms de Gauss, de Gerling, de Baltzer, de Grunert en Allemagne, de Hoüel, de Battaglini, de Forti en France et en Italie, sont garants que les travaux des Bolyai ne tomberont pas dans l'oubli; et, j'en ai la conviction, la prédiction de Baltzer, que le nom de Bolyai sera un jour prononcé avec respect, est déjà accomplie.

I.

Wolfgang Bolyai de Bolya (en hongrois, *Bolyai Farkas*) (1) naquit le 9 février 1775 à Bolya, dans la partie de la Transylvanie dite le Pays des Sicules *(Székelyföld)*. Dès sa jeunesse, ayant longtemps souffert d'une maladie des yeux, il donna des preuves d'une mémoire extraordinaire, en récitant sans faute des pages entières après une seule lecture. Il fit ses premières études à Enyed, et plus tard, à Klausenburg. Pour compléter son instruction, il partit pour l'Allemagne avec un fils du baron Simon Kemény, se rendit en 1797, d'abord à Iéna, puis à Gœttingue, où Bolyai se consacra aux sciences philosophico-mathématiques. Malheureusement, les deux amis étaient encore si peu versés dans la science de l'économie domestique, que, Kemény étant allé chercher dans son pays de nouveaux moyens de subsistance, le pauvre Bolyai dut rester pour gage, en attendant son retour.

Bolyai fit à Gœttingue la connaissance de Gauss, et se lia avec lui d'une amitié qui dura toute la vie de ces deux hommes, et qui fut la consolation des mauvais jours de privations et d'amertumes, au milieu desquels s'écoula la longue existence du savant hongrois. Les lettres de Gauss à son ami ont été envoyées par celui-ci, en 1855, au professeur Sartorius von Waltershausen, qui travaillait alors à sa Biographie de Gauss (2). Il est bien à souhaiter que cette correspondance si intéressante soit bientôt publiée.

Cette liaison avec Gauss ne contribua pas peu aux progrès de Bolyai dans les mathématiques. Gauss avait une haute estime pour la science de Bolyai, et fondait sur lui de grandes espérances.

Bolyai, dit Sartorius von Waltershausen (3), est un esprit hors ligne, dont Gauss a dit, il y a longtemps, que c'était le seul homme qui eût complètement saisi ses vues métaphysiques sur les Mathématiques. D'après les quelques pages que nous avons de lui, c'est un penseur profond, un beau caractère; son expression originale rappelle

---

(1) Wurzbach, Biographisches Lexikon, 2e partie. Vienne, 1857.

(2) Nous devons ce renseignement au professeur Szabó, de Maros Vásárhely. *(Note du Trad.)*

(3) *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856, p. 17,

souvent le style de Jean Paul. Confiné dans un coin écarté de la terre, isolé de toute âme à la hauteur de la sienne; naguère encore (1849), dans ses vieux jours, au milieu du tumulte d'une révolution dévastatrice, entouré du carnage et des horreurs de la guerre civile, réduit à quelques débris de sa modeste fortune, mais fort du noble calme d'une conscience pure, il jette, au delà du spectacle déchirant des souffrances que s'impose la folie humaine, un regard d'espoir sur les vagues de l'éternité; il se plaint seulement de n'avoir jamais eu le bonheur de pouvoir se frayer à lui-même son chemin, tout ayant presque toujours tourné contre lui. « Cependant, » dit-il dans une lettre, « je me croirai les mêmes droits qu'à mes pareils, les autres » vermisseaux, jusqu'à ce que bientôt, réconcilié avec mon sort, » j'aille trouver le repos dans une tombe ignorée. »

Benzenberg aussi, dans une lettre écrite à Gauss, en 1801, exprime son opinion sur Bolyai, en disant que c'est un des hommes les plus extraordinaires qu'il ait jamais rencontrés.

Un des jeunes amis de Gauss, Ide, de Brunswick, écrivait à ce dernier, le 23 mai 1799 : « Bolyai assistera sûrement à la fête du Tir qui aura bientôt lieu ici, mais seulement en philosophe, pour y trouver matière à réflexions sur les folies humaines. C'est là sa maxime, comme je l'ai reconnu dans mainte occasion. Il ne manque pas à une seule de ces assemblées mondaines, non certes pour s'amuser avec les autres, mais pour y raffermir la sérénité de son âme. »

Après la mort de Gauss (1855), le roi de Hanovre fit envoyer à Bolyai la grande médaille d'argent et de bronze, frappée à la mémoire de l'illustre géomètre. Les savants de Gœttingue restèrent jusqu'à la fin en correspondance suivie avec Bolyai, et le tinrent au courant de tout ce qui s'était produit dans le monde scientifique depuis la mort de son ami.

II.

De retour dans son pays, en 1802, Bolyai fut nommé professeur de mathématiques, de physique et de chimie au Collége Réformé de Maros-Vásárhely. Dans cette chaire, qu'il a occupée pendant près d'un demi-siècle, il a eu pour élèves la plupart des professeurs actuels de la Transylvanie, et une grande partie de la noblesse du pays.

Outre les devoirs de sa place, qu'il a toujours remplis avec une conscience scrupuleuse et un zèle soutenu, Bolyai, dans les premières années de son professorat, s'occupa aussi de poésie. Il a laissé cinq tragédies en prose, imprimées en langue hongroise, sans nom d'auteur, en 1817, et dont voici les titres : 1° *Pausanias;* 2° *Mahomet;* 3° *Simon Kemény;* 4° *le Triomphe de la Vertu sur l'Amour;* 5° *la Victoire de l'Amour sur la Vertu.* Les premières de ces pièces ont, à ce qu'il paraît, un vrai mérite poétique. Plus tard (1818) parut *le Procès de Paris,* drame en cinq actes. En 1819, il traduisit en hongrois l'*Essay on Man,* de Pope, et le publia précédé de la traduction d'un choix de poésies anglaises et allemandes. La tournure poétique de son esprit et la vivacité extraordinaire de son imagination se montrent de la manière la plus frappante jusque dans ses ouvrages mathématiques.

Dans la suite, son ardeur créatrice se tourna vers la musique, et le violon, son instrument favori, l'aida à exprimer en mélodies ses sentiments et ses pensées. Rien de tout cela ne lui fit négliger la science, et l'activité de sa plume se consacra presque entièrement aux études mathématiques. Les ouvrages de Bolyai ont paru successivement dans l'ordre suivant, tous sans nom d'auteur :

(a) *Az arithmetica eleje (az elő-szóban irt módón) B. B. F. Mathesist és Physicát tanitó által. Maros-Vásárhelyt, 1830. Nyomtatott a reformat Kollégyom betüivel Felső Visti Kali Josef által.* « Éléments d'Arithmétique (d'après les principes indiqués » dans la Préface), par le Professeur de Mathématiques et de Phy» sique. Maros-Vásárhely, 1830. Imprimé avec les caractères du » Collége Réformé, par Joseph Kali de Felsó Vist. » In-8°, avec une préface de XVIII pages, 1 page d'*errata*, 162 pages de texte, et un tableau représentant l'Arbre de la Science. — Cet ouvrage est complètement épuisé. L'exemplaire de la bibliothèque du Collége Réformé est enrichi de remarques de Johann Bolyai. Ce Traité de Mathématiques, qui devait se composer de cinq parties, a été, comme la plupart des livres de Bolyai, publié par voie de souscription; mais, comme cela arrive d'ordinaire, les souscripteurs avaient plus promis que tenu. Voici le contenu du premier volume :

Introduction, explication des signes, égalité, parties, nombre, espace. Division de l'Arithmétique en *pure* et *appliquée*. Addition, soustraction. Définition du positif et du négatif, avec de nombreux

exemples et des représentations graphiques. Limites. Fractions. Multiplication et division; proportions géométriques. Puissances, racines, logarithmes. Introduction au Calcul différentiel, au Calcul intégral et au Calcul de variations, avec des notations particulières à l'auteur, telles que

$$\sin x = \textcircled{S}x, \quad \cos x = \textcircled{\S}x, \quad \operatorname{tang} x = \textcircled{t}x,$$
$$\sin \operatorname{verse} x = \textcircled{\sim}x, \quad \cos \operatorname{verse} x = \textcircled{\sim}x, \quad \operatorname{cotang} x = \textcircled{T}x,$$
$$\operatorname{séc} x = \textcircled{\S}x, \quad \operatorname{cosséc} x = \textcircled{\int}x, \quad \operatorname{arc\,sin} x = \textcircled{a\,s}x,$$
$$\log \operatorname{vulg} x = \textcircled{l}x, \quad \log \operatorname{nat} x = \textcircled{L}x, \quad f(x) = \textcircled{\square}x,$$
$$d^n f(x,y,\ldots) = {}^n\textcircled{\square}xy\ldots, \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \overset{n}{\textcircled{\square}}x, \quad \sqrt{-1} = \mathfrak{i}.$$

Les souscripteurs n'ayant pas rempli leurs engagements, les quatre parties de l'ouvrage qui restaient à publier n'ont pu, malheureusement, paraître.

(**b**) *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiæque publico ordinario. Tomus primus. Maros-Vásárhelyini, 1832. Typis Collegii Reformatorum, per Josephum et Simeonem Kali de Felsó Vist.* — In-8, 4 planches en taille-douce.

(**c**) *Tentamen juventutem,* etc. *Tomus secundus. Ibidem,* 1833. In-8, 10 planches.

Ces deux volumes (**b**) et (**c**) ont été encore publiés par souscription. Ils forment l'œuvre principale de W. Bolyai, à laquelle l'auteur renvoie constamment dans ses écrits postérieurs. Le PREMIER VOLUME contient :

Préface de deux pages : *Lectori salutem.* Un tableau in-folio *(Explicatio Signorum. Arbor arithmeticæ geometriæque corradicata coronisque confluentibus. Ordo quo geometria tractabitur primo in plano; secundo, redeundo e plano in abyssum spatii). Index rerum* (I-XXXII). *Errata* (XXXIII-LXXIV). *Errores recentius detecti* (LXXV-XCVIII). Vient ensuite le texte (p. 1-502), Puis, avec une pagination spéciale et un faux-titre, l'Appendice composé par

Johann Bolyai, fils de Wolfgang : APPENDIX *scientiam spatii absolute veram exhibens : a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore* JOANNE BOLYAI *de eadem, Geometrarum in Exercitu Cæsareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.* 26 pages de texte, 2 pages d'*errata*. — Enfin (pages I-XVI), en langue hongroise, les noms des souscripteurs, la nomenclature mathématique, et des additions à ce volume, par W. Bolyai. Des quatre planches de figures, les trois premières se rapportent au corps du texte, la dernière à l'*Appendix*.

Voici un aperçu des matières traitées dans ce premier volume : Division de l'ensemble des sciences. Introduction. — *(Radix)*. Coup d'œil général sur l'arithmétique. Axiomes. Addition, soustraction, grandeurs incommensurables, limites, quantités variables, fractions, multiplication, division, proportions géométriques, règle des signes dans la multiplication et la division; interversion des facteurs, multiplication des facteurs égaux, formation des puissances, racines, logarithmes. — *(Truncus)*. Représentation des grandeurs par des temps. Addition, soustraction, multiplication, division, fractions, proportions, limites, puissances, racines, logarithmes, quantités imaginaires (traitées avec beaucoup de développement). Théorème du binôme; séries logarithmiques, leur convergence ; module des logarithmes, logarithmes imaginaires.— *(Corona)* (p. 178-442). Fonctions, leur formation; différentielle d'une fonction d'une seule variable. Éléments du calcul intégral. Différentielles partielles. Exemples tirés de la géométrie et de la mécanique. Différentielle d'une série convergente. $\frac{0}{0}$, . Quadrature des sections coniques. Rectification. Exemples tirés de la Dynamique. Cubature des corps. Différentielles des fonctions trigonométriques et circulaires. Tangentes, longueur d'un arc de courbe, sous-tangentes, normales, sous-normales, $\frac{\infty}{\infty}$. Théorème de Taylor, avec la détermination du reste; développements de $(1+x)^n$, $(1+z)^{-1}$. Théorème de Taylor pour le cas de plusieurs variables. Maxima et minima; applications géométriques. Éléments du calcul des variations. — *(Rami coronæ arboris)*. Théorie des équations. Équation $x^{17}-1=0$, sa construction géométrique. Transformation des équations. Résolution des équations numériques (d'après Newton et Lagrange). Méthode d'élimination de Bézout. Équations

indéterminées. Fractions continues; leurs applications aux équations. Démonstration de Gauss que toute équation a une racine (1).

Depuis la page 444 jusqu'à la fin : Coup d'œil général sur la géométrie (2). — Vient ensuite l'*Appendix* de Joh. Bolyai, à l'impression duquel ce dernier a contribué lui-même pour 104 florins 54 kreuzers (3). Ce Mémoire contient une exposition nouvelle et rationnelle de la Théorie des parallèles, qui se rencontre pour les résultats avec les travaux similaires faits à Kasan, vers la même époque, par Lobatschewsky (4), sans qu'aucun des deux géomètres eût connaissance des découvertes de l'autre. Gauss s'était aussi occupé de cet objet dans sa jeunesse, et depuis encore (5), mais il n'a jamais rien publié de ses recherches. Nous savons seulement qu'elles

---

(1) *Primitiæ messis ditissimæ -- quasi stella venientis solis nuncia — veteranum juvenis opus — adinstar Herculis dum serpentem infans disrupit.* (Page 425.)

(2) Cette partie traite, entre autres choses, de la définition du plan et de la ligne droite, à un point de vue analogue à celui qu'il a développé plus tard dans l'ouvrage (b), quoiqu'en partant d'un principe un peu différent. Il s'occupe ensuite de la théorie des parallèles, et, à propos des divers systèmes qui sont possibles lorsqu'on n'admet pas l'axiôme XI d'Euclide, il ajoute : « *Appendicis Auctor, rem acumine singulari aggressus, Geometriam pro omni casu absolute veram posuit, quamvis e magna mole, tantum summe necessaria, in Appendice hujus tomi exhibuerit, multis (ut tetraedri resolutione generali, pluribusque aliis disquisitionibus elegantibus) brevitatis studio omissis.* Il dit plus loin : *Nihilominus tamen quæstio suboritur : quid si novum axioma detur, per quod determinetur u* (ce que Lobatschewsky nomme l'ANGLE DE PARALLÉLISME)? *Tentamina idcirco, quæ olim feceram, breviter exponenda veniunt, ne saltem alius quis operam eamdem perdat.*

W. Bolyai parle en plusieurs endroits avec une sincère admiration du beau travail de son fils. Ainsi, il dit :

(T. I, p. 502). *Nec operæ pretium est plura referre; quum res tota ex altiori contemplationis puncto, in ima penetranti oculo, tractetur in Appendice sequente, a quovis fideli veritatis puræ alumno digna legi.*

(T. II, p. 380). *Denique aliquid Auctori Appendicis... addere fas sit : qu tamen ignoscat, si quid non acu ejus tetigerim.*

(3) *Tentamen* (T. II, p. 384),

(4) Lobatschewsky, *Geometrische Untersuchungen*, Berlin, 1840. (Voy. *Mém. de la Soc. des Sc. phys. et nat.*, T. IV, 1er cah., p. 87.)

(5) *Corresp. de Gauss et de Schumacher*, T. II, p. 261. (*Mém. de la Soc. de Sc. phys. et nat.*, T. IV, 1er cah., p. 123.)

étaient en complet accord avec celles de nos deux auteurs. Il ne s'en est pas moins écoulé près de quarante années avant que ces vues profondes fussent arrachées à l'oubli, et le Dr R. Baltzer, de Dresde, s'est acquis des titres impérissables à la reconnaissance de tous les amis de la science, en attirant, le premier, leur attention sur les travaux de Bolyai, dans la seconde édition de ses excellents *Éléments de Mathématiques* (Dresde, 1866-67). Suivant les traces de Baltzer, le professeur Hoüel, de Bordeaux, dans une récente brochure intitulée : *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire,* a donné des extraits du livre de Bolyai, qui contribueront certainement à faire rendre à ces idées nouvelles la justice qu'elles méritent. Ces extraits seront d'autant mieux accueillis que les ouvrages de Bolyai sont maintenant complètement épuisés.

Les additions à ce premier volume, celles du moins qui forment les pages LIX-XCVIII, semblent avoir été imprimées plusieurs années après le reste de l'ouvrage. Elles contiennent des études sur la convergence des séries.

Le TOME SECOND du *Tentamen* renferme : La suite de l'exposition de la Géométrie et de la Trigonométrie, les Sections coniques, la Stéréométrie et la Trigonométrie sphérique. De plus, dans un Appendice, les éléments de la Perspective, de la Gnomonique et de la Chronologie. Puis des Additions au *Tome premier* (Théorie des combinaisons, calculs d'intérêts, applications des logarithmes). Enfin une addition à l'*Appendix* du premier volume. Il existe encore quelques exemplaires de ce Tome II dans le commerce.

Lorsque le *Tentamen* tomba entre les mains de Gauss, celui-ci en devina immédiatement l'auteur.

(**d**) *Az Arithmetikának, Geometriának és Physikának eleje, a M. Vásárhelyi Kollégyom béli alsobb Tanulók számára a helybéli Professor által. Első Kötet. M. Vásárhelyen,* 1834. Éléments d'Arithmétique, de Géométrie et de Physique, pour les élèves du Gymnase élémentaire de Maros-Vásárhely, par le professeur de cet établissement. Première partie, 1834. In-8.— Préface et Table des matières (p. I-X); texte (p. 1-90). — De ce Traité, qui devait comprendre cinq parties, la première partie seulement a paru. Elle contient les mêmes matières que le volume indiqué (**a**), moins l'Introduction au calcul différentiel, au calcul intégral et au calcul

des variations. — Il en reste encore un petit nombre d'exemplaires.

(e) *A marosvásárhelyt 1829 nyomtatott Arithmetika elejének rövidített részint bővített, általán jobbitott, s tisztálltabb kiadása —A szerző által M. Vásárhelyt.* 1843. — Les Éléments d'Arithmétique imprimés à Maros-Vásárhely en 1829, en partie abrégés, en partie développés; édition revue, améliorée et corrigée par l'auteur. Maros-Vásárhely, 1843. — In-8. — Préface et Table des matières (p. I-XLIV), texte (p. 1-386), 2 planches en taille-douce. — Comme l'annonce le titre, le livre est une édition augmentée et corrigée du livre désigné par (a). Dans sa Préface, l'auteur s'exprime ainsi sur cette nouvelle édition : « Il voulait d'abord, dans sa vieillesse, » reproduire sous une forme épurée les idées auxquelles il était » parvenu dans sa jeunesse par la seule méditation : mais on ne » peut s'attendre à trouver dans l'automne des grappes sur la vigne, » si la grêle ne l'a épargnée dans l'été. En second lieu, il voulait, » comme professeur, simplifier et développer la première édition, » et du moins pouvoir remplacer l'usage du tome I du *Tentamen* » latin. Si, outre le système, il se rencontre souvent quelque chose » d'insolite, la faute en est à une longue maladie des yeux et à un » défaut de connaissances. Pendant cette maladie, l'auteur a dû se » soumettre à un genre de vie qui lui interdisait l'usage de ses » yeux; il a donc été forcé, jusqu'au rétablissement de sa vue, de » retrouver par la simple méditation toutes ses connaissances ma- » thématiques antérieures. »

Cet ouvrage n'est point une traduction littérale du *Tentamen*. Il contient seulement, avec des suppressions et des additions, la partie arithmétique de l'ouvrage latin. Par exemple, on n'y trouve plus la démonstration de Gauss, le calcul de variations, etc.; d'autre part, les caractères de convergence des séries y sont plus développés. En beaucoup d'endroits, l'auteur renvoie au *Tentamen*. — On peut encore trouver des exemplaires de cet ouvrage.

(f) *Arithmetica eleje kezdöknek.* Éléments d'arithmétique pour les commençants. — Sans titre ni date. D'après une note marginale de l'auteur, l'ouvrage semble avoir été imprimé en 1845. Il contient, en 40 pages in-8, les quatre opérations fondamentales, la règle de trois, la règle de société, les fractions décimales, les éléments du calcul littéral; addition, soustraction, puissances, racines, progressions géométriques, et applications aux calculs d'intérêt.

(g) *Ürtan elemei kezdőknek*. Éléments de la science de l'espace pour les commençants. — Également sans titre ni date. D'après une note, imprimé en 1846; 42 pages de texte, in-8. A cet opuscule appartiennent 5 planches de figures, qui n'ont jamais été imprimées. L'auteur en avait dessiné de sa main un double exemplaire. Dans son testament, il fait observer à ce sujet « que ces » figures peuvent être facilement reproduites par ceux qui en » auront besoin, puisque ce sont des enfants qui ont dessiné celles » qui existent. » Ces mots se rapportent à un troisième exemplaire, avec figures dessinées par un petit-fils de W. Bolyai (un fils de Johann). Les trois exemplaires sont la propriété du Collége Réformé de Maros Vásárhely.

Voici le contenu de l'ouvrage : Définition de l'espace, de la surface, de la ligne, du point, de la ligne droite, des parallèles (avec renvoi à l'*Appendix*); angles, triangles, leur égalité et leur similitude. Quadrilatères, leur surface; théorème de Pythagore. Cercle. Définitions de l'abscisse et de l'ordonnée. Calcul de l'aire des polygones et du cercle. Applications à la géométrie pratique : mesure des hauteurs, nivellement, calcul des surfaces. Introduction à la trigonométrie, en 4 pages, contenant les définitions du sinus, du cosinus, de la tangente, de la sécante; formules pour sin $(a \pm b)$. Puis deux pages de corrections et d'additions.

Le dernier ouvrage de W. Bolyai, le seul qu'il ait composé en langue allemande, est intitulé :

(h) *Kurzer Grundriss eines Versuchs :* I. Die Arithmetik, *durch zweckmässig construirte Begriffe, von eingebildeten und unendlich-kleinen Grössen gereinigt, anschaulich und logisch-streng darzustellen.* II. *In der* Geometrie, *die Begriffe der geraden Linie, der Ebene, des Winkels allgemein, der winkellosen Formen, und der Krummen, der verschiedenen Arten der Gleichheit u. d. gl. nicht nur scharf zu bestimmen ; sondern auch ihr Seyn im Raume zu beweisen : und da die Frage,* ob zwey von der dritten geschnittene Geraden, wenn die Summe der inneren Winkel nicht $= 2R$, sich schneiden oder nicht? *niemand auf der Erde ohne ein Axiom (wie* Euclid *das* XI) *aufzustellen, beantworten wird; die davon unabhängige Geometrie abzusondern; und eine auf die* Ja-*Antwort, andere auf das* Nein *so zu bauen, dass die Formeln der letzten, auf einen Wink auch in der ersten gültig seyen. — Nach*

einem lateinischen Werke von 1829, *M. Vásárhely, und eben daselbst gedruckten ungrischen. Maros Vásárhely,* 1851.

Courte esquisse d'un essai : I. Pour présenter l'*Arithmétique* d'une manière évidente et rigoureusement logique, en la débarrassant, à l'aide de conceptions convenables, des quantités imaginaires et des infiniment petits; II. En *Géométrie,* non seulement pour déterminer avec précision les notions de la ligne droite, du plan, de l'angle en général, des figures sans angles, des figures courbes, des différentes espèces d'égalité, etc.; mais encore pour démontrer leur existence dans l'espace; et — comme à la question de savoir « si » deux droites coupées par une troisième se coupent ou ne se cou- » pent pas lorsque la somme des angles intérieurs n'est pas égale à » 2 angles droits », personne au monde ne peut répondre sans poser un axiôme (tel que l'axiôme XI d'Euclide), — pour séparer la partie de la géométrie indépendante de cette question, et fonder une géométrie sur la réponse *affirmative,* une autre sur la réponse *négative,* de telle sorte que les formules de celle-ci puissent s'appliquer aussi immédiatement à la première. — D'après un ouvrage latin publié en 1829 à Maros-Vásárhely, et des ouvrages hongrois imprimés dans la même ville. — In-8, 88 pages de texte.

L'ouvrage donne (p. 2-42), sous une forme condensée, les principales définitions de l'Arithmétique, y compris le calcul différentiel et intégral, d'après le même système d'exposition que dans le *Tentamen.* — Page 43 : « Des principes de la Géométrie (autant » qu'on peut les exposer brièvement et sans figures). » L'auteur fait mention du travail déjà cité de Nic. Lobatschewsky (Berlin, 1840), et le compare avec celui de Johann Bolyai, au sujet duquel il dit : « Quelques exemplaires de l'ouvrage publié ici ont été » envoyés à cette époque à Vienne, à Berlin, à Gœttingue.... De » Gœttingue, le géant mathématique, qui du sommet des hauteurs » embrasse du même regard les astres et la profondeur des abîmes, » a écrit qu'il était ravi de voir exécuté le travail qu'il avait com- » mencé pour le laisser après lui dans ses papiers. » — L'auteur donne encore un court extrait des principes de la géométrie contenus dans le tome I du *Tentamen.* Son style est très original, souvent difficile à comprendre.

III.

Le 9 mars 1832, Bolyai fut nommé membre correspondant de la section mathématique de l'Académie Hongroise.

Comme professeur, Bolyai, par son zèle ardent, exerçait une puissante influence. Dans sa vie privée, c'était un vrai type d'originalité, et il court beaucoup d'anecdotes sur ses singularités et ses distractions. Une de ses occupations favorites était la construction de modèles de fours et d'appareils de chauffage. Il eut la joie de voir adopter de son vivant le poêle-Daniel, construit d'après la théorie des tuyaux, et qui a introduit une réforme complète dans l'économie domestique de la Transylvanie. — Il avait fait couvrir sa voiture avec des lattes.

Les ornements de son antique demeure étaient son violon et ses modèles de fours. A la muraille enfumée pendaient les portraits de son ami Gauss, de Shakespeare, qu'il appelait le fils de la Nature, et de Schiller, qu'il en appelait le petit-fils. Devant une table grossière était assis un vieillard, vêtu de pantalons hongrois en grosse étoffe noire, de hautes bottes *(czismen)*, d'une jaquette de flanelle blanche, coiffé d'un chapeau à forme basse et à larges bords : c'était Wolfgang Bolyai.

Dans l'année 1849, Bolyai fut mis à la retraite. Il fit alors faire son cercueil, écrivit les lettres de faire part de sa mort, et les fit imprimer en 1855 [*Jelentés* (annonce), 8 pages in-8, 1855]. Dans son testament, il ordonna que ses funérailles fussent aussi simples que possible, et qu'on sonnât simplement la cloche de l'École, comme signe qu'il fallait partir pour la dernière et la grande leçon. La croyance de Bolyai à l'immortalité de l'âme était inébranlable. Il regardait la terre comme un bourbier où languit l'esprit enchaîné; la mort comme un ange libérateur, qui conduit l'âme au sortir de sa captivité dans des régions plus heureuses. Son noble et beau caractère est attesté par sa générosité qui ne connaissait pas de bornes, et par son excessive modestie.

Sa tombe ne devait porter aucune marque. Il permit seulement à l'un de ses amis de planter un pommier au milieu du gazon sous lequel il devait reposer, en mémoire des trois pommes, dont les deux premières, celle d'Ève et celle de Paris, avaient changé la

erre en un enfer, et dont l'autre, celle de Newton, l'avait replacée au rang des corps célestes.

Le jour de la mort de Bolyai, le Collége Réformé publia la lettre de faire part dont nous avons parlé, en y ajoutant ces mots :

« L'Administration du Collége Réformé annonce la triste nou-
» velle qu'après quarante-sept ans de bons et infatigables services
» et cinq ans passés dans le repos, le professeur émérite, corres-
» pondant de l'Académie Hongroise, BOLYAI FARKAS (Wolfgang)
» a cessé de vivre le 20 novembre 1856, à 9 heures et demie du
» soir, âgé de près de 82 ans. Les derniers devoirs lui seront
» rendus le 23, à deux heures après midi. Par respect pour la
» volonté du défunt, l'inhumation aura lieu de la manière décrite
» ci-dessus. »

Bolyai a laissé deux fils, dont l'un Johann, est mort en 1860, capitaine retraité du corps I. et R. du Génie; l'autre, Gregor, agriculteur auprès d'Hermanstadt, est encore vivant.

Dans les papiers de J. Bolyai se trouvent des notes sur les manuscrits laissés par son père, qui se composent d'un grand nombre d'élégies, de six hexamètres latins à la mémoire de son ami Gauss; de plusieurs cahiers illisibles, écrits pour son usage personnel; d'une Géographie mathématique; de recherches sur le théorème de Wilson, et d'un Mémoire sur les fractions continues : le tout en langue hongroise. Ces manuscrits, ainsi que tous les ouvrages imprimés de W. Bolyai, sont devenus, d'après son testament, la propriété du Collége Réformé de Maros Vásárhely.

IV.

Johann Bolyai de Bolya (en hongrois *Bolyai János*,) fils du précédent, naquit à Klausenburg, en Transylvanie, le 15 décembre 1802. Il étudia dans une des institutions fondées en Transylvanie par l'Académie Impériale du Génie de Vienne, et il en sortit, le 7 septembre 1822, comme cadet du Génie. Le 1er septembre 1823, il fut promu sous-lieutenant; et le 16 juin 1833, il fut mis à la retraite comme capitaine.

J. Bolyai était un profond mathématicien, et de plus un violoniste distingué, et un tireur d'armes de première force. Ce dernier

talent ne fut pas étranger à sa mise si prompte à la retraite (1).

A l'exception de l'*Appendix* du premier volume du *Tentamen*, mentionné à l'article (**b**), J. Bolyai n'a rien imprimé. Cependant, le peu que nous avons de lui nous donne le droit de penser que les manuscrits qu'il a laissés doivent receler plus d'un trésor caché; et les possesseurs des papiers de J. Bolyai rendraient un grand service à la Géométrie, s'ils se décidaient à les soumettre à l'examen d'un homme compétent et dévoué à la science.

J. Bolyai est mort en 1860, à Maros Vásárhely. Nous n'avons encore pu, malgré nos demandes réitérées, obtenir une date plus précise. En vertu d'un règlement militaire, ses papiers furent jetés dans deux caisses, que l'on tint fermées, jusqu'au jour où, à l'exception de quelques travaux sur l'art militaire, tous ces papiers furent déposés à la Bibliothèque du Collége Réformé, conformément à une disposition du testament de Bolyai père; c'est là que sont actuellement réunis tous les écrits de Johann. A en juger à première vue, ces papiers doivent comprendre plus de mille pages. Une partie est écrite sur de petites feuilles de toute grandeur, et se trouve dans un complet désordre.

Dans les dernières années de sa vie, J. Bolyai s'était presque exclusivement occupé de linguistique. Il avait conçu le projet gigantesque de créer une langue universelle pour la parole, comme on en a une pour la musique. Il vivait retiré du commerce des hommes, absorbé tout entier par son idée. D'après tous les renseignements qui nous sont parvenus, c'était un caractère bizarre et tout à fait original, mais une brillante intelligence.

En 1853, il voulut faire imprimer une partie de ses travaux mathématiques; car on a trouvé parmi ses papiers une feuille de titre et des fragments d'un Mémoire intitulé : *Principia doctrinæ novæ quantitatum imaginariarum perfectæ uniceque satisfacientis, aliæque disquisitiones analyticæ et analytico-geometricæ cardinales gravissimæque; auctore Johan. Bolyai de eadem, C. R.*

---

(1) Se trouvant en garnison avec des officiers de cavalerie, Bolyai fut provoqué par treize d'entre eux, et il accepta tous les cartels, à condition qu'on lui permettrait après chaque duel de jouer un morceau de violon. Il sortit vainqueur de ses treize duels, laissant ses treize adversaires sur le carreau.

austriaco castrensium capitaneo pensionato. Vindobonæ, vel Maros Vásárhelyini, 1853.

Là s'arrêtent les renseignements qui nous sont parvenus sur deux hommes, dont les talents n'ont pu malheureusement trouver dans leur patrie l'estime et le respect qui leur étaient dus. A l'étranger, les hommes de science ont su apprécier le nom de Bolyai, sans que la Hongrie se soit encore associée à cet hommage. Il appartiendrait cependant à l'Académie des Sciences de Pest de veiller à ce que les écrits posthumes des Bolyai ne soient pas perdus pour les contemporains et pour la postérité. Notre patrie doit à deux de ses plus illustres enfants, elle doit à l'Europe savante de ne pas laisser périr des œuvres qui jetteraient tant d'éclat sur la science hongroise, et que les géomètres de tout pays accueilleraient avec tant d'intérêt.

Temesvár, décembre 1867.

EXPLICATION DES SIGNES.

$\overline{a\,b}$	l'ensemble de *tous* les points situés en ligne droite avec les points a et b.
$\overrightarrow{a\,b}$	celle des moitiés de la droite $\overline{a\,b}$ qui commence au point a et qui comprend le point b.
$\overline{a\,b\,c}$	l'ensemble de *tous* les points situés dans le même plan que les trois points (non en ligne droite) a, b, c.
$\overrightarrow{a\,b\,c}$	celle des moitiés du plan $\overline{a\,b\,c}$ qui part de la droite $\overline{a\,b}$ et qui comprend le point c.
$a\,b\,c$	*la plus petite* des parties dans lesquelles $\overline{a\,b\,c}$ est partagé par les droites $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$, ou l'*angle* dont les côtés sont $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$.
$a\,b\,c\,d$	(le point d étant situé à l'intérieur de $a\,b\,c$, et les droites $\overline{b\,a}$, $\overline{c\,d}$ ne se coupant pas) la portion de $a\,b\,c$ comprise entre $\overrightarrow{b\,a}$, $b\,c$, $\overrightarrow{c\,d}$; tandis que $b\,a\,c\,d$ désignera la portion de $\overline{a\,b\,c}$ comprise entre $\overline{a\,b}$ et $\overline{c\,d}$.
$\llcorner$	signe de la perpendicularité.
$\parallel$	signe du parallélisme.
$\wedge$	un angle.
R	un angle droit.
$\equiv$	indique que deux quantités sont superposables.
$ab \triangleq cd$	$cab = acd$.
$x \dashrightarrow a$	x converge vers la limite a.
$\triangle$	triangle.
$\square$	carré.
Cr	la circonférence du cercle de rayon r.
$\odot r$	l'aire du cercle de rayon r.

LA

SCIENCE ABSOLUE DE L'ESPACE

indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir *a priori*);

SUIVIE DE LA QUADRATURE GÉOMÉTRIQUE DU CERCLE, DANS LE CAS DE LA FAUSSETÉ DE L'AXIÔME XI,

PAR JEAN BOLYAI,

Capitaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne.

---

§ 1.

Si la droite $\overrightarrow{am}$ n'est pas coupée par la droite $\overrightarrow{bn}$, située dans le même plan, mais qu'elle soit coupée par toute autre droite $\overrightarrow{bp}$, comprise dans l'angle abn, on dira que $\overrightarrow{bn}$ est *parallèle* à $\overrightarrow{am}$, c'est à dire qu'on aura $bn \parallel\!\!\parallel am$.

Il est facile de voir qu'*il existe une telle droite* $\overrightarrow{bn}$, *et une seule*, passant par un point quelconque b (pris hors de $\overline{am}$), et que la somme des angles bam, abn ne peut surpasser $2R$. Car, en faisant mouvoir bc autour de b jusqu'à ce que l'on ait $bam + abc = 2R$, il y aura un instant où $\overrightarrow{bc}$ *commencera* à ne plus couper $\overrightarrow{am}$, et c'est alors qu'on aura $bc \parallel\!\!\parallel am$.

Il est clair, en même temps, que $bn \parallel\!\!\parallel cm$, quel que soit le point c pris sur $\overline{am}$.

Si, tandis que le point c s'éloigne à l'infini sur $\overrightarrow{am}$, on prend toujours $cd = cb$, on aura constamment $ebd = cdb < nbc$. Or $nbc \dashv\!\!- 0$; donc aussi $adb \dashv\!\!- 0$.

§ 2.

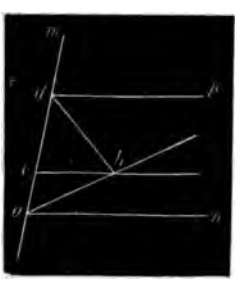
Si $bn \parallel\!\!\parallel am$, on a aussi $cn \parallel\!\!\parallel am$. Soit, en effet, d un point quelconque de $macn$. Si c est sur $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{bd}$ coupera $\overrightarrow{am}$, puisque $bn \parallel\!\!\parallel am$. Donc cd coupera aussi $\overrightarrow{am}$. Si c est situé sur $\overrightarrow{bp}$, soit $bq \parallel\!\!\parallel cd$; bq tombera à l'intérieur de abn (§ 1), et coupera par conséquent $\overrightarrow{am}$; donc $\overrightarrow{cd}$ coupera aussi $\overrightarrow{am}$. Donc toute droite $\overrightarrow{cd}$ (dans acn) coupe, dans l'un et l'autre cas, la droite $\overrightarrow{am}$, sans que $\overrightarrow{en}$ elle-même coupe $\overrightarrow{am}$. Donc on a toujours $cn \parallel\!\!\parallel am$.

§ 3.

Si br et cs sont l'une et l'autre $\parallel\!\!\parallel am$, et que c ne soit pas situé sur $\overrightarrow{br}$, alors $\overrightarrow{br}$ et $\overrightarrow{cs}$ ne se couperont pas. Car si $\overrightarrow{br}$ et $\overrightarrow{cs}$ avaient un point commun d, alors (§ 2) dr et ds seraient l'une et l'autre $\parallel\!\!\parallel am$, $\overrightarrow{dr}$ (§ 1) coïnciderait avec $\overrightarrow{ds}$, et c tomberait sur $\overrightarrow{br}$, ce qui est contre l'hypothèse.

§ 4.

Si $man > mab$, il y aura, pour tout point b de $\overrightarrow{ab}$, un point



c de $\overrightarrow{am}$, tel qu'on aura $bcm = nam$. On peut, en effet (§ 1), mener bd de façon que $bdm > nam$, et en faisant $mdp = man$, b sera compris dans $nadp$. Si donc on transporte nam le long de am, jusqu'à ce que $\overrightarrow{an}$ arrive sur $\overrightarrow{dp}$, il faudra que $\overrightarrow{an}$ ait passé par b, et que l'on ait eu quelque part $bcm = nam$.

§ 5.

Si $bn \parallel\!\!\parallel am$, il y a sur $\overline{am}$ un point f tel que $fm \triangleq bn$. En effet, on peut faire en sorte que l'on ait (§ 1) $bcm > cbn$, et, si $ce = cb$, il en résultera $ec \triangleq bc$, d'où $bem < ebn$. Faisons mouvoir le point p sur ec. L'angle bpm, pour p voisin de e, commencera par être $<$ l'angle pbn correspondant, et pour p voisin de c, il finira par être $> pbn$. Or, l'angle bpm va en croissant d'une manière continue depuis bem jusqu'à bcm, puisque (§ 4) il n'existe aucun angle $> bem$ et $< bcm$, auquel bpm ne puisse devenir égal. Pareillement pbn décroît d'une manière continue depuis ebn jusqu'à cbn. Il existe donc sur ec un point f tel que $bfm = fbn$.

§ 6.

Si $bn \parallel\!\!\parallel am$, et que e soit un point quelconque de $\overline{am}$, g un point quelconque de $\overline{bn}$, on aura alors $gn \parallel\!\!\parallel em$ et $em \parallel\!\!\parallel gn$.

Car on a (§ 1) $bn \parallel\!\!\parallel em$, d'où (§ 2) $gn \parallel\!\!\parallel em$. Si l'on fait maintenant $fm \triangleq bn$ (§ 5), alors $mfbn \equiv nbfm$, et par suite, puisque $bn \parallel\!\!\parallel fm$, on a aussi $fm \parallel\!\!\parallel bn$, et, d'après ce qui précède, $em \parallel\!\!\parallel gn$.

§ 7.

Si bn et cp sont l'une et l'autre $\parallel\!\!\parallel am$, et que c ne soit pas situé sur $\overline{bn}$, on aura aussi $bn \parallel\!\!\parallel cp$.

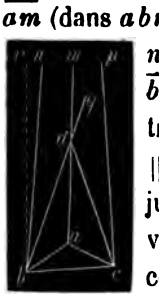
En effet, $\overrightarrow{bn}$ et $\overrightarrow{cp}$ ne se coupent pas (§ 3). D'ailleurs, am, bn et cp sont ou ne sont pas dans un même plan, et, dans le premier cas, am est ou n'est pas à l'intérieur de $bncp$.

1° Si am, bn, cp sont dans un même plan, et que am tombe à l'intérieur de $bncp$, alors toute droite $\overrightarrow{bq}$ menée à l'intérieur de nbc, coupera $\overrightarrow{am}$

quelque part en d, puisque $bn \parallel\!\!\parallel am$. De plus, à cause de $dm \parallel\!\!\parallel cp$ (§ 6), il est clair que $\overrightarrow{dq}$ coupera $\overrightarrow{cp}$; donc on a $bn \parallel\!\!\parallel cp$.

2° Si bn et cp sont du même côté de am, l'une d'elles, cp par exemple, sera comprise *entre* les deux autres droites $\overline{bn}$, $\overline{am}$. Or, toute droite $\overrightarrow{bq}$, intérieure à nba, rencontre $\overrightarrow{am}$; par suite, elle rencontre aussi cp. Donc $bn \parallel\!\!\parallel cp$.

3° Si les plans mab, mac font entre eux un angle, alors cbn et abn ne pourront avoir de commun que la ligne $\overline{bn}$, tandis que $\overline{am}$ (dans abn) n'aura rien de commun avec $\overrightarrow{bn}$, et par suite aussi nbc n'aura rien de commun avec $\overline{am}$. Or, tout plan $\overrightarrow{bcd}$, mené par la droite $\overrightarrow{bd}$ (situé dans nba), rencontrera $\overrightarrow{am}$, puisque $\overrightarrow{bq}$ rencontre $\overrightarrow{am}$ (à cause de $bn \parallel\!\!\parallel am$). En faisant donc mouvoir $\overrightarrow{bcd}$ autour de $\overline{bc}$, jusqu'à ce que ce plan *commence* à quitter $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bcd}$ viendra alors coïncider avec $\overrightarrow{bcn}$. Par la même raison, ce même plan viendra coïncider avec $\overrightarrow{bcp}$; donc bn est dans le plan bcp.



Si, de plus, $br \parallel\!\!\parallel cp$, alors ($am$ étant aussi $\parallel\!\!\parallel cp$) br sera, par la même raison, dans le plan bam, et aussi (puisque $br \parallel\!\!\parallel cp$) dans le plan bcp. Donc $\overline{br}$, étant commune aux deux plans mab, pcb, n'est autre chose que la ligne $\overline{bn}$; donc $bn \parallel\!\!\parallel cp$ [*].

Si donc $cp \parallel\!\!\parallel am$, et que b soit extérieur à cam, alors l'intersection $\overrightarrow{bn}$ des plans bam, cap est $\parallel\!\!\parallel$ à la fois à am et à cp.

§ 8.

Si bn est $\parallel\!\!\parallel$ et $\triangleq cp$ (ou plus brièvement, si $bn \parallel\!\!\parallel \triangleq cp$), et que am (dans $nbcp$) soit $\llcorner$ sur le milieu de bc, alors $bn \parallel\!\!\parallel am$.

En effet, si $\overrightarrow{bn}$ rencontrait $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{cp}$ rencontrerait aussi $\overrightarrow{am}$ au même point (à cause de $mabn \equiv$

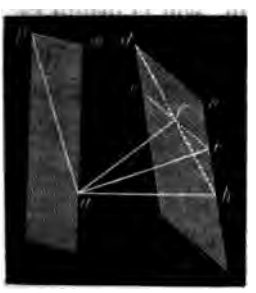
[*] En plaçant ce 3e cas avant les deux précédents, ceux-ci pourraient se démontrer avec plus de brièveté et d'élégance, comme le 2e cas du § 10.
(Note de l'Auteur.)

$macp$, et ce point serait commun aux lignes $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{cp}$ elles-mêmes, tandis qu'au contraire $bn \parallel\!\parallel\!\parallel cp$. D'autre part, toute droite $\overrightarrow{bq}$, intérieure à cbn, rencontre $\overrightarrow{cp}$; elle rencontre donc aussi $\overrightarrow{am}$. Par conséquent, $bn \parallel\!\parallel\!\parallel am$.

§ 9.

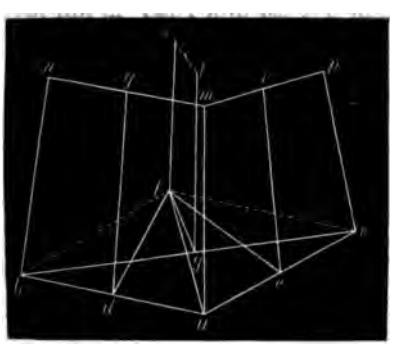
Si $bn \parallel\!\parallel\!\parallel am$, $map \llcorner mab$, et que l'angle dièdre $dnba$ des plans nbd, nba (prolongés du même côté de $mabn$ où se trouve map) soit $< R$; alors map et nbd se couperont.

Soit, en effet, $bam = R$, $ac \llcorner bn$ (que c coïncide ou non avec b),



et $ce \llcorner bn$ (dans nbd); on aura (par hypothèse) $ace < R$, et af ($\llcorner ce$) tombera dans ace. Soit $\overrightarrow{ap}$ l'intersection des plans $\overrightarrow{abf}$, $\overrightarrow{amp}$ (qui ont le point a commun) : on aura $bap = bam = R$ (puisque $bam \llcorner map$). Si enfin l'on fait mouvoir $\overrightarrow{abf}$ autour des points fixes a et b, jusqu'à ce qu'il s'applique sur $\overrightarrow{abm}$, $\overrightarrow{ap}$ tombera sur $\overrightarrow{am}$, et puisque $ac \llcorner bn$ et $af < ac$, il est clair que af aura son extrémité entre $\overrightarrow{bn}$ et $\overrightarrow{am}$, et que par suite bf tombera à l'intérieur de abn. Or, *dans cette position*, $\overrightarrow{bf}$ rencontre $\overrightarrow{ap}$ (puisque $bn \parallel\!\parallel\!\parallel am$); donc $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bf}$ se rencontrent aussi *dans la position primitive*, et le point de rencontre est commun à $\overrightarrow{map}$ et à $\overrightarrow{nbd}$. Donc $\overrightarrow{map}$ et $\overrightarrow{nbd}$ se coupent.

On en conclut facilement que $\overrightarrow{map}$ et $\overrightarrow{nbd}$ se coupent toutes les fois que la somme des angles dièdres qu'ils forment avec mab est $< 2R$.



§ 10.

Si bn et cp sont l'une et l'autre $\parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq am$, on aura aussi $bn \parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq cp$.

En effet, ou les plans mab, mac font entre eux un angle, ou ils forment un même plan.

1° Si le premier cas a lieu, menons $\overrightarrow{qaf} \llcorner$ sur le milieu de

ab. Alors dq sera $\llcorner ab$, et par suite $dq \parallel\!\parallel\!\parallel am$ (§ 8). De même, si $\overrightarrow{ers}$ est $\llcorner$ sur le milieu de ac, on aura $er \parallel\!\parallel\!\parallel am$, d'où $dq \parallel\!\parallel\!\parallel er$ (§ 7). On en conclut aisément (d'après le § 9) que $\overrightarrow{qdf}$ et $\overrightarrow{ers}$ se rencontrent, et que leur intersection $\overrightarrow{fs}$ est $\parallel\!\parallel\!\parallel dq$ (§ 7); de plus, à cause de $bn \parallel\!\parallel\!\parallel dq$, on a aussi $fs \parallel\!\parallel\!\parallel bn$. On a en outre (pour tout point f de $\overline{fs}$) $fb = fa = fc$, et $\overline{fs}$ est située dans le plan $\overrightarrow{tgf} \llcorner$ sur le milieu de bc. Or on a (§ 7), à cause de $fs \parallel\!\parallel\!\parallel bn$, $gt \parallel\!\parallel\!\parallel bn$. On démontrera de même que $gt \parallel\!\parallel\!\parallel cp$. Mais $gt \llcorner$ sur le milieu de bc; donc $tgbn \equiv tgcp$ (§ 1), et $bn \parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq cp$.

2° Si bn, am et cp sont dans un même plan, soit la droite fs, *extérieure* à ce plan, et $\parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq am$. Alors, d'après ce qu'on vient de voir, $fs \parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq$ à chacune des droites bn, cp, et par suite on a aussi $bn \parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq cp$.

§ 11.

Considérons l'ensemble formé par le point a et par *tous* les points tels que, pour un quelconque d'entre eux b, lorsque $bn \parallel\!\parallel\!\parallel am$, on ait aussi $bn \triangleq am$, et désignons cet ensemble par F [*]; et soit L [**] l'intersection de F avec un plan quelconque mené par la droite am. Sur toute droite $\parallel\!\parallel\!\parallel am$, F a un point, et un seul; et il est évident que L est divisée par am en deux parties susceptibles de coïncider. Nous appellerons $\overrightarrow{am}$ l'*axe de L*. Il est clair encore que, dans un plan quelconque passant par la droite am, il y a, pour l'*axe* $\overrightarrow{am}$, une seule ligne L. Toute ligne L, ainsi définie, s'appellera le L de $\overrightarrow{am}$ (dans le plan, bien entendu, que l'on considère). Il est évident que, par la révolution de L autour de la droite am, on engendrera le F dont $\overrightarrow{am}$ est dite l'*axe*, et qui est, réciproquement, *le F de l'axe* $\overrightarrow{am}$.

§ 12.

Soit b un point quelconque du L de $\overrightarrow{am}$, et $bn \parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq am$ (§ 11). Alors le L de $\overrightarrow{am}$ et le L de $\overrightarrow{bn}$ *coïncideront*.

---

[*] *Sphère-limite* de Lobatschewsky (*H.*).
[**] *Cercle-limite* de Lobatschewsky (*H.*).

Soit, en effet, L' le L de $\overrightarrow{bn}$; soit c un point quelconque de L', et $cp \parallel\!\!\parallel \triangleq bn$ (§ 11). A cause de $bn \parallel\!\!\parallel \triangleq am$, on aura aussi $cp \parallel\!\!\parallel \triangleq am$ (§ 10); par conséquent c sera situé sur L. Et si c est un point quelconque de L, et que $cp \parallel\!\!\parallel \triangleq am$, alors aussi $cp \parallel\!\!\parallel \triangleq bn$ (§ 10); donc c est également situé sur L' (§ 11). Donc L et L' sont identiques, et toute droite $\overrightarrow{bn}$ ($\parallel\!\!\parallel am$) est un nouvel axe de L, et est $\triangleq$ par rapport à tous les axes de L.

La même propriété se démontrerait de la même manière pour la surface F.

§ 13.

Si l'on a $bn \parallel\!\!\parallel am$, $cp \parallel\!\!\parallel dq$, et $bam + abn = 2R$, alors on aura aussi $dcp + cdq = 2R$.

Soient, en effet, $ea = eb$, et $efm = dcp$ (§ 4). A cause de

$bam + abn = 2R = abn + abg$, on aura $ebg = eaf$. Si donc on a encore $bg = af$, le $\Delta\ ebg \equiv \Delta\ eaf$, $\overrightarrow{beg} = \overrightarrow{aef}$, et g tombera sur $\overrightarrow{fe}$. On a, de plus, $gfm + fgn = 2R$ (puisque $egb = efa$). D'ailleurs $gn \parallel\!\!\parallel fm$ (§ 6); donc, si $mfrs \equiv pcdq$, alors $rs \parallel\!\!\parallel gn$ (§ 7), et r tombe soit en dedans, soit en dehors de fg (si l'on n'a pas $cd = fg$, auquel cas la proposition serait évidente).

1° Dans le premier cas, frs n'est pas plus grand que $2R - rfm = fgn$, puisque $rs \parallel\!\!\parallel fm$. Mais comme $rs \parallel\!\!\parallel gn$, frs n'est pas $< fgn$. Donc $frs = fgn$, et $rfm + frs = gfm + fgn = 2R$. On a donc aussi $dcp + cdq = 2R$.

2° Si r tombe en dehors de fg, alors $ngr = mfr$. Soit $mfgn \equiv nghl \equiv lhko$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que fk devienne $= fr$ ou commence à surpasser fr. On a ici $ko \parallel\!\!\parallel hl \parallel\!\!\parallel fm$ (§ 7). Si k tombe en r, alors ko tombe sur rs (§ 1), et par suite $rfm + frs = kfm + fko = kfm + fgn = 2R$. Mais si r tombe à l'intérieur de hk, alors (d'après 1°) on a $rhl + krs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq$.

§ 14.

Si l'on a $bn \parallel\!\!\parallel am$, $cp \parallel\!\!\parallel dq$ et $bam + abn < 2R$, on aura aussi $dcp + cdq < 2R$.

Car, si $dcp + cdq$ n'était pas $< 2R$, cette somme (d'après le § 1) serait $= 2R$. Alors on aurait aussi (§ 13) $bam + abn = 2R$, ce qui est contre l'hypothèse.

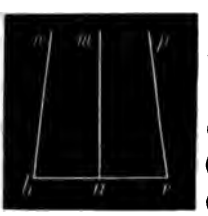
§ 15.

En considérant ce que nous avons établi dans les §§ 13 et 14, *nous désignerons par* Σ *le système de géométrie qui repose sur l'hypothèse de la vérité de l'axiôme XI d'Euclide, et par* S *le système fondé sur l'hypothèse contraire.*

Tous les résultats que nous énoncerons, sans désigner expressément si c'est dans le système Σ *ou dans le système* S *qu'ils ont lieu, devront être considérés comme énoncés d'une manière absolue, c'est-à-dire qu'ils seront donnés comme vrais, soit qu'on se place dans le système* Σ*, soit qu'on se place dans le système* S.

§ 16.

Si am est l'axe d'une ligne L, cette ligne L, dans le système Σ, sera une droite $\llcorner am$.



Soit, en effet, bn l'axe en un point quelconque b de L; on aura, dans Σ, $bam + abn = 2bam = 2R$, d'où $bam = R$. Et si c est un point quelconque de $\overline{ab}$, et que l'on ait $cp \parallel\!\!\parallel am$, on aura (§ 13) $cp \curlywedge am$, et par conséquent c sera sur L (§ 11).

Mais, dans S, il n'existe nulle part sur L ou sur F trois points en ligne droite. — En effet, quelqu'un des axes am, bn, cp (am, par exemple) tombe entre les deux autres, et alors (§ 14) bam et cam sont l'un et l'autre $< R$.

§ 17.

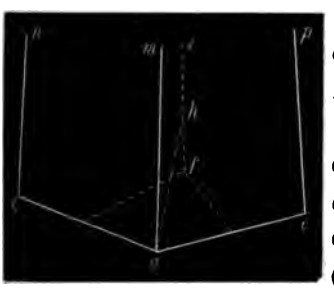
Dans S, L est encore une ligne, et F une surface. Car (§ 11)

tout plan mené perpendiculairement à l'axe $\overrightarrow{am}$ par un point quelconque de F, coupe F suivant une circonférence de cercle, dont le plan (§ 14) n'est perpendiculaire à aucun autre axe $\overrightarrow{bn}$. Si l'on fait tourner F autour de bn, un point quelconque de F (§ 12) restera sur F, et la section de F par un plan non perpendiculaire à $\overrightarrow{bn}$ décrira une surface. Or, quels que soient les points a, b pris sur F, F pourra (§ 12) coïncider *avec lui-même*, de manière que a tombe en b. Donc F est une *surface uniforme*.

Il résulte de là (§§ 11 et 12) que L est une *ligne uniforme* [*],

§ 18.

L'intersection de F avec un plan quelconque, mené par un point a de F obliquement à l'axe am, est, dans le système S, une circonférence de cercle.



Soient, en effet, a, b, c trois points de cette section, et bn, cp des axes. $ambn$ et $amcp$ feront un angle, sans quoi le plan déterminé par a, b, c (§ 16) comprendrait am, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les plans perpendiculaires sur les milieux des droites ab, ac se coupent (§ 10) suivant un certain axe $\overrightarrow{fs}$ de F, et l'on a $fb=fa=fc$. Soit $ah \perp fs$, et faisons tourner fah autour de fs; a décrira une circonférence de rayon ha, passant en b et en c, et située à la fois dans F et dans $\overline{abc}$; de plus, F et abc n'ont rien de commun que la $\bigcirc ha$ (§ 16).

Il est encore évident qu'en faisant tourner la portion fa de ligne L (comme rayon) dans F autour de a, son extrémité décrira la $\bigcirc ha$.

§ 19.

La perpendiculaire bt à l'axe bn de L (menée dans le plan de L) est, dans le système S, la tangente à la ligne L.

---

[*] Il n'est pas nécessaire de restreindre la démonstration au système S; on peut établir facilement qu'elle est vraie d'une manière absolue pour S et pour Σ. (*Note de l'Auteur.*)

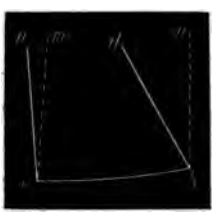
En effet, L n'a de commun avec $\overrightarrow{bt}$ que le point b (§ 14). Mais, si bq est situé dans le plan tbn, alors le centre de la section faite dans le F de $\overrightarrow{bn}$ par le plan mené suivant bq perpendiculairement à tbn (§ 18), est évidemment placé sur $\overrightarrow{bq}$; et si bq est un diamètre, il est clair que $\overrightarrow{bq}$ coupera en q le L de $\overrightarrow{bn}$.

§ 20.

Deux points quelconques de F déterminent une ligne L (§§ 11 et 18); et puisque (§§ 16 et 19) L est perpendiculaire à tous ses axes, tout angle de lignes L dans F est égal à l'angle des plans menés par ses côtés perpendiculairement à F.

§ 21.

Deux lignes L, $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bd}$, dans la même surface F, faisant avec une troisième ligne L, savoir, avec ab, des angles intérieurs dont la somme est $< 2R$, se rencontreront.



Nous désignerons par $\overrightarrow{ap}$, dans F, la ligne L mené par a et p, et par $\overrightarrow{ap}$ celle des moitiés de cette ligne, à partir de a, qui contient le point p.

En effet, si am, bn sont des axes de F, les plans $\overrightarrow{amp}$, $\overrightarrow{bnd}$ se couperont (§ 9), et F rencontrera leur intersection (§§ 7 et 11). Donc $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bd}$ se rencontreront.

Il résulte de là que l'axiôme XI et toutes les conséquences que l'on en déduit en géométrie et en trigonométrie (plane), sont vrais d'une manière absolue dans F, les lignes L jouant le rôle de lignes droites. Par conséquent, les fonctions trigonométriques seront prises ici dans le même sens que dans le système Σ; et la circonférence du cercle tracé dans F et ayant pour rayon une portion de ligne L égale à r, aura pour longueur $2\pi r$; et de même $\odot r$ (dans F) sera $= \pi r^2$ (π désignant $\frac{1}{2}\bigcirc 1$ dans F, c'est-à-dire le nombre connu 3, 1415926....).

§ 22.

Soit $\overline{ab}$ la ligne L de $\overrightarrow{am}$, et c un point de $\overrightarrow{am}$. Imaginons que l'angle cab (formé par la droite $\overrightarrow{am}$ et la ligne L désignée par $\overrightarrow{ab}$)

soit transporté d'abord le long de $\overrightarrow{ab}$, puis le long de $\overrightarrow{ba}$, et de part et d'autre jusqu'à l'infini. La trajectoire $\overline{cd}$ du point c sera la ligne L de $\overrightarrow{cm}$.

En effet, si l'on désigne cette dernière par L', soient d un point quelconque de $\overline{cd}$, $dn \parallel\!\parallel cm$, et b le point de L situé sur $\overline{dn}$. On aura $bn \triangleq am$ et $ac = bd$, et par suite $dn \triangleq cm$; donc d est sur L'. D'ailleurs, si d est sur L' et si $dn \parallel\!\parallel cm$, et que b soit le point de L commun avec $\overline{dn}$, on aura $am \triangleq bm$ et $cm \triangleq dn$, d'où il résulte que $bd = ac$, et que d tombera sur la trajectoire du point c; L' sera donc identique avec $\overline{cd}$.

Nous représenterons la relation d'une telle ligne L' avec L par la notation $L' \parallel L$.

§ 23.

Si la ligne L représentée par cdf est $\parallel abe$ (§ 22); si, de plus, $ab = be$, et que $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{ep}$ soient des axes, on aura évidemment $cd = df$. Si a, b, e sont trois points quelconques de $\overline{ab}$, et que l'on ait $ab = n.cd$, on aura aussi $ae = n.cf$, et par conséquent (ce qui s'étend évidemment au cas de ab, ae, dc incommensurables), $ab : cd = ae : cf$. Le rapport $ab : cd$ est donc INDÉPENDANT DE ab, ET COMPLÈTEMENT DÉTERMINÉ AU MOYEN DE ac. Nous désignerons la valeur de ce rapport $ab : cd$ par la lettre capitale (telle que X) qui correspondra à la lettre minuscule (telle que x) par laquelle nous représenterons ac.

§ 24.

Quels que soient x et y, on a $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§ 23). En effet, ou l'une des quantités x, y est multiple de l'autre (par exemple, y est multiple de x), ou elle ne l'est pas.

Si $y = nx$, soit $x = ac = cg = gh = \ldots$, jusqu'à ce que l'on ait $ah = y$. Soit, de plus, $cd \parallel gk \parallel hl$. On aura (§ 23) $X = ab : cd = cd : gk = gk : hl$, et par conséquent

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

ou

$$Y = X^n = \overset{\frac{y}{x}}{X}$$

Si x, y sont des multiples de i, $x = mi$, $y = ni$, on aura, d'après ce qu'on vient de voir, $X = I^m$, $Y = I^n$, et par conséquent

$$Y = \overset{\frac{n}{m}}{X} = \overset{\frac{y}{x}}{X}$$

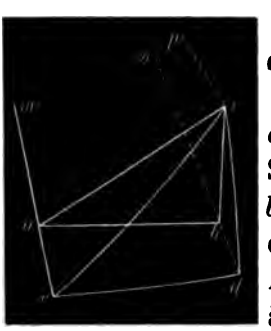
Cette conclusion s'étend aisément au cas où x et y sont incommensurables.

Si l'on a $q = y - x$, il en résultera évidemment $Q = Y : X$.

Il est clair que, dans le système Σ, on a, pour toute valeur de x, $X = 1$. Dans le système S, au contraire, on a $X > 1$, et pour des valeurs quelconques de ab et de abe, il existe une ligne $cdf \parallel abe$, telle que $cdf = ab$, d'où il résulte $ambn \equiv amep$, quoique la première de ces deux figures soit un multiple quelconque de la seconde : résultat singulier, mais qui ne prouve évidemment pas l'absurdité du système S.

§ 25.

Dans tout triangle rectiligne, les circonférences de rayons égaux aux côtés sont entre elles comme les sinus des angles opposés.



Soient, en effet, $abc = R$, et $am \llcorner bac$, et soient bn et $cp \parallel\!\parallel am$. On aura $cab \llcorner ambn$, et par suite (à cause de $cb \llcorner ba$), $cb \llcorner ambn$; par conséquent, $cpbn \llcorner ambn$. Supposons que le F de $\overrightarrow{cp}$ coupe les droites $\overline{bn}$, $\overline{am}$ respectivement en d, e, et les bandes $cpbn$, $cpam$, $bnam$ suivant les lignes L, cd, ce, de. Alors (§ 20) $\wedge cde$ sera égal à l'angle de ndc, nde, et par suite $= R$; et l'on aura, par la même raison, $ced = cab$. Or (§ 21), dans

le $\Delta\ ced$, formé par des lignes L (en supposant toujours ici le rayon $= 1$), on a

$$ec : dc = 1 : \sin dec = 1 : \sin cab.$$

On a aussi (§ 21)

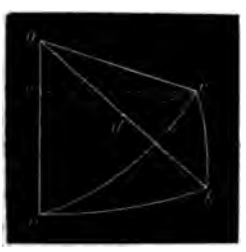
$$ec : dc = \bigcirc ec : \bigcirc dc \text{ (dans } F) = \bigcirc ac : \bigcirc bc \text{ (§ 18)}.$$

Par conséquent on en conclut

$$\bigcirc ac : \bigcirc bc = 1 : \sin cab,$$

d'où il résulte que la proposition énoncée se trouve établie pour un triangle quelconque.

§ 26.



Dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés.

Soient, en effet, $abc = R$, et $ced \llcorner$ au rayon oa de la sphère. On aura $ced \llcorner aob$, et (boc étant aussi $\llcorner boa$), $cd \llcorner ob$. Or, dans les triangles ceo, cdo, on a (§ 25)

$$\begin{aligned} \bigcirc ec : \bigcirc oc : \bigcirc dc &= \sin coe : 1 : \sin cod \\ &= \sin ac : 1 : \sin bc. \end{aligned}$$

Mais on a aussi (§ 25)

$$\bigcirc ec : \bigcirc dc = \sin cde : \sin ced.$$

Donc

$$\sin ac : \sin bc = \sin cde : \sin ced.$$

Mais $cde = R = cba$, et $ced = cab$. Par conséquent

$$\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a.$$

De là découle toute la Trigonométrie sphérique, qui se trouve ainsi établie indépendamment de l'Axiôme XI.

§ 27.

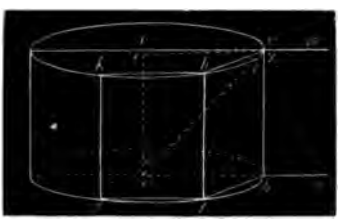
Si ac et bd sont $\llcorner ab$, et qu'on transporte $\wedge\ cab$ le long de $\overline{ab}$, on aura, en désignant par cd le chemin décrit par le point c,

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Soit, en effet, $de \llcorner ca$. Dans les triangles ade, adb, on a (§ 25)

$$\subset ed : \bigcirc ad : \bigcirc ab = \sin u : 1 : \sin v.$$

En faisant tourner $bacd$ autour de ac, le point b décrira $\bigcirc ab$,



et le point d décrira $\bigcirc ed$. Désignons ici par $\odot cd$ le chemin de la ligne cd. Soit, de plus, un polygone quelconque $bfg\ldots$, inscrit dans $\odot ab$. En menant par tous les côtés $bf, fg, \ldots$ des plans $\llcorner \odot ab$, on formera ainsi dans $\odot cd$ une figure polygonale d'un même nombre de côtés, et l'on pourra démontrer, comme au § 23, que l'on a

$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \cdots,$$

et par suite

$$dh + hk + \cdots : bf + fg + \cdots = cd : ab.$$

Si l'on fait tendre chacun des côtés $bf, fg, \ldots$ vers la limite zéro, il est clair que l'on aura

$$bf + fg + \cdots \backsim \bigcirc ab,$$

et

$$dh + hk + \cdots \backsim \bigcirc ed.$$

On a donc aussi

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = cd : ab.$$

Or, nous avions déjà

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = \sin u : \sin v.$$

Par conséquent

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Si ac s'éloigne de bd à l'infini, alors le rapport $cd : ab$, et par suite aussi le rapport $\sin u : \sin v$ restent *constants*. Or $u \backsim R$ (§ 1), et si $dm \parallel\!\parallel bn$, $v \backsim z$. Donc $cd : ab = 1 : \sin z$.

Nous désignerons ce chemin cd par $cd \parallel ab$.

§ 28.

Si $bn \parallel\!\parallel \measuredangle am$, et que c soit un point de $\overrightarrow{am}$, en posant $ac = x$, on aura (§ 23)

$$X = \sin u : \sin r.$$

Car cd et ae étant $\llcorner bn$, et $bf \llcorner am$, on aura (comme au § 27)

$$\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v.$$

Or, on a évidemment $bf = ae$. Donc

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin u : \sin v.$$

Mais dans les surfaces F de am et de cm, qui coupent $ambn$ suivant ab et cg, on a (§ 21)

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = ab : cg = X.$$

Donc aussi

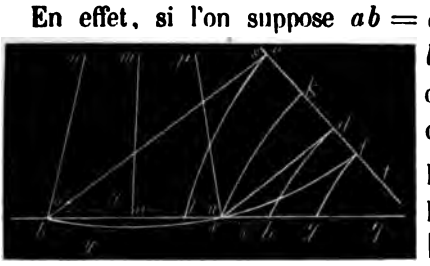
$$X = \sin u : \sin v.$$

§ 29.

Si $bam = R$, $ab = y$, et $bn \parallel\!\parallel\!\parallel am$, on aura, dans le système S,

$$Y = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u.$$

En effet, si l'on suppose $ab = ac$, $cp \parallel\!\parallel\!\parallel am$ (et par suite $bn \parallel\!\parallel\!\parallel \triangleq cp$), et $pcd = qcd$, on peut mener (§ 19) $ds \llcorner \overrightarrow{cd}$, de telle sorte que $ds \parallel\!\parallel\!\parallel cp$, et par suite (§ 1) $dt \parallel\!\parallel\!\parallel cq$. Si, de plus, $be \llcorner \overrightarrow{ds}$, alors (§ 7) $ds \parallel\!\parallel\!\parallel bn$; par conséquent (§ 6), $bn \parallel\!\parallel\!\parallel es$, et (à cause de $dt \parallel\!\parallel\!\parallel cg$), $bq \parallel\!\parallel\!\parallel et$. Donc (§ 1) $ebn = ebq$. Soit bcf une ligne L de bn, et fg, dh, ck, el des lignes L de ft, dt, cq, etc. On aura évidemment (§ 22) $hg = df = dk = hc$; partant $cg = 2\,ch = 2\,v$. Il est clair que l'on a de même $bg = 2\,bl = 2\,z$. Or $bc = bg - gc$; par suite $y = z - v$, d'où (§ 24) $Y = Z : V$. On a enfin (§ 28)



$$Z = 1 : \sin \tfrac{1}{2} u, \qquad V = 1 : \sin (R - \tfrac{1}{2} u).$$

Donc

$$Y = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u \text{ [*]}.$$

---

[*] L'angle u est celui que LOBATSCHEWSKY représente par $\Pi(ab)$. (Voyez *Études géométriques*, etc., n° 36.) *(H.)*

§ 30.

Il est facile de voir (d'après le § 25) que la résolution du problème de la *Trigonométrie plane*, dans le système S, exige l'expression de la circonférence au moyen du rayon. Or, c'est ce que l'on peut obtenir par la rectification de la ligne L.

Soient ab, cm, $c'm'$ des droites $\llcorner \overrightarrow{ac}$, et b un point quelconque de $\overrightarrow{ab}$. On aura (§ 25)

$$\sin u : \sin v = \bigcirc p : \bigcirc y,$$

$$\sin u' : \sin v' = \bigcirc p : \bigcirc y';$$

par conséquent,

$$\frac{\sin u}{\sin v} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\sin v'} \cdot \bigcirc y'.$$

Or, on a (§ 27)

$$\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'.$$

Donc

$$\frac{\sin u}{\cos u} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \cdot \bigcirc y',$$

ou

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \operatorname{tang} u' : \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'.$$

Soient, de plus, cn et $c'n'$ $\vert\vert\vert$ ab, et cd, $c'd'$ des lignes $L \llcorner \overline{ab}$. On aura encore (§ 21)

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r',$$

d'où

$$r : r' = \operatorname{tang} w : \operatorname{tang} w'.$$

Faisons croître p à partir de a jusqu'à l'infini : alors $w \backsim z$, $w' \backsim z'$; d'où il résulte aussi

$$r : r' = \operatorname{tang} z : \operatorname{tang} z'.$$

Désignons par i le rapport *constant* r : tang z (*indépendant* de r). Si l'on suppose $y \backsim 0$, alors

$$\frac{r}{y} = \frac{i \operatorname{tang} z}{y} \backsim 1,$$

et par suite

$$\frac{y}{\text{tang } z} \backsim i.$$

D'après le § 29, il vient

$$\text{tang } z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1}).$$

Donc

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \backsim i,$$

ou (§ 24)

$$\frac{2y \cdot I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \backsim i.$$

Or, on sait que la limite de cette expression, pour $y \backsim 0$, est $\frac{i}{\text{log nat } I}$. Donc

$$\frac{i}{\text{log nat } I} = i,$$

et par conséquent

$$I = e = 2{,}7182818\ldots,$$

nombre qui se présente encore ici d'une manière remarquable. En désignant désormais par i la droite dont le I est $= e$, on aura

$$r = i \text{ tang } z.$$

Nous avons d'ailleurs trouvé (§ 21) $\bigcirc y = 2\pi r$. Donc

$$\bigcirc y = 2\pi i \text{ tang } z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right) \text{ [*]}$$

$$= \frac{\pi y}{\text{log nat } Y} (Y - Y^{-1}) \text{ (§ 24)}.$$

§ 31.

Pour la résolution trigonométrique de tous les triangles rectilignes rectangles (d'où l'on déduit aisément celle des triangles

---

[*] Ou, en introduisant, pour plus de simplicité, la notation des fonctions hyperboliques,

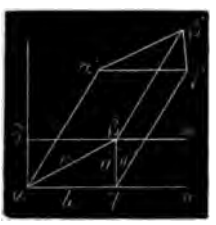
$$\bigcirc y = 2\pi i \text{ Sh } \frac{y}{i}.$$

rectilignes quelconques), dans le système S, il suffit de trois équations. Soient a, b les côtés de l'angle droit, c l'hypoténuse; α, β les angles respectivement opposés à a, b. Ces trois équations seront celles qui exprimeront des relations

I. Entre a, c, α;

II. Entre a, α, β;

III. Entre a, b, c.



De ces équations on tirera ensuite les trois autres par l'élimination.

I. Des §§ 25 et 30 il résulte

$$1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1})$$

$$= \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

équation entre c, a, α [*].

II. Du § 27 on tire (βm étant $|||\ \gamma n$)

$$\cos\alpha : \sin\beta = 1 : \sin u.$$

Or, on a (§ 29) $1 : \sin u = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$; donc

$$\cos\alpha : \sin\beta = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

équation entre α, β, a [**].

III. Soient $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$; $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma' \parallel \alpha\alpha'$ (§ 27), et $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$. On aura évidemment (comme au § 27)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(C + C^{-1}).$$

---

[*] $\sin\alpha\ \mathrm{Sh}\frac{c}{i} = \mathrm{Sh}\frac{a}{i}$.

[**] $\cos\alpha = \sin\beta\ \mathrm{Ch}\frac{a}{i}$.

Par conséquent,

$$\tfrac{1}{2}(C + C^{-1}) = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}).\ \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

ou

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right).\ \left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right),$$

équation entre a, b, c [*].

Si $\gamma\alpha\delta = R$, et qu'on ait $\beta\delta \llcorner \alpha\delta$, alors il viendra

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin\alpha,$$

et

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\gamma) = 1 : \cos\alpha.$$

En désignant donc par $\bigcirc x^2$, pour une valeur quelconque de x, le produit $\bigcirc x . \bigcirc x$, on aura évidemment

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Or, nous avons trouvé (§ 27 et § 31, II)

$$\bigcirc d = \bigcirc b.\ \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}).$$

Par conséquent [**]

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{\frac{b}{i}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)^2.\ \left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)^2,$$

autre relation entre a, b, c, dont le second membre se ramène aisément à une forme *symétrique* ou *invariable* [***].

Enfin, des équations

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}), \quad \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1})$$

---

[*] $\operatorname{Ch}\frac{c}{i} = \operatorname{Ch}\frac{a}{i}\operatorname{Ch}\frac{b}{i}.$

[**] $\operatorname{Sh}^2\frac{c}{i} = \operatorname{Ch}^2\frac{a}{i}\operatorname{Sh}^2\frac{b}{i} + \operatorname{Sh}^2\frac{a}{i}.$

[***] $\operatorname{Sh}^2\frac{c}{i} = \operatorname{Ch}^2\frac{a}{i}\operatorname{Ch}^2\frac{b}{i} - 1$

$= \operatorname{Sh}^2\frac{a}{i}\operatorname{Sh}^2\frac{b}{i} + \operatorname{Sh}^2\frac{a}{i} + \operatorname{Sh}^2\frac{b}{i}.$

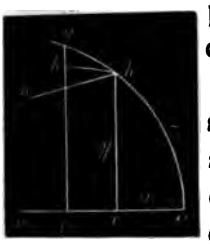
on tire (d'après II)

$$\cot\alpha\cot\beta = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}\right)\ [*],$$

équation entre α, β, c.

§ 32.

Il reste encore à montrer brièvement le moyen de résoudre les problèmes dans le système S. Après l'avoir expliqué sur les exemples les plus ordinaires, nous verrons enfin ce que peut donner cette théorie.



I. Soit $\overline{ab}$ une ligne dans le plan, et $y = f(x)$ son équation en coordonnées rectangulaires. Désignons par dz un accroissement quelconque de z, et par dx, dy, du les accroissements de x, de y et de l'aire u, correspondants à cet accroissement dz. Soit $bh \parallel cf$; exprimons (§ 31) $\frac{bh}{dx}$ au moyen de y, et cherchons la *limite* de $\frac{dx}{dy}$, lorsque dx tend vers la limite zéro (ce qui est toujours sous-entendu, lorsqu'on cherche de pareilles limites). On connaîtra alors la limite de $\frac{dy}{bh}$, et par suite tang hbg; et par conséquent (hbc ne pouvant évidemment être ni $>$, ni $< R$, et par suite étant $= R$), la *tangente* en b à la ligne bg sera déterminée au moyen de y.

II. On peut démontrer que l'on a

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} = 1.$$

On déduit de là la limite de $\frac{dz}{dx}$, et l'on en tire, par l'intégration, l'expression de z au moyen de x. Étant donnée une courbe réelle quelconque, on peut trouver son équation dans le système S. Cher-

---

[*] $\cot\alpha\cot\beta = \mathrm{Ch}\,\frac{c}{i}$.

chons, par exemple, l'équation d'une ligne L. Soit $\overrightarrow{am}$ l'axe de la ligne L; toute droite menée par a, autre que $\overrightarrow{am}$, rencontrant L (§ 19), la droite quelconque $\overrightarrow{cb}$, partant d'un point de $\overrightarrow{am}$, rencontrera L. Or, si bn est un axe, on a

$$X = 1 : \sin cbn \text{ (§ 28)},$$

$$Y = \cot \tfrac{1}{2}\, cbn \text{ (§ 29)},$$

d'où l'on tire

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1},$$

ou

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{a}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2a}{i}} - 1},$$

ce qui est l'équation cherchée [*]. On tire de là

$$\frac{dy}{dx} \sim X.\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\frac{bh}{dx} = 1 : \sin cbn = X.$$

Donc

$$\frac{dy}{bh} \sim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} \sim X^2.\,(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2.\,(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \sim X.\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\frac{dz}{dx} \sim X\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

---

[*] On peut écrire cette équation sous la forme

$$\mathrm{Ch}\,\frac{y}{i} = e^{\frac{a}{i}}.$$

d'où, en intégrant, on tire (comme au § 30)

$$z = i\,(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i \cot cbn\ [*].$$

III. On a évidemment

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{hfcbh}{dx}.$$

Si cette quantité n'est pas donnée en y, il faut l'exprimer au moyen de y, puis en tirer u par l'intégration.

En posant $ab = p$, $ac = q$, $cd = r$ et $cabd = s$, on pourra faire voir (comme dans II) que l'on a $\frac{ds}{dq} \sim r$, quantité égale à

$$\tfrac{1}{2}\,p\left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right),$$

d'où, en intégrant,

$$s = \tfrac{1}{2}\,pi\left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}\right)\ [**].$$

On peut aussi obtenir ce résultat sans intégration. Si l'on établit, par exemple, les équations du cercle (d'après le § 31, III), de la droite (d'après le § 31, II), d'une section conique (d'après ce qui précède), on pourra exprimer aussi les aires limitées par ces lignes.

On sait qu'une surface t, || à une figure plane p (à la distance q), est à p dans le rapport des secondes puissances des lignes homologues, c'est-à-dire dans le rapport de $\frac{1}{4}\left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1$. Il est aisé de voir, de plus, que le calcul du volume, traité de la même manière, exige deux intégrations (la différentielle elle-même ne pouvant se déterminer que par l'intégration). Il faut avant tout

---

[*] $z = i\ \mathrm{Sh}\ \frac{y}{i}$.

[**] $s = ip\ \mathrm{Sh}\ \frac{q}{i}$.

chercher le volume renfermé entre p et t, et l'ensemble de toutes les droites $\llcorner p$ et reliant les limites de p et de t. On trouve, pour le volume de ce solide (soit au moyen de l'intégration, soit autrement)

$$\frac{1}{8} pi \left(e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}} \right) + \frac{1}{2} pq \text{ [*]}.$$

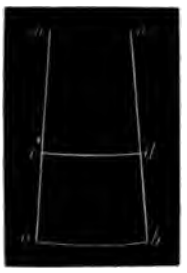
Les surfaces des corps peuvent aussi se calculer dans le système S, ainsi que les *courbures*, les *développées* et les *développantes* des lignes quelconques, etc. Quant à la courbure, dans le système S, ou elle sera la courbure de la ligne L elle-même, ou on la déterminera soit par le rayon d'un cercle, soit par la *distance* d'une droite à la courbe || à cette droite; et il est aisé de faire voir, d'après ce qui précède, qu'il n'y a pas, dans un plan, d'autres lignes uniformes que les lignes L, les lignes circulaires et les courbes || aux lignes droites.

IV. Pour le cercle, on a (comme dans III)

$$\frac{d \odot x}{dx} = \bigcirc x,$$

d'où (§ 29), en intégrant, on tire

$$\odot x = \pi i^2 \left(e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}} \right) \text{ [**]}$$



V. Soit $u = cabdc$ l'aire comprise entre une ligne L, $ab = r$, une || à cette ligne $cd = y$, et les droites $ac = bd = x$. On a

$$\frac{du}{dx} = y, \quad \text{et (§ 24)} \quad y = re^{-\frac{x}{i}},$$

d'où, en intégrant,

$$u = ri \left(1 - e^{-\frac{x}{i}} \right).$$

---

[*] $\frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} i \operatorname{Sh} \frac{2q}{i} + q \right)$.

[**] $\odot x = 4 \pi i^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{x}{2i}$.

Si x croît jusqu'à l'infini, alors, dans le système S, $e^{-\frac{u}{i}} \backsim 0$, et par suite

$$u \backsim ri.$$

C'est cette limite que nous appellerons la *grandeur* de $mabn$.

On verra de la même manière que, si p est une figure tracée sur F, l'espace compris entre p et l'ensemble des axes menés par les divers points du contour de p est égal à $\frac{1}{2} pi$.

VI. Soient $2u$ l'angle au centre de la calotte sphérique z, p la circonférence d'un grand cercle, et x l'arc fc, correspondant à l'angle u. On aura (§ 25)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc bc,$$

d'où

$$\bigcirc bc = p \sin u.$$

On a d'ailleurs

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \qquad dx = \frac{p\,du}{2\pi}.$$

De plus,

$$\frac{dz}{dx} \backsim \bigcirc bc,$$

$$\frac{dz}{du} \backsim \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

et, en intégrant,

$$z = \frac{\text{sin verse } u}{2\pi} p^2.$$

Imaginons la surface F sur laquelle est située la circonférence p (passant par le milieu f de la calotte). Menons par af et ac les plans $\overrightarrow{fem}$, $\overrightarrow{cem}$, perpendiculaires à F, et coupant F suivant feg, ce; et considérons la ligne L, cd (menée par c perpendiculairement à feg), et la ligne L, cf. On aura (§ 20) $cef = u$, et (§ 21) $\frac{fd}{p} = \frac{\text{sin verse } u}{2\pi}$, d'où $z = fd.\ p$. Or (§ 21) $p = \pi.\ fdg$; donc

$z\,\pi.\,fd.\,fdg$. Mais (§ 21) $fd.\,fdg = fc.\,fc$; par conséquent,

$$z = \pi.\,fc.\,fc = \odot fc, \text{ dans } F.$$

Soit maintenant $b; = cj = r$; on aura (§ 30)

$$2r = i\,(Y - Y^{-1}),$$

d'où (§ 21)

$$\odot 2r \text{ (dans } F) = \pi i^2\,(Y - Y^{-1})^2.$$

On a aussi (IV)

$$\odot 2y = \pi i^2\,(Y^2 - 2 + Y^{-2}).$$

Donc $\odot 2r$ (dans F) $= \odot 2y$, et par suite *la surface z du segment de sphère est égale au cercle décrit avec la corde fc comme rayon.*

Donc la sphère totale a pour surface

$$\odot fg = fdg.\,p = \frac{p^2}{\pi},$$

et les surfaces des sphères sont entre elles comme les secondes puissances des circonférences de leurs grands cercles.

VII. On trouve de même que, dans le système S, le volume de la sphère de rayon x est égal à

$$\tfrac{1}{2}\,\pi i^2\,(X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x \text{ [*]}.$$

La surface engendrée par la révolution de la ligne cd autour de ab est égale à

$$\tfrac{1}{2}\,\pi ip\,(Q^2 - Q^{-2}) \text{ [**]},$$

et le solide engendré par $cabdc$ est égal à

$$\tfrac{1}{4}\,\pi i^2 p\,(Q - Q^{-1})^2 \text{ [***]}.$$

---

[*] $\pi i^3 \operatorname{Sh} \dfrac{2x}{i} - 2\pi i^2 x.$

[**] $\pi ip \operatorname{Sh} \dfrac{2q}{i}.$

[***] $\pi i^2 p \operatorname{Sh}^2 \dfrac{\quad}{\quad}.$

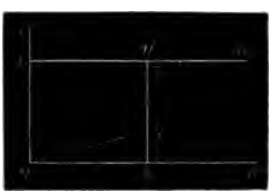
deux côtés donnés, à moins que l'on ne déterminât les quantités X, Y. Pour cela, il faudrait que l'on eût *sous forme concrète* quelque longueur a dont le A fût connu. Alors i serait l'*unité naturelle de longueur* (comme e est la base des logarithmes *naturels*). Si l'existence de cette quantité i est supposée reconnue, nous verrons comment on peut la construire, au moins avec une grande approximation, pour la pratique.

IV. Dans le sens expliqué (I et II), on pourra évidemment appliquer partout la méthode analytique moderne (si utile, lorsqu'on l'emploie dans des limites convenables).

V. Enfin, le lecteur ne sera pas fâché de voir que, dans le cas où c'est le système S, et non le système Σ, qui a réellement lieu, on peut construire une figure rectiligne égale à un cercle.

§ 34.

Par d, on mènera $dm \parallel\!\!\parallel an$ de la manière suivante. Du point d abaissons $db \perp an$; en un point quelconque a de la droite $\overline{ab}$,



élevons $ac \perp an$ (dans le plan dba), et abaissons $de \perp ac$. On aura (§ 27)

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = 1 : \sin z,$$

pourvu que dm soit $\parallel\!\!\parallel bn$. Or, $\sin z$ n'est pas > 1; donc ab n'est pas $> de$. Donc un quadrant décrit du centre a dans bac, avec un rayon $= de$, aura un point b ou o commun avec $\overrightarrow{bd}$. Dans le premier cas, on a évidemment $z = R$. Dans le second cas, on aura (§ 25)

$$\bigcirc ao\ (= \bigcirc ed) : \bigcirc ab = 1 : \sin aob,$$

et par suite $z = aob$. Si donc on prend $z = aob$, dm sera $\parallel\!\!\parallel bn$.

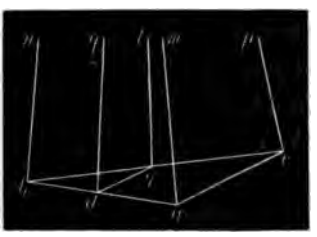
§ 35.

Si c'est le système S qui a lieu, on pourra, comme il suit, mener une droite $\perp$ à l'un des côtés d'un angle aigu, et qui soit en même temps $\parallel\!\!\parallel$ à l'autre côté.

§ 37.

Sur $\overline{am}$ ||| bn il se trouve un point a, tel qu'on a $am \triangleq bn$.

Si (d'après le § 34) on construit, hors de $\overrightarrow{nbm}$, gt ||| bn, et qu'on fasse $bg \perp gt$, $gc = gb$, et cp ||| gt; soit mené $\overrightarrow{tgd}$ de telle manière qu'il fasse avec $\overrightarrow{tgb}$ un angle égal à celui que fait $\overrightarrow{pca}$ avec $\overrightarrow{pcb}$. Cherchons ensuite (§ 36) l'intersection $\overline{dq}$ de $\overrightarrow{tgd}$ avec $\overrightarrow{nba}$, et soit enfin $ba \perp dq$.

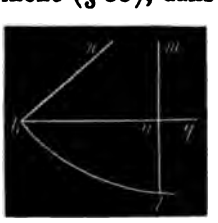


On aura, à cause de la similitude des triangles de lignes L tracés sur le F de bn (§ 21), $db = da$, et $am \triangleq bn$.

Il est facile d'en conclure que, des lignes L étant données par leurs seules extrémités, on peut obtenir de cette manière, dans F, une quatrième proportionnelle, ou une moyenne proportionnelle, et exécuter, sans recourir à l'Axiôme XI, toutes les constructions géométriques qui se font sur le plan dans le système Σ. Ainsi, par exemple, on pourra diviser géométriquement $4\,R$ en un nombre quelconque de parties égales, si l'on sait faire cette division dans le système Σ.

§ 38.

Si l'on construit (§ 37) par exemple, $nbq = \frac{1}{3}\,R$, et qu'on mène (§ 35), dans le système S, $am \perp \overrightarrow{bq}$ et ||| bn; si l'on détermine, de plus (§ 37), $jm \triangleq bn$, on aura, en posant $ja = x$ (§ 28),



$$X = 1 : \sin \tfrac{1}{3}\,R = 2,$$

et x sera construit *géométriquement*. On peut calculer nbq de manière que ja diffère de i aussi peu que l'on voudra, ce qui aura lieu pour sin $nbq = \frac{1}{\infty}$.

§ 39.

Si (dans un plan) pq et st sont || à la droite mn (§ 27), et

§ 41.

Des triangles équivalents abc, def ont des sommes d'angles égales.

Menons mn par les milieux de ac et de bc, et pq par les milieux de df et de fe; et soient $rs \parallel mn$, $to \parallel pq$. La perpendiculaire ag à rs sera égale à la perpendiculaire dh à to, ou elle en différera; par exemple, dh sera la plus grande. Dans chacun de ces deux cas, la $\bigcirc df$, décrite du centre a, aura avec $\overrightarrow{gs}$ quelque point commun k, et alors (§ 39) on aura $\Delta\, abk = \Delta\, abc = \Delta\, def$. Or, le $\Delta\, akb$ (§ 40) a même somme d'angles que le $\Delta\, def$, et (§ 39) même somme d'angles que le $\Delta\, abc$. Donc les triangles abc, def ont même somme d'angles.

Dans le système S, la réciproque de ce théorème est vraie. Soient, en effet, abc, def deux triangles ayant même somme d'angles, et $\Delta\, bal = \Delta\, def$. Ces derniers triangles auront, d'après ce qui précède, la même somme d'angles, et il en sera par suite de même des triangles abc, abl. Il résulte de là évidemment

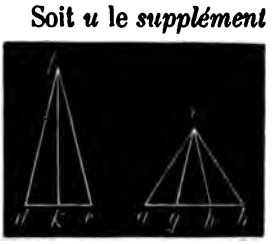
$$bcl + blc + cbl = 2\,R.$$

Or (§ 31) la somme des angles de tout triangle, dans le système S, est $< 2\,R$. Donc l tombe nécessairement en c.

§ 42.

Soit u le *supplément* à $2\,R$ de la somme des angles du $\Delta\, abc$, v le *supplément* à $2\,R$ de la somme des angles du $\Delta\, def$. On aura

$$\Delta\, abc : \Delta\, def = u : v.$$



Soit, en effet, p la valeur commune de chacun des triangles acg, gch, hcb, dfk, kfe, et soit $\Delta\, abc = mp$, $\Delta\, def = np$. Désignons par s la

somme des angles d'un quelconque des triangles égaux à p. On aura évidemment $2R - u = ms - (m-1).2R = 2R - m(2R-s)$, et $u = m(2R-s)$; de même $v = n(2R-s)$. Donc $\Delta abc : \Delta def = m : n = u : v$. La démonstration s'étend sans peine au cas de l'incommensurabilité des triangles abc, def.

On démontre de la même manière que les triangles sur la surface de la sphère sont entre eux comme les excès des sommes de leurs angles sur $2R$. Si deux des angles du Δ sphérique sont droits, le troisième z sera l'*excès* en question. Or, en désignant par p la circonférence d'un grand cercle, ce Δ est évidemment $= \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{p^2}{2\pi}$ (§ 32, VI). Par conséquent, un triangle quelconque dont l'excès des angles sur $2R$ est z, est $= \frac{zp^2}{4\pi^2}$.

§ 43.

Ainsi, dans le système S, l'aire d'un Δ rectiligne s'exprime au moyen de la somme des angles. Si ab croît jusqu'à l'infini, alors (§ 42) le rapport $\Delta abc : (R-u-v)$ sera constant. Or $\Delta abc = bacn$ (§ 32, V), et $R-u-v = z$ (§ 1). Donc

$$bacn : z = \Delta abc : (R-u-v) = bac'n' : z'.$$

On a, de plus, évidemment (§ 30)

$$bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang } z : \text{tang } z'.$$

Or, pour $y' = 0$, on a

$$\frac{bd'c'n'}{bac'n'} = 1, \text{ et aussi } \frac{\text{tang } z'}{z'} = 1.$$

Par conséquent,

$$bdcn : bacn = \text{tang } z : z.$$

Mais nous avons trouvé (§ 32)

$$bdcn = r.i = i^2 \text{ tang } z.$$

Donc

$$bacn = z.\ i^2.$$

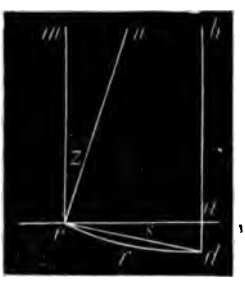
En désignant désormais, pour abréger, par Δ tout triangle dont le supplément de la somme des angles est z, nous aurons ainsi

$$\Delta = z.\ i^2.$$

On conclut de là facilement que, si $or \parallel\!\!\parallel am$ et $ro \parallel\!\!\parallel ab$, l'*aire* comprise entre $\overline{or}$, $\overline{st}$, $\overline{bc}$ (laquelle est évidemment la limite absolue de l'aire des triangles rectilignes indéfiniment croissants, ou la limite de Δ pour $z \backsim 2\ R$), sera égale à $\pi i^2 = \odot i$ (dans F). En désignant cette limite par $\square$, on aura encore (§ 30)

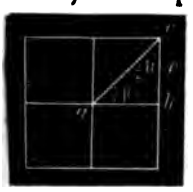
$$\pi i^2 = \text{tang}^2 z.\ \square = \odot r \text{ (dans } F) \text{ (§ 21)}$$
$$= \odot s \text{ (§ 32, VI)},$$

en représentant la corde cd par s. Si maintenant, au moyen d'une perpendiculaire élevée sur le milieu du rayon donné s du cercle dans un plan (ou du rayon de forme L du cercle dans F), on construit (§ 34) $db \parallel\!\!\parallel \measuredangle cn$; en abaissant $ca \perp db$, et élevant $cm \perp ca$, on aura z; d'où (§ 37), en prenant arbitrairement un rayon de forme L pour unité, *on pourra déterminer géométriquement* $\text{tang}^2 z$, *au moyen de deux lignes uniformes de même courbure* (lesquelles, leurs seules extrémités étant données, et leurs axes construits, pourront évidemment être traitées comme des droites dans la recherche de leur commune mesure, et équivaudront sous ce rapport à des droites).



On peut, en outre, construire comme il suit un quadrilatère, par exemple, un quadrilatère régulier, d'aire $= \square$. Soit $abc = R$, $bac = \frac{1}{2} R$, $acb = \frac{1}{4} R$, et $bc = x$. On pourra exprimer X (§ 31, II) par de simples racines carrées, et le construire (§ 37).

Connaissant X, on pourra déterminer x (§ 38, ou encore §§ 29 et 35). L'octuple du $\Delta\ abc$ est évidemment $= \square$, et par là *un*



cercle plan se trouve carré géométriquement au moyen d'une figure rectiligne et de lignes uniformes de même espèce (c'est-à-dire de lignes équivalentes à des droites quant à leur comparaison entre elles). Un cercle de la surface F est planifié de la même manière; alors ou l'Axiôme XI d'Euclide est vrai, ou l'on a la quadrature géométrique du cercle, quoique rien jusqu'ici ne décide laquelle des deux propositions a réellement lieu.

Toutes les fois que $\text{tang}^{\circ} z$ est ou un nombre entier, ou un nombre fractionnaire rationnel, dont le dénominateur (après réduction à la plus simple expression) est ou un nombre premier de la forme $2^m + 1$ (dont $2 = 2^0 + 1$ est un cas particulier), ou un produit d'autant de nombres premiers de cette forme que l'on voudra, dont chacun (à l'exception de 2, qui peut seul entrer un nombre quelconque de fois) n'entre qu'*une seule fois* comme facteur; on pourra, par la théorie des polygones donnée par Gauss (et pour de telles valeurs de z seulement), construire une figure rectiligne $= \text{tang}^{\circ} z = \odot s$. Car la division de $\square$ (le théorème du § 42 s'étendant facilement à des polygones quelconques) exige évidemment le partage de $2R$, lequel (comme on peut le démontrer) n'est possible géométriquement que sous la condition précédente. Dans tous les cas pareils, ce qui précède conduit facilement au but; et toute figure rectiligne peut être transformée géométriquement en un polygone régulier de n côtés, si n est de la forme indiquée par Gauss.

Il resterait encore, pour compléter entièrement nos recherches, à démontrer l'impossibilité de décider (sans avoir recours à quelque hypothèse) si c'est le système Σ, ou quelqu'un des systèmes S (et lequel) qui a lieu réellement. C'est ce que nous réserverons pour une occasion plus favorable.

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT,

PAR W. BOLYAI.

(*Tentamen*, t. II, p. 380 et suiv.)

Qu'il me soit permis d'ajouter ici quelques remarques appartenant à l'auteur de l'*Appendice*, qui voudra bien me pardonner si je n'ai pas toujours bien rendu sa pensée.

Les formules de la Trigonométrie sphérique (démontrées dans le Mémoire précédent, indépendamment de l'Axiôme XI d'Euclide) *coïncident avec les formules de la Trigonométrie plane, lorsque l'on considère* (pour nous servir d'une façon de parler provisoire) *les côtés d'un triangle sphérique comme réels, ceux d'un triangle rectiligne comme imaginaires;* de sorte que, lorsqu'il s'agit des formules trigonométriques, on peut regarder le plan comme une sphère imaginaire, en prenant pour sphère réelle celle dans laquelle $\sin R = 1$.

On démontre (§ 30) qu'il existe une certaine quantité i (dans le cas où l'Axiôme d'Euclide n'a pas lieu), telle que la quantité correspondante I est égale à la base e des logarithmes naturels. Dans ce cas, on établit encore (§ 31) les formules de la Trigonométrie plane, et de telle manière (§ 32, VII) que les formules sont encore vraies pour le cas de la réalité de l'axiôme en question, en prenant les limites des valeurs pour $i = \infty$. Ainsi le système euclidien est en quelque sorte la limite du système anti-euclidien pour $i = \infty$. Prenons, dans le cas de l'existence de i, l'unité $= i$, et étendons les définitions des sinus et des cosinus aux arcs imaginaires, de sorte que, p désignant un arc soit réel, soit imaginaire, l'expression

$$\frac{e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}}{2}$$

soit toujours appelée le *cosinus* de p, et l'expression

$$\frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

le *sinus* de p.

On aura alors, pour q réel,

$$\frac{e^q - e^{-q}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \sin(-q\sqrt{-1}) = -\sin(q\sqrt{-1}),$$

et de même

$$\frac{e^q + e^{-q}}{2} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2}$$

$$= \cos(-q\sqrt{-1}) = \cos(q\sqrt{-1}),$$

en admettant que, dans le cercle imaginaire comme dans le cercle réel, les sinus de deux arcs égaux et de signe contraire soient égaux et de signe contraire, et que les cosinus de deux arcs égaux et de signe contraire soient égaux et de même signe.

On démontre, au § 25, d'une manière absolue, c'est-à-dire indépendamment de l'axiôme en question, que, dans tout triangle rectiligne, *les sinus des angles sont entre eux comme les circonférences qui ont pour rayons les côtes opposés à ces angles.* On démontre en outre, pour le cas de l'existence de la quantité i, que la circonférence de rayon y est égale à $\pi i\left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right)$, ce qui, pour $i = 1$, devient $\pi\left(e^{y} - e^{-y}\right)$.

Par suite (§ 31), dans un Δ rectiligne rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b, et l'hypoténuse c, et dont les angles opposés aux côtés a, b, c sont α, β, R, on a (pour $i = 1$) :

D'après I,

$$1 : \sin\alpha = \pi\left(e^{c} - e^{-c}\right) : \pi\left(e^{a} - e^{-a}\right),$$

et par conséquent,

$$1 : \sin\alpha = \frac{e^{c} - e^{-c}}{2\sqrt{-1}} : \frac{e^{a} - e^{-a}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= -\sin(c\sqrt{-1}) : -\sin(a\sqrt{-1})$$

$$= \sin(c\sqrt{-1}) : \sin(a\sqrt{-1});$$

D'après II,

$$\cos\alpha : \sin\beta = \cos(a\sqrt{-1}) : 1;$$

D'après III,

$$\cos(c\sqrt{-1}) = \cos(a\sqrt{-1}).\cos(b\sqrt{-1}).$$

Ces formules, comme toutes les formules de Trigonométrie plane qui en découlent, coïncident complètement avec les formules de la Trigonométrie sphérique, à cela près que si, par exemple, les côtés et les angles d'un Δ rectiligne rectangle sont désignés par les mêmes lettres que ceux d'un Δ sphérique rectangle, les côtés du Δ rectiligne devront être divisés par $\sqrt{-1}$ pour que l'on obtienne les formules relatives au Δ sphérique.

Il vient ainsi, pour un Δ sphérique,

par I, $1 : \sin\alpha = \sin c : \sin a;$

par II, $1 : \cos a = \sin\beta : \cos\alpha;$

par III, $\cos c = \cos a \cos b.$

Le lecteur pouvant se trouver arrêté par l'omission d'une démonstration (p. 233), il ne sera pas inutile de faire voir, par exemple, comment de l'équation

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

on déduit la formule

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

ou le théorème de Pythagore pour le système euclidien. C'est pro-

REMARQUE. — Le rayon de la sphère dans laquelle le sinus total $1 = i$ est l'ordonnée y d'une ligne L, égale à $i = 1$ et menée par une des extrémités de L perpendiculairement à l'axe passant par l'autre extrémité. Car, dans la surface appelée F (§ 21), *toute la Géométrie euclidienne a lieu, les lignes L jouant le rôle des lignes droites;* et pour un rayon de forme L égal à 1, lequel sera le sinus total dans F, le rayon de la même circonférence dans son plan sera le y en question; ce qui s'applique facilement à la sphère imaginaire à laquelle le plan se ramène dans le système anti-euclidien.

(*Kurzer Grundriss u. v. w.*, p. 82).

Lobatschewsky et l'Auteur de l'*Appendix* considèrent l'un et l'autre deux points a, b de la sphère-limite et les axes correspondants $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$ (§ 23). Ils démontrent que, si α, β, γ désignent les arcs de cercle-limite ab, cd, hl, séparés par les segments d'axe $ac = 1$, $ah = x$, on a

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x.$$

Lobatschwesky représente la valeur de $\frac{\gamma}{\alpha}$ par e^{-x}, e ayant une valeur quelconque > 1, dépendante de l'unité de longueur qu'on a choisie, et pouvant être supposée égale à la base népérienne.

L'auteur de l'*Appendix* est conduit directement à introduire la base des logarithmes naturels. Si l'on pose $\frac{\alpha}{\beta} = \delta$, et que γ, γ' soient des arcs situés aux distances y, i de α, on aura

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \delta^y = Y, \qquad \frac{\alpha}{\gamma'} = \delta^i = I,$$

d'où

$$Y = I^{\frac{y}{i}}.$$

Il démontre ensuite (§ 29) que, si u est l'angle que fait une droite

avec la perpendiculaire y à sa parallèle, on a

$$Y = \cot \tfrac{1}{2} u.$$

Si l'on pose donc $z = \frac{\pi}{2} - u$, il viendra

$$Y = \operatorname{tang}\left(z + \tfrac{1}{2} u\right) = \frac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} \frac{1}{2} u}{1 - \operatorname{tang} z \operatorname{tang} \frac{1}{2} u},$$

d'où l'on tire, en ayant égard à la valeur de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = Y^{-1}$,

$$\operatorname{tang} z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(I^{\frac{y}{i}} - I^{-\frac{y}{i}}\right) \text{ (§ 30)}.$$

Si maintenant y est la demi-corde de l'arc de cercle-limite $2r$, on prouve (§ 30) que $\frac{r}{\operatorname{tang} z} =$ constante. En représentant par i cette constante, et faisant tendre y vers zéro, on aura $\frac{2r}{2y} = 1$, d'où

$$2y = 2i \operatorname{tang} z = i \frac{I^{\frac{2y}{i}} - 1}{I^{\frac{y}{i}}},$$

ou en posant $\frac{2y}{i} = k$, $I = e^l$,

$$k l^{\frac{y}{i}} = e^{kl} - 1 = kl(1 + \omega),$$

ω étant infiniment petit en même temps que k. Donc, à la limite, $1 = l$, et par suite $I = e$.

La circonférence tracée sur la sphère-limite avec l'arc r de courbe-limite pour rayon, a pour longueur $2\pi r$. Donc

$$\bigcirc y = 2\pi r = 2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i (Y - Y^{-1}).$$

Dans le Δ rectiligne où α, β désignent les angles opposés aux côtés a, b, on a (§ 25)

$$\sin\alpha : \sin\beta = \bigcirc a : \bigcirc b = \pi i (A - A^{-1}) : \pi i (B - B^{-1})$$
$$= \sin\left(a\sqrt{-1}\right) : \sin\left(b\sqrt{-1}\right).$$

Ainsi dans la Trigonométrie plane comme dans la Trigonométrie

sphérique, les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés, si ce n'est que, sur la sphère, les côtés sont réels, et que dans le plan on doit les considérer comme imaginaires, de même que si le plan était une sphère imaginaire.

On peut arriver à cette proposition sans avoir déterminé préalablement la valeur de I. Si l'on désigne, en effet, la constante $\frac{r}{\text{tang } z}$ par q, on aura, comme précédemment,

$$\bigcirc y = \pi q (Y - Y^{-1}),$$

d'où l'on déduit la même proportion que ci-dessus, en prenant pour i la distance pour laquelle le rapport I est égal à e.

Si l'axiôme XI n'est pas vrai, il existe un i déterminé, qu'il faut substituer dans les formules. Si, au contraire, cet axiôme est vrai, il faudra faire dans les formules $i = \infty$. Car, dans ce cas, la quantité $\frac{\alpha}{\gamma} = Y$ est toujours $= 1$, la sphère-limite étant un plan, et les axes étant des parallèles dans le sens d'Euclide. L'exposant $\frac{y}{i}$ doit donc être nul, et par suite $i = \infty$.

Il est facile de voir que nos formules de Trigonométrie plane s'accordent avec celles de Lobatschewsky. Prenons, par exemple la formule de l'art. 37, p. 116,

$$\text{tang } \Pi(a) = \sin B \text{ tang } \Pi(p),$$

a étant l'hypoténuse d'un Δ rectangle, p un côté de l'angle droit, et B l'angle opposé à ce côté. Notre formule du § 31, I, donne

$$1 : \sin B = (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}).$$

Or, en faisant, pour abréger, $\frac{1}{2}\Pi(k) = k'$, on a

$$\begin{aligned} \text{tang } 2p' : \text{tang } 2a' &= (\cot a' - \text{tang } a') : (\cot p' - \text{tang } p') \\ &= (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}) \\ &= 1 : \sin B. \end{aligned}$$

UN PUITS

DOIT-IL ÊTRE OUVERT OU FONCÉ?

PAR M. LOUIS ORDINAIRE DE LACOLONGE.

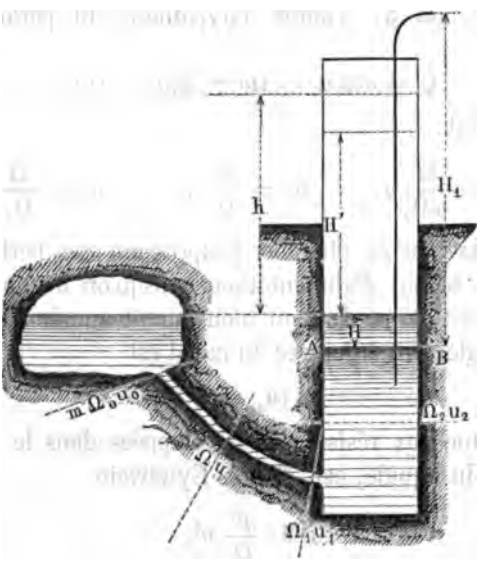
Depuis environ deux ans, M. Donnet, ancien élève des écoles d'arts et métiers, a conçu la pensée d'augmenter le débit des puits en les fonçant. Il soustrait ainsi le liquide intérieur à l'action directe de la pression atmosphérique. Une première application, faite vers la fin de 1865, à l'hôpital militaire de Lyon, situé sur le quai du Rhône, a donné de bons résultats. Une seconde a eu lieu à l'Exposition, sur les berges de la Seine. Elle a été également heureuse. Divers recueils scientifiques (1) ont parlé de ces essais et jugé l'appareil d'une façon, à notre avis, trop absolue dans un sens ou dans l'autre. Nous avons pensé qu'en mettant le problème en équation, et laissant parler la logique des formules, on arriverait à connaître la véritable valeur de l'invention de M. Donnet. Tel est le but de cette notice.

Un puits est une cavité artificielle, mise, par des canaux naturels et souterrains, en communication avec une cavité également naturelle et contenant de l'eau. Lorsque tout est au repos, dans l'une et l'autre, le liquide s'y tient au même niveau. Si une pompe aspire le liquide dans le puits, le niveau s'y abaisse; car, pour y arriver depuis le réservoir souterrain, il faut que l'eau traverse les canaux. Ils opposent à son mouvement une certaine résistance. Pour la vaincre et pénétrer dans le puits avec une vitesse appréciable, il est indispensable que l'eau soit, dans le réservoir, soumise à un excès de pression suffisant pour obtenir ce double

---

(1) *Les Mondes* des 27 juin et du 18 juillet 1867. Le *Bulletin de la Société des anciens élèves des écoles d'arts et métiers* de juillet 1867.

résultat. Cet excès de pression est mesuré par la différence H des deux niveaux.



Après avoir rappelé ces considérations fort élémentaires, désignons par :

Q Le volume d'eau extrait par la pompe dans une seconde,
Δ la densité de cette eau, dont le poids est donc ΔQ,
M sa masse $\frac{\Delta Q}{g}$,
g comme d'habitude, l'intensité de la pesanteur,
Ω_0 la section du canal souterrain à son origine dans le réservoir d'alimentation.
u_0 la vitesse avec laquelle le liquide traverse cette section.
m le coëfficient de contraction à l'entrée de cet orifice.
Ω la section moyenne du canal,
u la vitesse moyenne du liquide dans ce canal,
Ω_1 la section extrême du canal à son débouché dans le puits,
u_1 la vitesse du liquide qui la traverse,
Ω_2 la section du puits,
u_2 la vitesse dont le liquide est animé en s'élevant dans le puits.

Supposons le bassin d'alimentation souterrain assez grand pour

que le niveau y reste constant, et la vitesse assez petite pour être négligée par rapport à celle dans le canal.

Ceci posé, on a, d'après l'hypothèse du parallélisme des tranches,

$$Q = m\Omega_0 u_0 = \Omega u = \Omega_1 u_1 = \Omega_2 u_2.$$

d'où on conclut :

$$u_0 = \frac{\Omega}{m\Omega_0} u, \qquad u_1 = \frac{\Omega}{\Omega_1} u, \qquad u_2 = \frac{\Omega}{\Omega_2} u.$$

Il n'y a pas lieu de chercher l'expression des pertes de force vive dans le bassin d'alimentation, puisqu'on a supposé que le liquide n'y était animé d'aucun mouvement appréciable. La perte due à l'étranglement à l'entrée du canal est

$$M (u_0 - u)^2.$$

La perte due aux résistances développées dans le canal par le mouvement du liquide, est, d'après Eytelwein

$$M\beta \frac{pl}{\Omega} u^2,$$

expression dans laquelle p est le périmètre de la section moyenne du canal; l sa longueur; β un coefficient fixe qui a été déterminé par l'expérience.

La perte due au changement brusque de vitesse, quand l'eau pénètre dans le puits, est

$$M (u_1 - u_2)^2.$$

La pression atmosphérique agit également sur la surface du liquide dans le réservoir et dans le puits. Les choses se passent donc comme si elle n'agissait point, et la différence des pressions qui sollicitent les deux nappes est uniquement mesurée par une colonne d'eau, haute de H. Le travail d'un volume d'eau Q, descendant de cette hauteur, est MgH.

La variation de la force vive, pendant que la masse M se transporte d'une extrémité du canal à l'autre, est

$$M (u^2_0 - u_1^2).$$

Ceci posé, on a, d'après le principe des forces vives

$$\frac{M}{2}(u^2_0 - u_1^2) = Mg\mathrm{H} - \frac{M}{2}(u_0 - u)^2 - \frac{M}{2}\frac{\beta pl}{\Omega} u^2 - \frac{M}{2}(u_1 - u_2)^2$$

qui, en y remplaçant u_0, u_1, u_2 par leurs valeurs ci-dessus, en fonction des sections et de u, puis divisant de part et d'autre par M, devient

$$\left\{\Omega^2\left(\frac{1}{m^2\Omega_0^2}-\frac{1}{\Omega_1^2}\right)+\left(\frac{\Omega}{m\Omega_0}-1\right)^2+\frac{\beta pl}{\Omega}+\Omega^2\left(\frac{1}{\Omega_1}-\frac{1}{\Omega_2}\right)^2\right\}u^2=2gH$$

Supposons actuellement que, pour une cause quelconque, le canal, sans changer de longueur, s'agrandisse proportionnellement sur tout son parcours, la section nouvelle, sur un point quelconque, étant semblable à l'ancienne. Admettons, en outre, que le bassin d'alimentation et le puits restent ce qu'ils étaient avant.

Le premier et le second terme de la parenthèse du premier membre de la précédente équation restent les mêmes. Le quatrième devient plus petit, puisque, du rapport constant $\frac{\Omega}{\Omega_1}$, il faut en retrancher un autre $\frac{\Omega}{\Omega_2}$, qui a augmenté, car le numérateur Ω s'est accru, le dénominateur Ω_2 ne changeant pas.

Le troisième terme contient deux quantités invariables, β et l, et deux autres p, Ω qui sont devenues plus grandes. Désignons par π et ω leurs nouvelles valeurs. Leur rapport est $\frac{p}{\Omega}\cdot\frac{\omega}{\pi}$; or, les aires des surfaces semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues, et par conséquent des périmètres, on a

$$\frac{p}{\Omega}\cdot\frac{\omega}{\pi}=\frac{\pi}{p}$$

π étant, par hypothèse, plus grand que p, ce rapport est plus grand que 1, et on a

$$\beta l\cdot\frac{p}{\Omega}>\beta l\frac{\pi}{\omega}$$

Il en résulte que si, dans l'équation déduite du principe des forces vives, on représente par θ l'ensemble des termes entre parenthèses, on pourra poser

$$\theta u^2=2gH$$

et que, si les canaux s'agrandissent proportionnellement, comme

on l'a supposé, cette dernière équation deviendra

$$\theta' U^2 = 2gH$$

θ' étant moindre que θ, et U plus grand que u, si H reste invariable.

Ceci démontré, reprenons les choses dans l'état habituel, le puits ouvert, les canaux non élargis, la dénivellation égale à H, le débit égal à Q, et une pompe élevant, par seconde, ce volume à une hauteur H. D'après ce qui précède, la vitesse dans les canaux est

$$(1) \qquad u^2 = \frac{2gH}{\theta},$$

le débit

$$(2) \qquad Q = \Omega u,$$

et le travail de la pompe que nous désignerons par T.

$$(3) \qquad T = \Delta Q H_1.$$

Supposons actuellement le puits modifié d'après la méthode de M. Donnet, et muni, au niveau du liquide en repos, ou plus bas, si on veut, d'un obturateur étanche. La pompe tend à faire le vide au-dessus de la nappe d'eau et à la soustraire à l'action de la pression atmosphérique; absolument comme si les parois du puits, élevées à 10^{m}30 au-dessus de cette nappe, formaient un tube hermétique, dans lequel on eût produit le vide barométrique. Dans les calculs suivants, on admettra qu'il en est ainsi, ce qui rendra le langage plus simple et les explications plus faciles.

Tout étant au repos, le liquide, dans le puits hermétique, se tiendra à une hauteur :

$$h = 10,^m30$$

au-dessus de celui du bassin d'alimentation.

Remettons la pompe en mouvement. Une fois le régime établi, le débit est de Q' par seconde, et le niveau s'abaisse à une hauteur H' au-dessus du bassin souterrain, pris pour plan de comparaison. La pression sur ce plan est, dans le puits, mesuré par une colonne d'eau de H'; dans le réservoir souterrain, elle est égale à celle de l'atmosphère, qui se mesure par une colonne d'eau haute de h. La masse

$$M' = \frac{\Delta Q'}{g}$$

qui se meut sous l'action de ces pressions, développe donc une quantité de travail $M'g\,(h-H')$, et on peut, en raisonnant comme précédemment, poser :

$$\frac{1}{2}\,M'\theta' u'^2 = \Delta Q'\,(h - H')$$

θ' différant de θ, puisque l'on n'a pas spécifié si les canaux s'étaient modifiés ou non; u' désignant la vitesse inconnue de l'eau parcourant les voies souterraines, dans ces nouvelles conditions. On en tire

$$(4) \qquad u'^2 = \frac{2g\,(h-H')}{\theta'}$$

puis

$$(5) \qquad Q' = \Omega' u'$$

Ω' différant de Ω pour les mêmes motifs.

Les pressions qui agissent sur le clapet d'aspiration de la pompe, rapportées au plan AB de la figure, sont dans le puits, $H' + H$, et à l'extérieur H_1, plus la pression atmosphérique h; le travail théorique de la pompe sera donc

$$(6) \qquad T' = \Delta Q' \left\{ h + H_1 - (H' + H) \right\}$$

Pour comparer ce qui se passe dans le puits hermétique à ce qui s'accomplit dans le puits ouvert, cherchons les rapports des vitesses, des débits et des quantités de travail pour l'un et l'autre.

$$(7) \qquad \frac{u'^2}{u^2} = \frac{\theta}{\theta'} \cdot \frac{h - H'}{H}$$

$$(8) \qquad \frac{Q'}{Q} = \frac{\Omega' u'}{\Omega u} = \frac{\Omega'}{\Omega} \sqrt{\frac{\theta}{\theta'} \left(\frac{h - H'}{H} \right)}$$

$$(9) \qquad \frac{T'}{T} = \frac{Q'}{Q} \left(1 + \frac{h - H' - H}{H_1} \right)$$

Supposons d'abord que

$$\theta = \theta'.$$

c'est à dire que les canaux restent absolument les mêmes dans les deux cas. Cette hypothèse, qui implique l'égalité de Ω et Ω', revient

à dire ou que les parois des conduits sont inaltérables par leur dureté, ou que la deuxième observation a suivi immédiatement la première et s'est faite si rapidement, que les canaux n'ont pas eu le temps de se modifier. Ceci admis, les deux premières équations se réduisent à

$$(10) \qquad \frac{u'}{u} = \frac{Q'}{Q} = \sqrt{\frac{h - H'}{H}}$$

et la troisième ne change pas. Dans les équations (9) et (10), on doit supposer Q et H connus, puisque ce sont des quantités qui résultent de l'observation du puits ouvert; h l'est aussi, puisque c'est la colonne d'eau équilibrant la pression atmosphérique. H_1 l'est également, puisque la hauteur où l'eau est amenée par la pompe est la conséquence de l'existence de cette machine. H reste donc à déterminer Q', T' et H'; trois inconnues pour deux équations; donc on peut en choisir une arbitrairement. Nous choisirons H'.

Pour que Q' soit réel, il suffit que

$$h > H'$$

condition qui sera toujours satisfaite, puisque l'eau ne peut, dans le vide, s'élever à plus de 10^m30, ni même à cette hauteur, sauf au repos; ce que l'équation (10) indique, puisque pour

$$h = H'$$

elle donne Q' égal à zéro. Alors la colonne d'eau h fait, dans le puits hermétique, équilibre à la pression atmosphérique agissant sur le liquide du réservoir d'alimentation souterrain.

Faisons

$$h - H' < H$$

Le niveau du liquide dans le puits hermétique est alors moins éloigné du niveau h que dans le puits ouvert le niveau H ne l'était du niveau du bassin d'alimentation. Dans ce cas, la quantité, sous le radical, est fractionnaire, et Q' moindre que Q. T' est aussi moindre que T, puisque dans l'équation (9) la quantité $h - H' - H$ est négative.

Faisons

$$h - H' = H$$

alors l'examen des deux équations montre que l'on a

$$Q' = Q \qquad T' = T;$$

Dans ce cas, le niveau, dans le puits hermétique, est à la même distance de celui h, que le niveau H, dans le puits ouvert, l'était au-dessous du bassin souterrain. Ceci démontre qu'il faut qu'il en soit ainsi pour que le puits hermétique donne le même volume d'eau que le puits ouvert; et enfin que dans le cas où l'un et l'autre donnent le même volume d'eau, le travail théorique de la pompe est identique.

Quand

$$h - H' > H$$

les équations montrent que l'on a aussi

$$Q' > Q \qquad \text{et} \qquad T' > T$$

Pour que le puits hermétique donne plus d'eau que le puits ouvert, il faut que la dépression dans le premier soit plus grande que celle dans le second.

Le cas où H' est égal à zéro, et celui où H' est négatif, rentrent dans le précédent. Remarquons cependant que pour

$$H' = - H$$

L'équation (10) devient

$$\frac{Q'}{Q} = \sqrt{1 + \frac{h}{H}}$$

qui donne pour Q' un volume dépassant celui Q d'autant plus que H était plus petit. Ainsi, le puits hermétique, quand le niveau y sera descendu aussi bas que dans le puits ouvert, donnera un volume d'eau plus fort.

On peut encore se demander à quel niveau le puits ouvert devrait descendre pour donner autant d'eau que le puits fermé, quand le liquide y est descendu à la hauteur H. Nommons u'' la vitesse dans les canaux souterrains; Q'' le débit du puits ouvert quand le niveau y descend de la hauteur inconnue H''; et T'' le travail théorique de la pompe dans ces circonstances. La section

Ω et le terme δ restent les mêmes que précédemment. On a

$$u''^2 = 2g\frac{H''}{\delta} \qquad Q'' = \Omega u'' \qquad T'' = \Delta Q''\,(H'' - H + H_1)$$

Dans le puits hermétique on a

$$u'^2 = 2g\left(\frac{h + H}{\delta}\right) \qquad Q' = \Omega u' \qquad T' = \Delta Q'\,(h + H_1)$$

On en tire

$$\frac{Q''}{Q'} = \sqrt{\frac{H''}{h + H}}$$

ce qui montre que pour avoir Q″ égal à Q′ il faut que

$$H'' = h + H.$$

Ainsi, pour que le puits ouvert donne autant d'eau que le puits hermétique quand le niveau y est descendu à H, il faut que, dans le premier, le niveau soit descendu de 10^{m}30 de plus.

Dans ce cas, on a

$$\frac{T''}{T'} = \frac{Q''}{Q'}\left(\frac{H'' - H + H_1}{h + H_1}\right)$$

rapport qui devient pour les valeurs de Q″ et H″ trouvées

$$\frac{T''}{T'} = 1$$

Ceci concorde avec ce qui a été dit précédemment sur l'égalité du travail théorique quand les puits fournissent le même débit.

Ainsi, en supposant les canaux souterrains invariables, *que le puits soit ouvert ou foncé, il faudra, pour élever un même volume d'eau, réaliser le même travail théorique.*

Pour que le puits foncé fournisse le même volume d'eau que le puits ouvert, il faut entre la pression atmosphérique qui agit sur l'obturateur et celle du liquide affluent qui agit en-dessous, une différence égale à celle d'une colonne d'eau ayant pour hauteur la dépression qui existe dans le puits ouvert quand il fournit le même débit.

Enfin, *le puits foncé pourra, sans descendre au-dessous du*

niveau habituel du puits ouvert, donner autant d'eau que ce dernier si le niveau s'y abaissait de 10m30 de plus.

Voilà, dans les circonstances où nous nous sommes placés, le seul avantage des puits foncés. Est-il bien réel? Dans tout ce qui précède, on a supposé implicitement que le bassin souterrain fournissait un débit indéfini par rapport à la puissance de la pompe; car si cette dernière pouvait franchir la source, le fonçage n'empêcherait pas les intermittences de travail. Dans ce cas, creuser un puits au-dessous des orifices de débit des canaux souterrains pour emmagasiner le liquide dans cette cavité et l'en tirer ensuite, serait plus dispendieux que d'établir au-dessus du sol un réservoir dans le même but. Si la source suffit aux besoins, ou les dépasse, à quoi bon emmagasiner l'eau? On sait, en outre, qu'un travail continu et régulier est plus économique qu'un travail intermittent opéré sous l'influence de niveaux sans cesse variables.

D'après les publications citées en commençant, il ne paraît pas que l'inventeur attribue d'avantages à son système, quand les canaux souterrains sont invariables; mais il est bon de bien l'établir, pour que personne ne puisse lui croire des propriétés qu'il n'a pas.

Nous avons fait, dans tout ce qui précède, une hypothèse qui ne peut se réaliser que par exception et fort rarement. Le liquide du réservoir souterrain passe dans le puits ouvert, par suite de l'excès de pression résultant de la seule différence des niveaux, l'effet de la pression atmosphérique sur la nappe alimentaire étant détruit par celui de cette pression, agissant sur l'eau du puits en sens inverse de la translation. En plaçant un obturateur dans le puits, ou le prolongeant par un tube hermétique où on fait le vide, le liquide contenu se trouve dérobé à l'action de la pression atmosphérique. Alors le mouvement de l'eau se fait sous l'action de la différence des niveaux et de cette pression, qui n'est plus annihilée. La vitesse de translation peut donc, dans certains cas, être plus rapide. Alors le liquide corrode les canaux partout où leurs parois ne présentent pas une dureté ou une inertie suffisantes. Ils s'agrandissent, et, à égalité de vitesse, les résistances que le mouvement du liquide y développait y sont moins considérables.

Nous avons démontré rigoureusement que θ' est plus petit que θ dans le cas où le canal souterrain augmente de section partout et

proportionnellement, ce qui ne peut être dans la réalité; mais on peut supposer que le canal élargi peut se diviser en un grand nombre de canaux consécutifs, dont les uns seront restés ce qu'ils étaient et dont les autres auront été modifiés de la façon indiquée. Pour les uns, à égalité de vitesse, les résistances n'auront pas changé; pour les autres, elles auront diminué. Leur somme aura donc diminué, et l'équation des forces vives du commencement indiquera que, dans ce cas encore, θ' sera moindre que θ.

On pourrait objecter que le liquide, en passant par ces canaux successifs, éprouvera des changements brusques de vitesse nouveaux dont l'équation citée ne tient pas compte; mais il faut observer encore que le canal n'est pas unique; qu'il s'agit plutôt de moyennes que de chiffres absolus; et qu'enfin, en ne considérant ce qui est vrai pour des tubes semblables que comme une hypothèse pour ceux irréguliers, elle se trouve vérifiée par les faits observés à Lyon et à Paris.

Pour connaître, au moyen de l'équation (7), le rapport de $\frac{u'}{u}$ dans ces nouvelles circonstances, il est nécessaire de faire des hypothèses sur celui $\frac{h-H'}{H}$. Supposons-le d'abord égal à l'unité. θ' étant moindre que θ, u, sera plus grand que u et (8) Q' plus grand que Q, car la section moyenne des canaux ayant augmenté, Ω' est plus grand que Ω.

Ainsi, le puits foncé qui, dans les conditions où nous venons de nous placer, ne donnerait pas plus d'eau que le puits ouvert, si les canaux ne s'étaient point élargis, aura un débit plus fort, par suite de leur augmentation de section. C'est là, croyons-nous, le fonds de la pensée de M. Donnet.

L'équation (9) montre que le travail théorique croît ici proportionnellement au débit.

Si $h-H'$ était plus grand que H, hypothèse dont on a précédemment expliqué le sens sur la figure, l'accroissement de vitesse (7), de débit (8) et de travail (9) seraient encore plus marqués.

Enfin, $h-H'$ peut être plus petit que H. Quand

$$\frac{h-H'}{H}=\frac{\theta'}{\theta}$$

$\frac{u'}{u}$ est égal à l'unité. C'est à dire que le puits foncé à canaux

élargis donnera autant d'eau que celui ouvert à canaux étroits, fonctionnant dans des conditions de niveaux plus favorables.

Si

$$\frac{h - H'}{H} < \frac{\theta'}{\theta}$$

Le puits foncé à canaux élargis donnera moins d'eau que le puits ouvert à canaux étroits.

Ainsi le puits foncé, une fois le but de cette disposition atteint, pourra, à volonté, donner ou moins, ou plus d'eau que l'autre, pourvu que l'on ait une pompe proportionnée en conséquence.

Mais ceci suppose implicitement que la puissance de la nappe d'eau alimentaire est relativement indéfinie, car si la pompe pouvait franchir la source, le travail de la machine serait toujours intermittent, et on ne gagnerait à la disposition nouvelle que de faire chaque puisage en moins de temps.

Dans les expériences faites à Lyon, près du Rhône, et à l'Exposition, près du pont d'Iéna, les conditions étaient précisément celles qui conviennent à la conception de M. Donnet. L'eau était réellement de l'eau de rivière filtrée; et il n'était pas à craindre d'épuiser, dans un temps donné, le réservoir alimentaire formé ou par le Rhône, ou par la Seine.

M. le capitaine du génie Tessandier a constaté à Lyon qu'il y avait eu des affouissements dans les canaux souterrains; que le puits s'était engorgé, et qu'il avait été nécessaire de parer à cet inconvénient. Il faut bien, en effet, que les matières entraînées par l'eau arrivent quelque part; mais elle doit cesser d'en entraîner avec elle ou en charrier beaucoup moins, quand les conduits ont pris des dimensions telles que la vitesse y devienne assez faible pour ne plus les corroder. Cette circonstance doit cependant engager à n'user du fonçage qu'avec une certaine circonspection. Si l'eau affluente coulait à travers des terrains peu résistants, tels que le sable des landes, les affouissements seraient continuels et les éboulements très à craindre, les matières entraînées étant sans cesse remplacées par celles situées au-dessus.

De tout ceci il résulte que :

Le fonçage n'a qu'un effet mécanique, celui d'augmenter la

section des canaux souterrains par l'action de la vitesse du liquide affluent.

Le débit s'accroît à proportion de cet accroissement.

Cet avantage n'a d'importance que dans le cas où le puits communique avec une nappe d'eau puissante relativement aux besoins.

L'agrandissement des canaux est la conséquence d'affouissements qu'il faut prévoir, et qui, dans certains terrains, peuvent devenir dangereux.

1er novembre 1867.

BIOGRAPHIE

DE

OSCAR DE BONFILS DE LAVERNELLE

PAR M. DE LAGRANDVAL.

Oscar de Bonfils de Lavernelle est né au château de Lavernelle, le 14 février 1826. Il appartenait à l'une des familles les plus anciennes du Périgord; son père était un ancien officier de cavalerie de la garde royale de Louis XVIII; par sa mère, il appartenait à la famille des Dabzac de Montastruc.

Dès sa plus tendre enfance, Lavernelle se montra très studieux, s'occupa avec passion de botanique, dont les premiers éléments lui furent enseignés par son professeur de troisième. Ses premières études littéraires furent commencées au collége de Bergerac; il les termina au collége de Brives, où il fit sa rhétoriqne et sa philosophie, et fut reçu bachelier ès-lettres le 19 août 1844.

Deux ans après, il se présenta aux examens de l'école forestière, fut déclaré admissible, mais non admis. Après cet échec, notre collègue vint à Bordeaux pour s'occuper de ses études favorites, les sciences, la peinture et la musique; en trois ans, il obtint les diplômes de bachelier ès-sciences (14 août 1849), de licencié ès-sciences physiques (1er août 1850), de licencié ès-sciences mathématiques (14 juillet 1851). C'est pendant cette période de temps que de Lavernelle se lia avec notre regretté collègue M. Bazin, et fut avec lui l'un des fondateurs de notre Société (janvier 1851).

A la suite de ces travaux, de Lavernelle alla se reposer dans sa famille; là, il fit connaissance de M. de Lapeyrouse, son parent, préfet du Doubs, qui, séduit par les qualités de notre collègue, se

l'attacha comme secrétaire particulier. Pendant l'exercice de ces fonctions, Lavernelle n'oublia pas ses chères études de botanique; il s'occupa de la flore du pays, et les travaux qu'il fit à ce sujet lui valurent le titre de membre de la Société d'émulation du Doubs (9 juin 1855).

En 1857, il fit connaissance de M. de Vougy, directeur des lignes télégraphiques de France, qui, frappé de ses connaissances administratives et scientifiques, l'engagea à entrer dans son administration : Lavernelle accepta; il fut envoyé à Agen, puis rappelé à Paris en qualité de secrétaire de M. de Vougy, qui se l'attacha définitivement. Là, il suit la bonne et la mauvaise fortune de M. le directeur général, qui perd quelque temps son emploi et y est de nouveau installé. Il prend part à tous les travaux de son administration; il est envoyé en Allemagne, en Afrique; en 1866, il est chargé de fournir des renseignements dans la discussion au Corps législatif, sur l'utilité d'étendre jusques aux simples communes l'établissement des bureaux télégraphiques. La même année, il assiste aux conférences tenues par les délégués des diverses puissances européennes, pour conclure le traité international relatif aux communications télégraphiques. C'est à la suite de ces conférences qu'il est nommé Chevalier de l'ordre de Sainte-Anne de Russie, et Chevalier de première classe de Bavière.

Enfin, c'est dans cette même année qu'il est élu membre du Conseil Général de la Dordogne pour le canton de Lalinde.

Notre collègue allait recueillir les fruits d'une vie honnête et studieuse, lorsqu'une mort affreuse est venue l'enlever à tous ses amis et à notre Société; comme vous le savez, on l'a trouvé assassiné sur les côtes d'Angleterre (décembre 1866).

Notre collègue était bienveillant, affable, aimant à être utile à ceux qui l'approchaient, d'une loyauté à toute épreuve; aussi est-il regretté de tous ceux qui l'ont connu.

De Lavernelle a écrit beaucoup de notes sur la botanique et sur la peinture; il avait ramassé beaucoup de renseignements; tout cela est épars, inachevé. Sa vie a été arrêtée au moment où il allait s'occuper de publier les résultats de ses méditations, œuvre qui, sans doute, lui aurait assuré une place distinguée dans les sciences, et qui, certainement, aurait honoré notre Société.

NOTICE

SUR

M. TIMOTHÉE BILLIOT

PAR M. ROYER

Le 30 juillet 1866, la Société, par l'organe de son président, disait un dernier adieu à l'un de ses membres, M. Timothée Billiot enlevé à sa famille et à ses amis dans toute la plénitude de la force et de l'intelligence.

Originaire de Bordeaux, d'une famille justement estimée, Billiot fit au lycée de notre ville des études brillantes, et y puisa le goût des sciences physiques et de leurs applications.

A sa sortie du lycée, il fut nommé professeur de physique au collége de Sedan, où son enseignement eut un succès justifié par les nombreuses attestations de ses chefs, des membres du corps municipal qui avaient bien vite apprécié, chez notre collègue, le parleur habile et le professeur sincèrement dévoué à ses élèves.

Cédant au désir bien naturel d'étendre de plus en plus ses connaissances scientifiques, Billiot quitta, au grand regret de ses supérieurs, le collége de Sedan pour se rendre à Paris, où il se fit l'élève de MM. Desgousée et Laurent, dont les innombrables sondages ont fourni tant de documents à la géologie. Plus tard, enfin, il obtint la place de préparateur du cours de chimie, professé à l'École Polytechnique par le savant M. Frémy.

C'est alors que la mort d'un père chéri ramena près des siens le jeune Billiot, qui mettait avant tout, même avant la science, l'amour de la famille et le culte du foyer.

Dès son arrivée à Bordeaux, Billiot demanda à son travail, à ses connaissances scientifiques déjà sérieuses, des ressources pour

lui et surtout pour sa famille, cruellement éprouvée par la perte de son chef. Sa voix fut entendue. Billiot avait, en effet, le savoir, une réputation de bon fils et de bon frère, et il s'adressait à d'anciens compagnons d'enfance, qui avaient su apprécier la loyale aménité de son caractère, et à des maîtres, qui le connaissaient studieux et capable d'enseigner aux autres.

A la fois professeur dans les institutions privées, dans les familles, professeur de physique aux classes d'adultes de la Société Philomathique, Billiot dérobait à ses loisirs le temps de suivre les cours de la Faculté des Sciences, à son repos celui d'apprendre et de posséder les matières de la licence mathématique et de la licence physique dont il soutint les épreuves avec honneur.

Doublement licencié, en possession de l'estime des familles qui lui confiaient l'instruction de leurs enfants, Billiot songea à se créer, à côté des ressources toujours précaires de l'enseignement, une position sûre pour lui et les siens.

C'est encore à la science, mais à la science appliquée, que Billiot s'adressa. Il mit à profit les leçons si fructueuses de MM. Desgousée et Laurent, et entreprit de faire des sondages. Il réussit, peut-être au delà de son attente. Plusieurs localités des Landes, le Jardin d'Acclimatation de Bordeaux, lui durent une eau abondante et salubre. Il venait de forer un puits à Arcachon : il avait pu, malgré les prédictions de la science, et en se fondant sur ses connaissances géologiques personnelles, doter cette cité naissante d'un puits d'où jaillissait une eau claire, limpide et abondante, lorsque la mort vint le frapper au milieu de ce qu'on pourrait appeler son triomphe, à l'âge de trente-cinq ans.

Billiot faisait partie de notre Société depuis plusieurs années; mais on comprend qu'avec une vie si occupée, notre collègue n'ait pas pu être un membre très assidu. Dans l'une des trop rares séances auxquelles il a assisté, il a donné lecture d'un travail sur les sondages en divers points du département.

Ce travail, écrit pour la Société Linnéenne, à laquelle sa spécialité rattachait notre collègue par des liens plus intimes et plus anciens, a été revu par M. Raulin, professeur de géologie et de minéralogie à la Faculté des Sciences, et imprimé dans les actes de cette Société.

On doit à Billiot, outre ce Mémoire, plusieurs travaux dont voici les titres :

Des Puits artésiens et des Puits forés. (La *Gironde,* 21 octobre 1864.)

Lettre sur divers sondages dans le département. (La *Gironde,* 11 décembre 1864.)

Projet de sondage à Libourne par la Commission, suivi de notes. (Actes de la Société Linnéenne, t. XXXVI, 1866.)

Étude hydrologique sur l'alimentation de la ville d'Astaffort. (Agen, 1866.)

On voit facilement à l'inspection des titres de ces travaux, écrits au milieu des préoccupations de la famille et des difficultés de l'enseignement, ce que la géologie appliquée pouvait attendre de Billiot si la mort n'était venue l'enlever au moment où sa situation matérielle lui permettait de ne plus avoir à s'occuper du pain du lendemain et de se livrer tout entier à ses études de prédilection.

La Société a voulu consacrer quelques lignes de ses Actes au souvenir de ce travailleur actif et modeste. Elle a chargé de la rédaction de cette courte notice celui qui la représentait aux obsèques de Billiot, et qui était bien certainement l'organe de ses sentiments, lorsqu'en quittant la dépouille mortelle de notre regretté collègue, il disait :

« Cher collègue, la Société des Sciences physiques et naturelles, » qui était heureuse de te posséder, les nombreux amis qui te » pleurent, te disent un éternel adieu et te laissent monter en paix » vers le séjour où doivent se reposer les gens qui, comme toi, » ont bien lutté pour leur famille, et qui sont tombés au champ » d'honneur de la science, du travail et de la probité! »

ÉPOQUE PRÉ-HISTORIQUE

CITÉ PALUSTRE

AU CENTRE MÊME DE LA VILLE DE BORDEAUX

PAR M. DELFORTRIE

Les grands travaux exécutés en ce moment à Bordeaux pour l'ouverture de l'égout collecteur étaient déjà commencés depuis quelque temps, lorsque, dans les premiers jours d'octobre, une quantité considérable d'ossements, mêlés à de la boue, étaient retirés de la fouille vis à vis la maison n° 48 de la rue des Trois-Conils. Frappé du mode de cassure de ces os, j'en recueillis quelques-uns avant qu'ils ne fussent jetés dans les tombereaux qui allaient les enfouir dans les remblais de la rue d'Ornano. L'étude que j'en fis, en collaboration avec un jeune archéologue de beaucoup de mérite, M. Benoist, de Nancy, offrit, dès l'abord, le plus haut intérêt; en effet, ces ossements portaient, pour la plupart, des stries et entailles, et présentaient, en outre, une cassure systématique des métacarpiens et métatarsiens opérée au moyen d'un instrument contondant, qui, après avoir enlevé les têtes articulaires, avait divisé l'os en esquilles longitudinales. La preuve de ce mode de procéder nous était fournie par des canons de bœuf encore entiers, dont les têtes articulaires avaient subi un commencement de fracture par écrasement.

Nous constations aussi ce fait très important : 1° que la fouille fournissait un nombre relativement considérable de mâchoires inférieures de grands ruminants, privées de leurs incisives, mais ayant conservé leurs molaires, et sur toutes lesquelles, sans exception, l'apophyse coronoïde et le condyle étaient intentionnellement rasés au niveau du trou dentaire.

2° Qu'il y avait absence complète de mâchoires supérieures.

A l'aide des précieuses observations des Lartet, Christy, Falconer, etc., nous étions autorisés à conclure : 1° que la fracture des os longs avait eu pour double but l'extraction de la moelle et la fabrication d'outils et instruments; 2° que les mâchoires inférieures, par suite de l'opération exécutée sur elles, se trouvaient transformées en armes véritables; 3° enfin, que les mâchoires supérieures avaient été brisées avec les crânes auxquels elles adhèrent, pour en retirer la cervelle, aliment qui paraît avoir été si recherché par les peuplades des temps pré-historiques; plus tard, nous retrouvions, en effet, de nombreux fragments de crânes et de mâchoires supérieures.

Devant de pareils indices, nous étions autorisés à rejeter l'idée que ces ossements pussent provenir d'une boucherie gallo-romaine; leur cassure systématique, identique à celle observée sur les os des cavernes et des cités lacustres, accusait une station pré-historique; mais les débris que nous venions de disputer aux tombereaux étaient, il est vrai, d'un caractère bien rudimentaire; nous étions certainement sur la voie de précieuses découvertes pour la science, mais nous n'y avions fait que le premier pas; bien des *desiderata* restaient à trouver. Preuves et renseignements vinrent bientôt confirmer notre opinion : d'abord les boues nous fournirent, toujours en les disputant aux pelles des ouvriers chargeant les tombereaux, deux andouillers de cerf sciés au silex et portant de nombreuses stries et entailles, puis plusieurs petits instruments de bois dont l'extrémité avait été durcie au feu; l'un d'eux offrant le caractère d'un vrai poinçon, un autre terminé en spatule, les autres assez informes; comme renseignements, nous apprenions que dans la partie de la rue Victor la plus rapprochée de la rue des Trois-Conils, les ouvriers avaient retiré quantité d'ossements, et qu'un dépôt considérable surtout s'était montré à l'angle de ces deux rues; que de ce dépôt, un collectionneur avait retiré deux andouillers de cerfs et plusieurs fragments d'os sciés. Nous pouvons préciser aujourd'hui la trouvaille, parce que nous avons eu plus tard l'occasion de voir ces objets chez l'archéologue distingué qui les avait recueillis; il a même eu la gracieuse obligeance de nous offrir trois de ces fragments. Ces morceaux, très courts, appartiennent à des métacarpiens; nous les considérons comme des

rejets ou rebuts provenant de canons sciés au silex pour être convertis en emmanchures.

Devant la maison n° 48 de la rue des Trois-Conils, la tranchée, d'une profondeur de quatre mètres, présentait la coupe suivante :

Sol et sous-sol récents	1,50
Terramare de l'époque gallo-romaine	1,30
Couche argilo-sableuse marine avec Ostrea edulis, Pecten maximus, Mytilus edulis, Venus decussata, Cardium edule, Mactrea solida, Turbo neritoïdes, Trochus cinerarius	0,10
Couche sableuse avec ossements fracturés, écailles d'huîtres	0,20
Sable et galets	0,30
Argile	0,60
	4,00

Les travaux qui se continuaient rue des Trois-Conils nous fournissaient enfin, devant la caserne municipale, un grattoir, un couteau et deux marteaux, le tout en silex. (Nous entendons par marteaux des rognons pugilaires, grossièrement façonnés, de manière à pouvoir les tenir assurés dans la main, et portant, sur plusieurs de leurs faces, des traces nombreuses de percussion.)

Sur tout le parcours de la tranchée ouverte entre la rue Vital-Carles et la rue des Facultés s'observait la même trace d'ossements fracturés et striés déjà signalés, mais cependant en plus petite quantité; nous trouvions, sur ce point, plusieurs poinçons, polissoirs et marteaux.

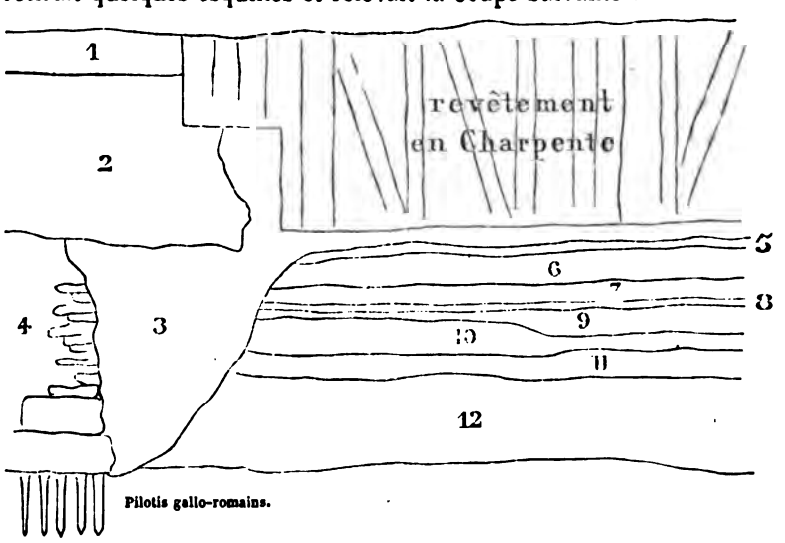
Pendant que nous poursuivions nos recherches rue des Trois Conils, les fouilles s'exécutaient derrière la cathédrale. Nous ignorons si, depuis l'angle de la rue Porte-Basse jusqu'à la rue d'Albret, il a été trouvé des ossements n'ayant pas suivi les travaux dans ce parcours; mais comme les substructions gallo-romaines rencontrées sur cette ligne y occupaient souvent un niveau inférieur au radier de l'égout (7m50), s'il s'y est trouvé des traces de la station qui nous occupe, elles n'ont pu alors se produire que dans un terrain remanié, ce qui leur enlèverait une grande partie de leur intérêt.

Revenons à la rue des Trois-Conils. La tranchée terminée sur ce point se dirigeait ensuite à angle droit sur la rue des Facultés,

et s'y arrêtait devant la maison n° 37; ce n'est que sur une longueur de 8 à 10 mètres à partir de l'angle de la rue des Trois-Conils que les mêmes ossements striés et fracturés se sont montrés, mais en plus petit nombre que devant la caserne municipale. Nous n'y avons signalé aucun fragment travaillé proprement dit.

Les travaux d'embranchements, momentanément suspendus, nous ramènent à la place Rohan. A ce moment, la grande tranchée se dirigeait en ligne oblique sur la rue Rohan; nous observions que sur tout son parcours, et jusqu'à l'angle de cette rue, se montraient des ossements semblables à ceux de la rue des Trois-Conils, même couleur, même cassure, mêmes stries et entailles; seulement, ils étaient en très petit nombre, mais nous fournissaient néanmoins trois poinçons, assez grossièrement façonnés, quoique cependant bien déterminés.

M. Benoist descendait dans la tranchée, y retrouvait la couche à ossements, bien distincte, observée rue des Trois-Conils, en retirait quelques esquilles et relevait la coupe suivante :



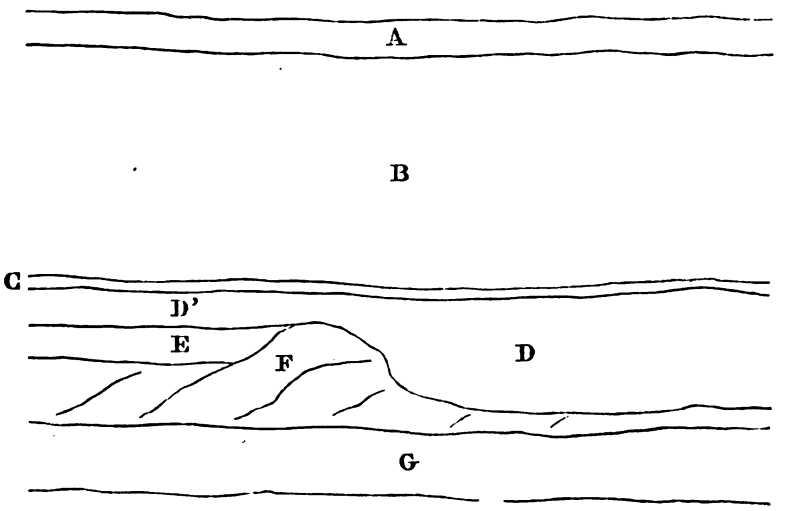
1	Sol et sous-sol actuel.....	4m»»
2	Terramare de l'époque gallo-romaine.....	
3	Terrain remanié composé de toutes les couches.....	
4	Tuiles-béton de l'époque gallo-romaine.....	
5	Dépôt argileux marin, avec Pecten maximus, Mytilus edulis, Venus decussata, Cardium edule, Mactrea solida, Turbo neritoïdes, Trochus cinerarius, Ostrea edulis.....	0 20
6	Argile sableuse avec Ostrea et ossements fracturés.....	0 50

7	Argile et galets	0 20
8	Sable gris lacustre	0 10
9	Argile et galets	0 10
10	Sable et argile avec Ostrea edulis, Venus decussata, Mytilus edulis, Pecten varius	0 50
11	Sable blanc jaunâtre	0 30
12	Argile	1 10
		7m»»

Cette coupe laisse voir clairement qu'aux deux extrémités le terrain a été remanié par les Gallo-Romains pour y jeter leurs fondations sur pilotis; la partie médiane de la tranchée est restée intacte et a conservé sa stratification naturelle.

La percée du grand égout étant effectuée dans la rue Rohan, des substructions gallo-romaines se retrouvèrent depuis l'angle de la place jusque devant la maison n° 8; toutes les couches, jusqu'au radier de l'égout, étaient remaniées et bouleversées; quelques ossements en étaient bien retirés provenant des remblais qui avaient suivi les constructions, mais ils apparaissaient jaunis et lessivés par les infiltrations qui avaient traversé les mortiers; aussi les rejetions-nous à cause de leur défaut d'authenticité.

Entre les n^{os} 8 et 18 de la rue Rohan, les couches inférieures qui nous occupent étaient restées parfaitement intactes et présentaient la coupe suivante :



A	Sol et sous-sol actuel	4m»»
B	Terramare de l'époque gallo-romaine	
C	Lit marin renfermant les mêmes coquilles que celles indiquées dans le banc n° 5 de la place Rohan	» 10

D	Tourbe sableuse, avec ossements à la base de D' seulement..	» 50 à 1.50
E	Lit de cendres, avec ostrea et ossements travaillés.....	» 50
F	Sable lacustre.....	» 45
G	Tourbe noire avec sable et galets.....	1 55
		7m10

C'est dans les déblais provenant de cette excavation que nous avons recueilli des débris offrant le plus haut intérêt; la plupart provenant du lit de cendres, quelques-uns seulement de la partie inférieure du banc de tourbe qui lui est superposé; la gangue terreuse qui accompagnait chacun de ces débris dénotait suffisamment le lieu d'origine; là, pour la première fois, nous apparaissent des instruments caractérisés par un poli et un fini admirables, tels que poinçons, aiguilles, polissoirs, spatules, pointes de flèche, sifflet et emmanchures faites de métatarsiens, sciées au silex et polies sur la meule dormante; elles présentent cette particularité fort curieuse que les cavités qui, à la base des canons, donnent passage au tendon, paraissent avoir été utilisées comme trou de suspension; l'état de conservation de ces objets est si complet, que sur quelques-unes des emmanchures s'aperçoit encore le poli résultant du frottement des doigts; là aussi nous trouvions, dans les boues rejetées de la fouille, une hache, ou mieux peut-être, un ciseau en silex blanc-laiteux, taillé à grands éclats, mais poli, ou plutôt simplement aiguisé, à son extrémité la plus large; trois autres ciseaux, plus petits que le précédent, présentant également un tranchant très fin et simplement façonnés avec des galets de serpentine, quartzite talqueux et grès quartzeux; enfin, c'est au même endroit qu'en grattant du bout de nos cannes, nous retirions des déblais une douzaine de couteaux en silex. Que de morceaux précieux ont dû être jetés dans le tombereau!

M. Benoist, en relevant la coupe que nous venons de donner, a constaté la présence d'ossements travaillés et de quantité d'écailles d'huîtres dans toute l'épaisseur du lit de cendres; il en a retiré sur place un très beau poinçon, en partie carbonisé, mêlé à des débris d'ossements calcinés et à du charbon; il put reconnaître aussi que la partie inférieure de la tourbe qui recouvre la cendre contenait des os travaillés de main d'homme, mais en plus petit nombre.

Le lit de cendres de la rue Rohan, recélant les richesses archéologiques que nous venons d'énumérer, accuse donc nettement et

sans conteste la station pré-historique que nous faisaient pressentir les débris rudimentaires recueillis rue des Trois-Conils.

Quelle était l'étendue de cette station? A quel âge appartient-elle?

Les trois points que nous avons indiqués :

1° rue Victor, maison n° 3;

2° rue des Trois Conils, n° 48;

3° angle de la place et de la rue Rohan,

forment un triangle presque équilatéral, ayant environ 200 mètres de côté, ce qui donne un aperçu de l'étendue du champ de la station.

Le lit de cendres, qui a 0m50 d'épaisseur vis à vis la grille du jardin de la Mairie, et qui se perd en plongeant vis à vis la grille de l'impasse, rue Rohan, s'étendait évidemment en largeur des deux côtés de cette rue; c'est là qu'étaient groupées les huttes occupées par notre peuplade anté-historique; l'amas de cendres qui constitue le foyer de la station, ne fût-il pas là pour l'affirmer, que les outils et instruments qui gisaient dans ce milieu suffiraient pour l'attester.

La station occupée par nos aborigènes n'a pu être lacustre; la couche compacte de cendres le témoigne suffisamment; l'action de l'eau courante se serait opposée à sa formation; enfin, nous n'avons reconnu aucune trace de pilotis; cette station était palustre; elle occupait l'extrémité de la presqu'île, formée, d'un côté, par le cours du Peugue; de l'autre, par la Devèze, à laquelle se réunissait en amont le ruisseau de Caudéran, presqu'île dont la pointe baignait dans le vaste estuaire formé par la réunion de ces trois ruisseaux, et qui, lui-même, allait déboucher dans la Garonne.

C'est sur le point culminant de cette presqu'île, rue Rohan, qu'était l'habitat, le dépôt des richesses, consistant en outils, armes et instruments; à distance, au bord des rives, avait lieu l'opération préparatoire des os, témoin leur accumulation sur les berges des Trois-Conils et de la rue Victor.

C'est donc là qu'il y a 7 ou 8,000 ans campaient nos aborigènes, à l'abri de toute surprise, en plein marécage, ainsi que l'atteste l'épais banc de tourbe, de formation ancienne, adossé au lit de cendres; constamment exposés à l'action des brumes et des émanations paludéennes, comment ces peuplades, simplement

couvertes de peaux de bêtes, vivant d'une alimentation grossière, pouvaient-elles exister dans un pareil milieu? L'épaisse couche de cendres qu'elles ont laissée nous en fournit l'explication : d'immenses brasiers brûlaient sans cesse sur l'îlot; les vastes forêts qui couvraient les rives permettaient d'alimenter cet éternel foyer, et dans les cendres, qui jamais n'étaient refroidies, nos aborigènes accroupis, presque ensevelis, y prenaient leurs repas, témoins les coquillages comestibles qu'on y retrouve à une certaine profondeur; s'y livraient aussi à certains travaux, puisqu'ils y laissaient glisser et y perdaient à jamais ces instruments : poinçons, aiguilles, etc., précieux objets pour eux, que nous rencontrons aujourd'hui dans le dépôt.

A la quantité considérable d'écailles d'huîtres, qui, dans le banc de cendres, se trouvent mêlées aux ossements travaillés, il est impossible de ne pas reconnaître nos aborigènes pour de hardis navigateurs allant s'approvisionner sur les côtes de l'Océan.

Notre station aquitanique porte avec elle son état-civil; en effet : 1° l'amas de cendres et d'huîtres constitue un dépôt semblable aux kjökkenmöddings du Danemark; 2° le ciseau en silex, taillé à grands éclats, aiguisé seulement à son extrémité, est identique aux silex des plateaux de la Charente, du Pressigny, et aussi à ceux du Danemark, ce qui amène à cette conclusion : que la station est antérieure aux cités lacustres, suisses, de l'âge de la pierre; qu'elle est contemporaine de nos stations qui ont suivi l'âge du Renne, et qu'elle appartient conséquemment au premier âge de la pierre polie.

Les ossements fracturés de cheval trouvés dans le dépôt démontrent qu'à l'époque qui nous occupe, cet animal, non soumis à l'homme, servait à son alimentation, et les petits os à têtes articulaires que nous avons observés, étant presque tous privés de leurs extrémités, nous devons en conclure que le chien était domestique.

La faune indiquée par la station comprend :

Grand bœuf.	Cheval (petite espèce).
Petit bœuf.	Chèvre.
Cerf.	Mouton.
Sus.	Chien.
Sanglier.	

Bordeaux, 20 décembre 1867.

EXPLICATION DES PLANCHES.

Tous les objets sont reproduits de grandeur naturelle.

PLANCHE Ire.

		Lieu d'origine.
N° 1.	Poinçon, os.	Rue Rohan.
2. 3.	Emmanchures faites de métatarsiens de petits bœufs.	Id.
4.	Poinçon, os.	Vis-à-vis la caserne municipale.

PLANCHE II.

5.	Spatule, os.	Rue Rohan.
6.	Poinçon, os.	Id.
7.	Emmanchure faite d'un métatarsien de petit bœuf.	Id.
8.	Emmanchure faite d'un métacarpien de mouton	Id.
9.	Sifflet?	Id.
10.	Emmanchure faite d'un cubitus de *sus*.	Id.

PLANCHE III.

11.	Poinçon, os.	Rue Rohan.
12.	Poinçon, os.	Id.
13.	Spatule, os	Id.
14.	Poinçon en bois durci au feu.	Rue des Trois-Conils, vis-à-vis la rue Baubadat.
15.	Poinçon, os.	Rue Rohan.
16.	Spatule, os.	Id.
17.	Poinçon, os.	Id.
18.	Spatule en bois durci au feu.	Rue des Trois-Conils, vis-à-vis la rue Baubadat.

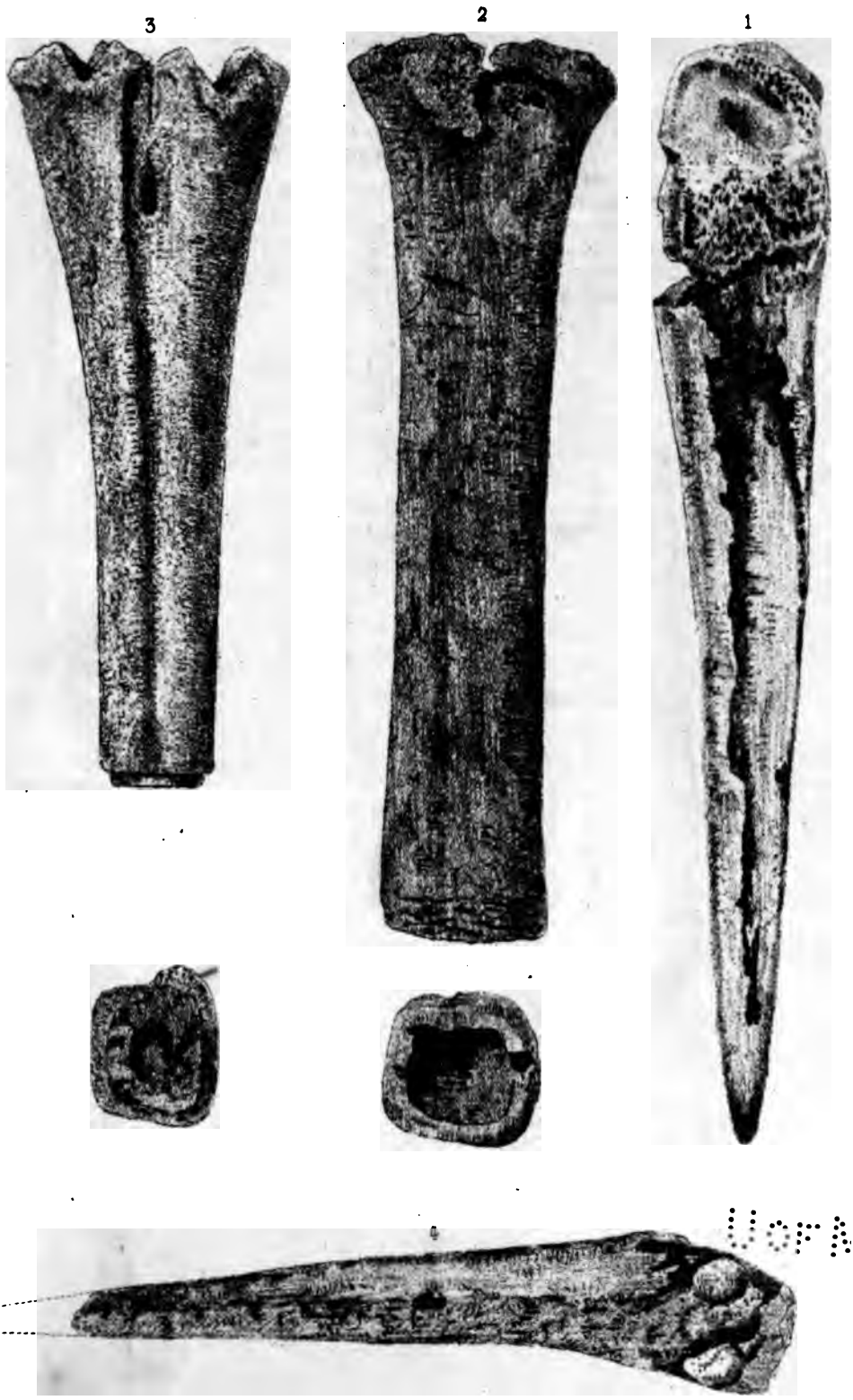
PLANCHE IV.

19.	Pointe de lance en os.	Rue Rohan.
20.	Poinçon fait d'un cubitus de petit bœuf.	Vis-à-vis la caserne municipale.
21.	Spatule, os.	Rue Rohan.
22.	Pointe de flèche, os.	Id.
23.	Aiguille, os, sans chas.	Id.
24.	Aiguille, os, avec chas.	Id.

Planche V.

N° 25. Lame de silex. . . . . Vis-à-vis la caserne municipale.
26. Hache en silex, polie au tranchant. . . . . Rue Rohan.
27. Ciseau à tranchant très fin, fait d'un galet de quartzite talqueux. . . . . Id.
28. Grattoir en silex. . . . . Vis-à-vis la caserne municipale.
29. Couteau en silex. . . . . Id.
30. Pointe de flèche en silex. . . . . Rue Rohan.
31. Ciseau à tranchant très fin, en grès quartzeux. Id.
32. Ciseau à tranchant très fin, en serpentine. . . . Id.

ÉPOQUE PRÉ_HISTORIQUE_CITÉ PALUSTRE DE BORDEAUX.



7

10

6

9

5

8

13

12

11

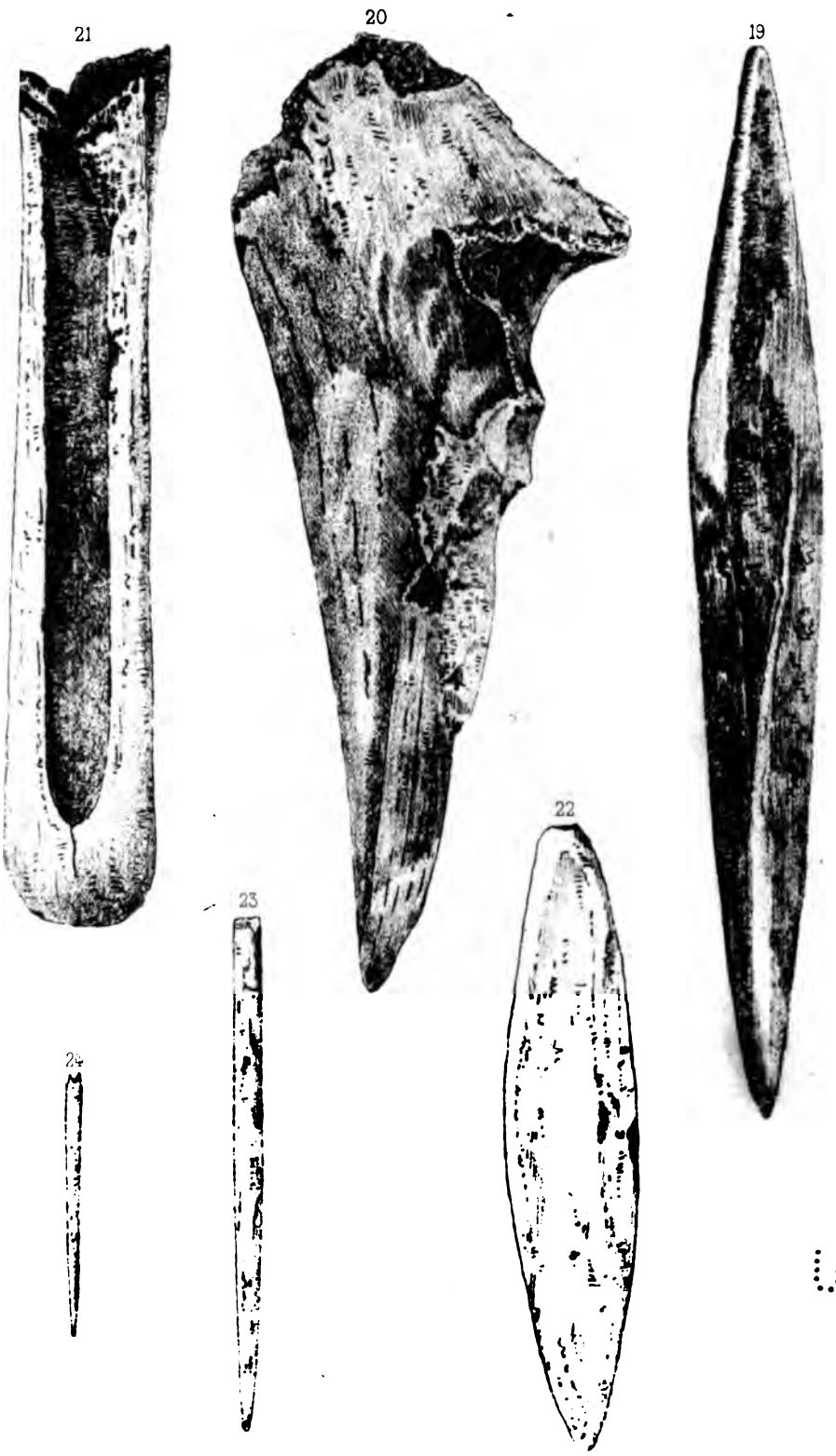
18

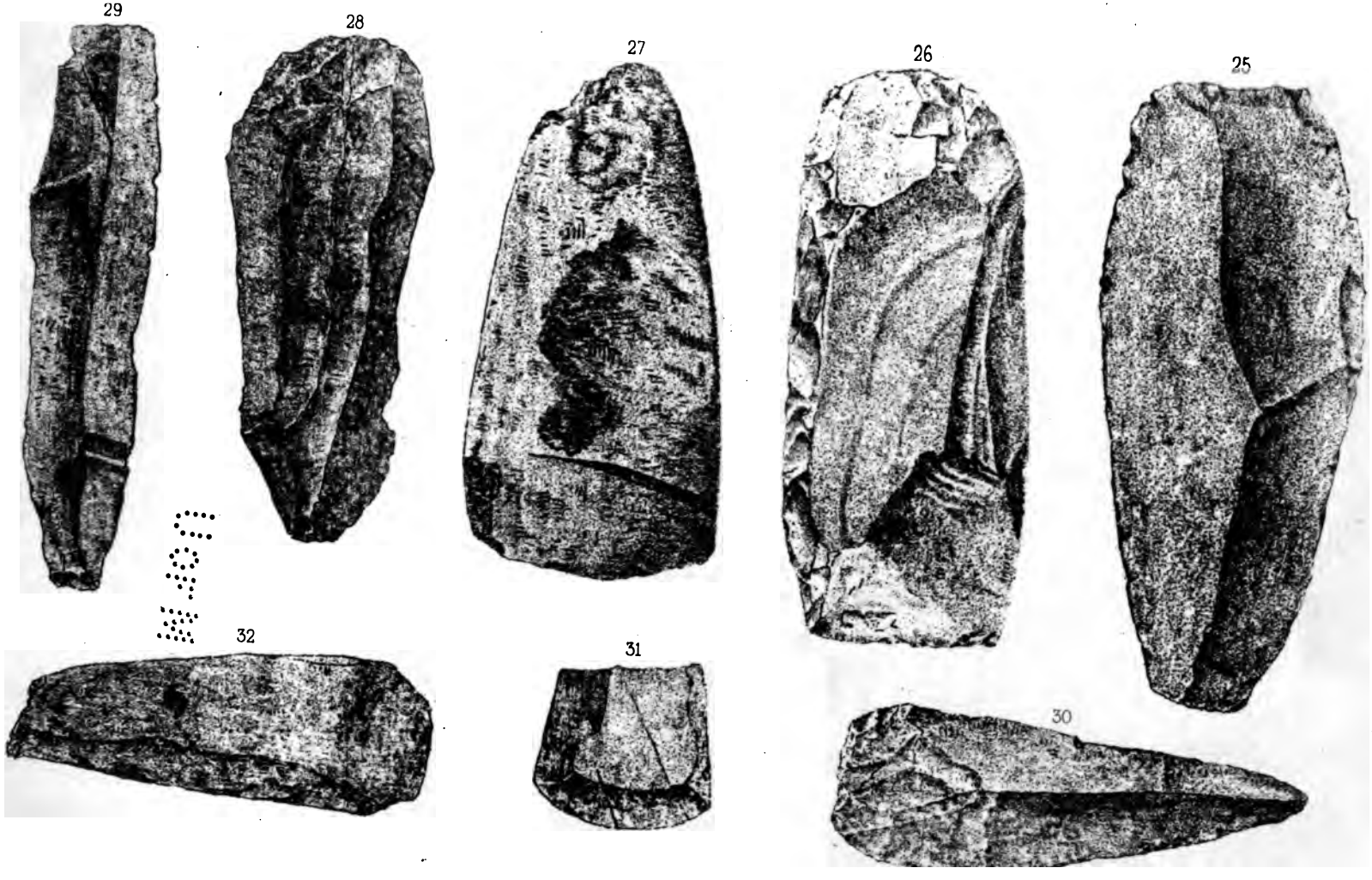
17

16

15

Usine


21
20
19
22
23
24


29
28
27
26
25
32
31
30

Digitized by Google

EXAMEN

DE DIVERS MOYENS PROPOSÉS POUR FAIRE CONTRIBUER LA TRACTION A L'ADHÉRENCE DES LOCOMOTIVES.

PAR M. ORDINAIRE DE LACOLONGE.

Plusieurs inventeurs ont eu l'idée de faire agir l'effort de traction des locomotives sur l'essieu des roues motrices, de façon à augmenter sa charge et par conséquent l'adhérence de la machine. Précisons d'abord ce qu'on entend par *traction*.

Le travail d'une machine à vapeur ordinaire s'estime en chevaux de 75 kilogrammètres chaque. Admettons ce mode d'évaluation pour la locomotive. Appelons N le nombre de chevaux dont elle peut faire le travail, et V la vitesse par seconde qu'elle communique à un train; on aura

$$75\,N = T\,v,$$

T étant l'effort de traction. On en déduit :

$$(1) \qquad T = \frac{75\,N}{v}$$

c'est-à-dire que l'effort de traction est égal au travail en kilogrammètres fourni par la machine, divisé par la vitesse de translation. Ainsi une machine de 100 chevaux, conduisant un train à la vitesse de 10^m par seconde, exercera sur lui un effort de traction de

$$\frac{7500^{km}}{10} = 750^k.$$

La formule (1) montre que, N étant constant, si v augmente, T diminue, c'est-à-dire que : *si une locomotive donne le maximum de travail dont elle est susceptible, l'effort de traction sera d'autant moindre qu'elle marchera plus vite*, et que, par suite, *il faudra d'autant plus réduire* le poids du train, autrement dit *le nombre des wagons*, que le parcours devra s'exécuter plus rapidement.

Dans la pratique, la puissance dynamique d'une locomotive ne s'estime pas en chevaux, mais par l'effort de traction dont elle est susceptible à une vitesse déterminée. Elle se calcule par la formule suivante due à Harding :

$$(2) \qquad t = 2{,}72 + 0{,}094\,n + \frac{0{,}00484\,F\,n^2}{Q}$$

dans laquelle on représente par :

t la traction par tonne;
n le nombre de kilomètres parcourus dans une heure par le train ;
Q le poids brut et total du train en tonnes;
F un coëfficient variable qui est de 7 pour les trains express et de 14 pour les autres.

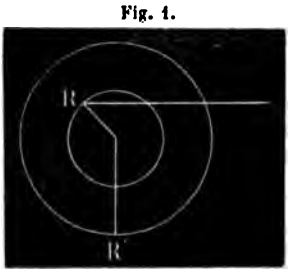
La traction totale pour tout le train est donc

$$(3) \qquad T = tQ.$$

On peut tirer de la formule de Harding les mêmes conclusions que ci-dessus, seulement elles sont un peu plus longues à en déduire. C'est pour ce motif que l'on a présenté d'abord la formule (1). Elle suffit pour montrer qu'*un train qui parcourt une voie entremêlée de rampes et de paliers force la locomotive à développer des efforts de traction variables d'intensité.*

Pour démarrer, c'est-à-dire pour mettre le train en marche, l'effort de la machine est encore différent. Nommons (*fig.* 1) :

Fig. 1.



R le rayon de la manivelle qui commande les roues motrices;
R' le rayon de ces roues;
r le rayon du piston des cylindres;
p la pression en kilogrammes, et par centimètre carré, exercée par

la vapeur sur la face du piston; par mètre carré, elle sera $10000\,p$.

La pression totale sur chaque piston moteur sera donc

$$10000\,p\,\pi\,r^2.$$

Dans les modèles en usage, l'essieu moteur est commandé par deux pistons au moyen de manivelles callées entre elles à angle droit. Quand l'une d'elles est sollicitée perpendiculairement à son extrémité, l'autre l'est dans le sens de sa longueur. Elle se trouve à ce que l'on nomme le point mort, et ne transmet à l'essieu aucun effort. Pour que les deux manivelles concourent également et le mieux possible au démarrage, elles doivent faire l'une et l'autre un angle de 45° avec la direction de la force qui les sollicite; le moment de cette force, par rapport au centre, est alors

$$10000\,p\,\pi\,r^2.\,R\cos 45°.$$

et pour les deux

$$14140\,p\,\pi\,r^2\,R,$$

puisque

$$\cos 45° = 0{,}707.$$

Ce moment doit être égal à celui de la résistance P, agissant à la circonférence extérieure du bandage. On a donc

$$14140\,p\,\pi r^2\,R = P\,R',$$

d'où

$$(4) \qquad P = \frac{14140\,p\,\pi r^2 R}{R'}.$$

Pour entraîner le convoi, la locomotive doit exercer à la circonférence des roues motrices un effort au moins égal.

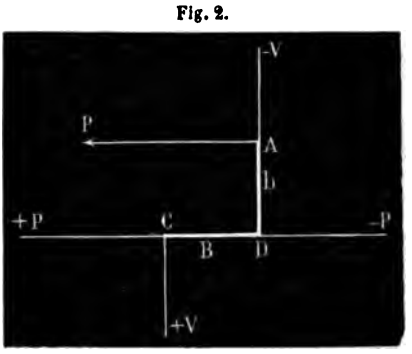
Ce calcul suppose que la longueur de la bielle est infinie; comme elle varie suivant les modèles, ainsi que la direction de la tige, il faut se contenter ici de cette hypothèse qui suffit, du reste, pour examiner la question au point de vue général.

Ainsi, *dans les locomotives l'effort de traction n'est pas le même au démarrage qu'en marche, et il varie encore pendant la marche.*

Ces principes rappelés, il est aisé de se rendre compte des dispositions proposées.

Dans un brevet pris en 1867, l'attelage se fait sur le premier véhicule suivant la locomotive, au moyen d'un levier coudé à angle droit *ADC* (*fig.* 2). C'est en *A* que la jonction a lieu, le point *D* est invariablement fixé au bâtis du véhicule. L'autre extrémité *C* porte, ou est articulé, sur le châssis de la locomotive, verticalement au-dessus de l'essieu moteur.

Fig. 2.



Il peut se présenter deux cas pour lesquels le calcul est aisé : ou le train est immobile et la machine agit pour démarrer; ou le train est en marche, animé de sa vitesse normale, le moteur fonctionnant à l'état de régime. Dans l'un et l'autre cas, la position des points *A*, *D*, *C* est invariable. Supposons qu'il en soit ainsi, et nommons :

P la force horizontale qui sollicite le point *A* en avant, et qui a été appréciée déjà précédemment pour le cas du démarrage (4);
T comme précédemment, l'effort de la traction pour tout le train en marche de régime (3);
b le bras vertical du levier;
B son bras horizontal.

L'essieu n'étant pas susceptible de fléchir, le point *C* doit, dans les conditions où l'on s'est posé, être considéré comme absolument fixe. Le point *A* tend à prendre un mouvement de rotation autour de *C*, si le point *D* n'est pas maintenu par la charge du véhicule. Appliquons au point *C* deux forces égales et parallèles à *P*, et dirigées en sens contraire l'une de l'autre; l'équilibre primitif ne sera

pas rompu. Le système primitif composé d'une seule force appliquée en A, le sera maintenant d'une force égale appliquée en C, d'un couple $(+P, -P)$ ayant AD pour bras de levier et par conséquent Pb pour moment. Ce couple peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan et même remplacé par tout autre de même moment et de même sens. Remplaçons-le par un autre ayant B pour bras de levier. Pour qu'il soit égal au premier, il faudra que son moment VB soit égal à Pb et par conséquent que

$$(5) \qquad V = P\,\frac{b}{B}\,.$$

Ce nouveau système, dont les effets sont les mêmes que ceux des précédents, se composera donc d'une force P agissant horizontalement sur le point C et d'un couple $(+V, -V)$ ayant CD ou B pour bras de levier. L'une des forces $+V$ agit verticalement de haut en bas sur l'essieu et augmente sa charge; l'autre, $-V$, agit verticalement de bas en haut sur l'avant du premier véhicule et tend à le soulever. Ainsi, l'*introduction du levier coudé ne modifie en rien l'effort qui sollicite le train en avant. En augmentant la charge de l'essieu moteur d'un certain poids, on tend à faire soulever l'avant du premier véhicule par une force de même intensité.*

Dans l'équation (5), B dépend du modèle de la machine et du véhicule, et on ne peut en disposer, puisque c'est la distance de l'essieu moteur de l'une à l'avant du bâtis de l'autre. P est déterminé par les considérations présentées en commençant. On ne dispose donc que de b, mais cela suffira pour donner à V telle valeur que l'on voudra théoriquement.

En construction, il peut y avoir quelques restrictions à cette latitude, telles, par exemple, que la nécessité de ne pas tenir le point d'attelage trop élevé au-dessus des parties rigides et bien résistantes de la machine.

En pratique, il y a encore d'autres restrictions. On ne saurait admettre, par exemple, qu'en marche ou au départ l'avant du premier véhicule puisse être sollicité de bas en haut au point de quitter les rails. Cette dernière condition, qui fixe la limite du possible, peut servir à déterminer b.

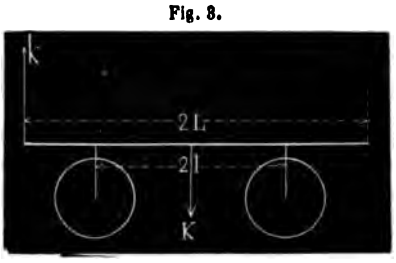
Comme la résistance que l'avant d'un véhicule oppose au soulèvement dépend de son poids, de la position de son centre de gravité et de celle des points d'appui, il faut, pour faire un calcul numérique, savoir quelle est la nature de cette voiture et son mode de chargement. Dans l'état actuel des choses, la machine est immédiatement suivie du tender qui, outre son poids propre, porte sa provision d'eau et de charbon; ces matières, qui se consomment pendant le trajet, font varier le poids total, et aussi dans certains types la position du centre de gravité. Il est donc prudent de ne considérer que le tender vide.

Remarquons avant d'aller plus loin que, dans le système Engerth et ses dérivés, le tender, concourant déjà à l'adhérence, l'invention dont il s'agit ne peut trouver d'application, le premier véhicule indépendant étant dans ce cas trop éloigné de l'essieu moteur.

Pour préciser les idées, supposons que le tender soit construit de telle façon que les essieux soient placés à égale distance de ses extrémités, et qu'à vide son centre de gravité se trouve sur la verticale, élevée par le centre de figure de sa projection horizontale.

Nommons (*fig.* 3):

Fig. 3.



$2L$ la longueur totale du tender;

$2l$ la distance des axes des deux essieux;

K le poids du tender vide qui, dans certains types, s'élève à 11 tonnes (1).

Évidemment, si une force supérieure soulève le véhicule par une

(1) On pourrait à la rigueur augmenter K du poids de l'approvisionnement qui doit exister encore quand on arrive à la station qui précède celle où il doit être renouvelé.

de ses extrémités et le tient en équilibre dans cette position, il ne portera plus que sur l'essieu opposé. On aura alors, entre cette force, le poids et les longueurs, la relation.

$$k(l+L) = Kl,$$

d'où

$$k = K\frac{l}{l+L} = K\frac{1}{1+m},$$

m étant le rapport $\frac{L}{l}$ qui est toujours plus grand que l'unité.

k étant, suivant le cas, déterminé ainsi ou par des moyens analogues, on aura la valeur de V qu'il ne faudra point dépasser. Elle sera

$$(6) \qquad V = P\frac{b}{B} = k = \frac{K}{1+m}.$$

On en tirera

$$b = \frac{K}{P}\cdot\frac{B}{1+m}.$$

On aura alors la certitude que l'avant du tender ne quittera point les rails au départ des stations, et comme c'est en ce moment que la machine exerce le plus grand effort, *à fortiori*, il ne les quittera point en route.

Mais on a vu (3) que la tension T en route était différente de celle P au départ. b et B étant déterminés, l'effort V' qui agit sur l'essieu pendant la marche devient

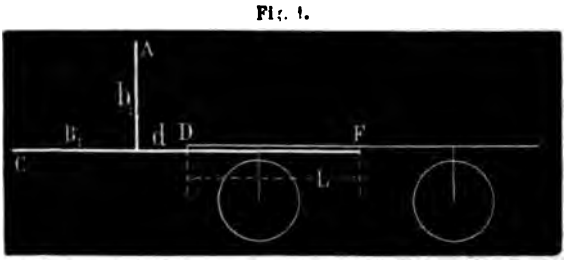
$$(7) \qquad V' = T\frac{b}{B} = \frac{T}{P}\cdot\frac{K}{1+m},$$

valeur inférieure à V, puisque P est plus grand que T; donc, alors aussi, les roues antérieures du véhicule ne seront point, en marche, soulevées au-dessus des rails.

Avant d'examiner les conséquences pratiques probables de l'allègement de la charge qui repose sur l'essieu antérieur du premier véhicule, il est bon d'examiner un autre moyen proposé pour l'agencement du levier coudé. Dans cette nouvelle hypothèse (*fig.* 4), le bras B_1 horizontal du levier ne se termine pas au point

D. Il se prolonge au-delà d'une quantité *L* et vient s'articuler sous le tender en *F*, à hauteur de la verticale du centre de gravité. Le point *C* reste ce qu'il était. Le bras vertical b_1 du levier n'est plus astreint à se trouver à l'extrémité du châssis du tender. Il peut être placé à une distance B_1 de l'essieu moteur et à celle *d* de ce châssis. Enfin, la longueur b_1 peut être différente de *b*.

Fig. 1.



En se servant encore ici des propriétés des couples, on arrivera à la force *P* sollicitant le point *C* en avant, et à un couple $(+V_1 - V_1)$ ayant *CF* pour bras de levier, V_1 étant déterminé par l'équation

$$P b_1 = V_1 (B_1 + d + L).$$

Or, dans cette équation, *P* et *L* restent les mêmes que dans le cas précédent, si la machine et le tender n'ont pas changé. La somme des longueurs $B_1 + d$ est précisément celle que l'on avait précédemment désignée par *B*, laquelle est la distance de l'essieu moteur à l'avant du tender.

On peut donc écrire

$$P b_1 = V_1 (B + L),$$

équations où b_1 et V_1 sont seuls inconnus et d'où l'on peut tirer

$$V_1 = P \frac{b_1}{B + L},$$

Si pour comparer les effets des deux dispositions, toutes autres circonstances étant égales, on fait

$$b_1 = b,$$

on aura

$$V_1 = P \frac{b}{B + L} = K \frac{B}{B + L} \cdot \frac{1}{1 + m}$$

et en marche

$$V'_1 = \frac{T}{P} \cdot \frac{B}{B+L} \cdot \frac{K}{1+m},$$

valeurs qui sont plus petites que celles de V et V' trouvées pour le premier cas.

Donc, *toutes circonstances étant égales, le prolongement du bras horizontal du levier, sous le centre de gravité du tender, a pour effet de réduire et la surcharge de l'essieu moteur et la tendance du tender au soulèvement.*

Mais il est évident que cette disposition, dans l'idée de celui qui l'a conçue, a pour but d'augmenter la charge en opposant une plus grande résistance à la force qui agit de bas en haut. Puisqu'il n'en est pas ainsi en laissant b ce qu'il était, il faut le changer de façon que V_1 fasse équilibre au poids du tender. Il serait d'autant plus dangereux de dépasser cette limite qu'alors les 4 roues quitteraient la voie. Nous supposerons toujours que K est le poids du tender vide; on a dit pourquoi. On a dans cette nouvelle hypothèse

$$V_1 = \frac{Pb_1}{B+L} = K,$$

d'où

$$b_1 = \frac{K}{P}(B+L)$$

Ainsi, *pour tirer de cette 2e disposition tout ce que l'on en espère, le bras vertical du levier devra être plus long que précédemment.*

Cette valeur de b_1 donnera pour celle de V'_1 en marche

$$V_1' = \frac{T}{P} \cdot K.$$

Le rapport de V à V_1 et de V' à V'_1 est, dans ce cas,

$$(8) \qquad \frac{V}{V_1} = \frac{V'}{V'_1} = \frac{1}{1+m}.$$

Ainsi, *en prolongeant le bras horizontal du levier jusqu'à la verticale du centre de gravité du tender et se donnant la condition de ne pas soulager ce dernier de tout son poids au départ,*

on augmente davantage la charge de l'essieu moteur, mais aussi la tendance au soulèvement.

Puisque l'effort de traction n'est pas le même au départ qu'en marche, qu'il varie en route suivant les circonstances du mouvement du train, la force qui agit de bas en haut sur le premier véhicule du tender varie elle-même, et parfois brusquement. Cette circonstance combinée avec l'élasticité des rails est une cause de bondissement et par contre de déraillement. Comme il en existe déjà d'autres, les ingénieurs de chemins de fer adopteront d'autant moins les inventions dont il s'agit que, comme on le verra par un exemple, l'accroissement d'adhérence qu'ils procurent est faible relativement à l'adhérence naturelle de la machine.

Dans la seconde hypothèse, où le levier se prolonge jusqu'à hauteur de la verticale du centre de gravité du tender, en palier, la tendance au bondissement se fait sentir sur les 4 roues à la fois; en rampe, elle se manifeste tantôt sur l'un, tantôt sur l'autre des deux essieux, suivant le sens de la marche. Les chances d'accidents sont donc plus variées et plus nombreuses.

C'est pour éviter les effets dont il s'agit que l'on a toujours grand soin de construire les voitures de façon que les points d'attache soient à la même hauteur. L'inclinaison de la ligne mathématique qui réunit deux véhicules modifie la charge sur les essieux absolument comme les dispositions qui nous occupent. Un exemple vulgaire rend le fait bien sensible. Quand une grande personne traîne une de ces petites voitures qui servent de jouets aux enfants, souvent l'avant-train se soulève et les roues de derrière restent seules en contact avec le sol.

Lorsqu'un véhicule parcourt une courbe, son mouvement donne lieu au développement de la force centrifuge. Elle le sollicite horizontalement et fait appuyer les boudins des roues extérieures contre le rail du même côté. La résistance de ces boudins serait donc, contre un déraillement, la seule et bien insuffisante garantie, si on n'y remédiait point par un procédé spécial.

Dans les courbes, on pose le rail extérieur un peu plus haut que l'autre, de sorte que le wagon s'y trouve comme sur un plan incliné. La différence de niveau des deux rails est calculée pour que la résultance de la force centrifuge et du poids du wagon soit normale au plan tangent aux faces supérieures de ces rails.

Dans les systèmes que nous examinons et qui ont pour effet de diminuer l'action de la pesanteur sur l'un des essieux, ou sur les deux essieux du tender, la résultante de la force centrifuge et du poids allégé, n'a plus la même direction pour ce véhicule que pour les autres voitures. Il est donc absolument impossible, dans les courbes, de poser les rails de manière à satisfaire en même temps aux conditions nécessaires pour le tender et tout le reste du train. Ces systèmes augmentent donc forcément dans les courbes les causes de déraillement.

Sans vouloir entrer dans le détail des systèmes de construction, qui demandent une connaissance très intime du matériel et de sa confection, nous devons signaler encore une difficulté. L'accouplement par levier coudé rejette le point d'attache du véhicule à une hauteur plus grande que d'habitude. Les locomotives en usage ne s'y prêtent point. Pour un essai, même temporaire, la présence du levier et des organes de traction au milieu de l'espace laissé libre pour les mouvements du mécanicien et du chauffeur, gênerait singulièrement leur service et leurs communications avec le tender. Un remaniement de matériel pour obtenir un résultat que la théorie montre dangereux, est une opération pour laquelle les directeurs de Compagnies ne sauraient avoir que des répugnances.

Il peut être bon, pour frapper l'esprit par des chiffres, d'appliquer tout ce qui précède à une machine en service.

L'un des modèles de locomotives en usage au Chemin de fer du Midi pour les trains de marchandises est à trois essieux couplés, pèse 35,2 tonnes, et marche à 25 ou 30 kilomètres à l'heure; la vapeur s'y tient à la pression de 7^k par centimètre carré; mais, dans les cylindres, elle n'est que de 0,65 de ce chiffre. Cette machine a les dimensions suivantes :

$$R' = 0{,}65, \qquad R = 0{,}325. \qquad r = 0{,}225,$$

la pression dans le cylindre est de

$$p = 0{,}65.7^k = 4^k\,55.$$

D'après ce qui précède on peut prendre

$$n = 25.$$

Cette locomotive remorque des trains de 45 wagons pesant en moyenne 10000^{k}. ce qui donne

$$Q = 450^{t} = 450000^{k}.$$

Son tender est à 4 roues. D'après une pesée directe faite obligeamment par M. Millet, directeur des ateliers, les deux essieux, distants de 2^{m}50 sont à vide, chargés, celui de devant de 5200^{k}, celui de derrière de 5100^{k}. Cette différence de 100^{k} entre les charges tiendrait le centre de gravité de 0^{m},01 plus rapproché du premier que du second, ce qui, pour des calculs pareils, peut être négligé. Rappelons que nous avons dit pourquoi il était nécessaire de ne tenir compte que du poids du tender vide. D'après ceci, on doit poser :

$$K = 10000^{k}. \qquad L = 3^{m}15. \qquad l = 1^{m}25.$$

$$m = \frac{L}{l} = 2{,}52.$$

Ceci établi, on a pour l'effort de démarrage (4), tout calcul fait,

$$P = 5120^{k},$$

pour la traction par tonne (2),

$$t = 6^{k},0111$$

et pour les 450 tonnes du train

$$T = 2705^{k}.$$

Si le levier est fixé à l'avant du tender, la composante verticale qui augmente la charge sur l'essieu de derrière de la locomotive, composante identique à celle qui tend à soulever l'avant du tender, sera (6) au démarrage,

$$V = 2926^{k}$$

et en marche

$$V' = 1546^{k}.$$

Comparant ces chiffres à celui du poids de la machine qui est de 35200^{k}, on verra que, dans ce cas, l'augmentation de charge ou d'adhérence n'est que $^{1}/_{11}$, soit un peu plus de 8 p. $^{0}/_{0}$ au démarrage, et en marche de $^{1}/_{11}$, ou un peu plus de 4 p. $^{0}/_{0}$.

Si nous passons ensuite au cas où le levier, au lieu de s'articuler à l'avant du châssis du tender, se fixe sous sa caisse à hauteur de la verticale du centre de gravité; si, en outre, on donne au bras vertical du levier la longueur voulue pour tirer de cette disposition le plus grand parti possible, on trouvera, en se servant de la formule (8), que les forces verticales seront, au démarrage, de 10300^k, et et en marche de 5413^k, ce qui donne une augmentation d'adhérence de 29 p. % dans le premier cas et de 15 p. % dans le second. Ces chiffres sont certainement moins désavantageux que les premiers, mais on a vu qu'on ne les obtient qu'en augmentant les chances d'accident.

On n'a ici examiné que deux cas, et il peut se présenter beaucoup d'autres dispositions à l'esprit des inventeurs. La marche suivie permettra de les mettre en équation, et comme tout organe mécanique se réduit, en dernier lieu, à une combinaison de leviers, il est permis de croire que l'on n'arrivera à augmenter l'adhérence qu'en introduisant une tendance au soulèvement qui fera toujours reculer les ingénieurs pratiques devant l'adoption de systèmes analogues.

ÉPOQUE PRÉ-HISTORIQUE

STATION DE CUBZAC (GIRONDE)

CAMP DE L'AGE DE LA PIERRE POLIE

PAR M. DELFORTRIE.

Cherchez et vous trouverez est, dans toute l'acception du mot, parole d'évangile pour l'archéologue. Naguère, l'anté-historique n'était représenté dans le département de la Gironde que par les haches polies de l'Entre-deux-Mers et les pointes de flèches en silex des Landes, lorsqu'il y a six mois à peine, une station palustre de l'âge de la pierre polie était exhumée au centre de la ville de Bordeaux; aujourd'hui, c'est d'un camp de la même époque dont il s'agit.

Le plateau sur lequel on voit encore à Cubzac quelques ruines de l'ancien château de Montauban ou des quatre fils Aymon, forme une sorte de promontoire qui commande tout à la fois la rivière de Dordogne et deux vallées. Cette forte position stratégique fut occupée d'abord aux temps anté-historiques, et plus tard à l'époque romaine, ainsi que le témoignent les nombreux débris que je viens d'y recueillir, en collaboration avec M. Émile Benoist, de Nancy.

Et tout d'abord, nous nous empressons de reconnaître qu'avant nous (1), et dès 1862, M. Gassies signalait sur ce même plateau de Cubzac la présence d'une quantité d'éclats de silex, dans lesquels se révélait pour lui la main de l'homme des premiers âges. M. Gassies en avait parfaitement jugé, mais je ne sache pas que notre honorable collègue ait à ce sujet poussé plus avant ses investigations.

(1) *Actes de l'Académie de Bordeaux*, 1863, 2e trimestre.

Le plateau de Cubzac est formé d'une puissante assise de calcaire à astéries exploitée pour la pierre de taille; la roche, dont la stratification présente un plan à peu près horizontal, est recouverte d'une couche de terre variant en épaisseur de 0m20 à 2 mètres; la partie du plateau faisant face à la route de Saint-André-de-Cubzac à Bordeaux présente un escarpement de 15 mètres environ; c'est là aussi que la couche de terre se montre la plus épaisse; c'est ce point que nous avons choisi pour faire notre fouille.

La superficie du plateau est d'environ trente-cinq ares. Sur toute son étendue, le sol est jonché d'éclats de silex mêlés à des débris d'ossements et à des fragments de poterie; vestiges anté-historiques et de l'époque romaine, bouleversés par la charrue, s'y montrent confondus.

La fouille a fourni les résultats suivants:

1° Couche de terre arable d'une épaisseur de 0m50 à 0m80, renfermant de nombreux silex, tels que couteaux, éclats retouchés, os fracturés et striés, débris de poteries anté-historiques; le tout mêlé à des poteries romaines et à des fragments de fer et de bronze de la même époque.

2° Couche de 0m20 à 0m30, composée d'une terre noire, très compacte, en certains endroits onctueuse au toucher, semée de débris de charbon, dans laquelle il y a absence complète de vestiges de l'époque romaine, et où nous avons recueilli bon nombre d'os fracturés et striés, parmi lesquels quelques-uns sont ornés (fig. 9), quantité de silex taillés, tels que couteaux, poinçons, grattoirs, éclats retouchés, pierres de fronde, 2 pointes de flèches en silex (fig. 6 et 7), instruments en os consistant en poinçons (fig. 12), polissoirs ou spatules (fig. 15 et 16), emmanchures en bois de cerf, 2 flèches barbelées (fig. 10 et 11) en cerf, hache polie en silex, fusaïoles (fig. 3), coquille percée pour collier (*Cardium,* fig. 4), marteaux formés de galets de grès quartzeux dont les extrémités du grand axe sont couvertes de traces de percussion, silex craquelés, et enfin un fragment de polissoir en grès grossier; le tout mêlé à quelques rares écailles d'huîtres et à de nombreux tessons de poterie.

3° La dernière couche, épaisse de 0m30 à 0m40, n'offrait plus la même teinte noire; on n'y retrouvait plus trace de charbon.

et les débris, quoique les mêmes que dans la couche précédente, ne s'y sont montrés qu'en petit nombre. Au fond de la couche, c'est à dire sur la roche même, nous avons pu recueillir quelques silex taillés, des tessons et des fusaïoles.

La poterie, fournie par la couche médiane et celle inférieure, offre tous les caractères propres à la céramique de l'âge de la pierre : cuisson imparfaite, pâte grossière, tendre, poreuse, renfermant quantité de grains calcaires ou quartzeux et même des fragments de coquille. Ces poteries (voir fig. nos 1, 2, 13, 14) portent pour la plupart des ornements qui, par leur rusticité, leur défaut de parallélisme, indiquent qu'elles ne sont pas dues au tour; certains ornements (fig. 13) laissent voir des traces d'ongles.

Parmi les silex taillés figurent deux types d'instruments très intéressants.

Le premier (fig. 5), exemplaire unique, d'une longueur de 32 millimètres, a un tranchant en biseau qui, se courbant légèrement en dedans, rend l'outil, dans son ensemble, convexe à l'extérieur et concave à l'intérieur; il n'a pu être utilisé qu'emmanché en herminette, comme le sont encore aujourd'hui certains instruments des néo-Calédoniens.

Le deuxième type (fig. 8), représenté par 7 exemplaires à peu près identiques, est un instrument vraiment remarquable par son fini et son exiguïté; il ne mesure en longueur que 16 millimètres; son tranchant en biseau est très acéré; les retouches régulières qui s'observent sur les parties latérales et au talon indiquent qu'il était pourvu d'un manche. Ainsi disposé, comme l'outil est droit, il devait avoir l'aspect de nos tourne-vis; le fini du tranchant indique que l'instrument était destiné à des ouvrages délicats. Nilsson (*Habitants primitifs de Scandinavie)* cite bien des instruments à peu près semblables, auxquel il donne le nom de *flèches à tranchant transversal.* Je doute que ceux que nous décrivons aient jamais eu cette destination.

Le camp de Cubzac se distingue par un caractère *sui generis* qui consiste en ce que, à part deux couteaux d'une longueur de 0m10 et une hache polie longue de 0m13, tous les silex taillés, tels que couteaux, poinçons, grattoirs et éclats, y sont de très

petite dimension, et proviennent (ainsi qu'il est facile de s'en convaincre par le nombre considérable de nuclei qu'on y trouve), proviennent, disons-nous, de galets siliceux et quartzeux ramassés par les Aborigènes dans le lit de la Dordogne. Nos recherches, bien que minutieuses, ne nous ont fait découvrir aucun nucleus qui ne fût roulé et dépassant la grosseur d'un œuf.

Le camp de Cubzac ne présente aucune trace de grand foyer; lit de cendres, amas de détritus, signes caractéristiques des stations côtières de l'âge de pierre, font ici défaut; les restes alimentaires n'y sont représentés que par les ossements assez nombreux, il est vrai, mais pas abondants, comme dans la station de Bordeaux, par exemple; les coquillages y figurent à peine, car la couche médiane n'a fourni que les débris de quatre ou cinq valves de l'*Ostrea edulis,* l'absence de ce comestible, si recherché des peuplades des premiers âges, tendrait à elle seule à laisser supposer que sur le plateau de Cubzac n'était pas l'habitat des aborigènes, et que le camp n'était occupé que temporairement ou par des vedettes seulement. A l'appui de cette supposition, nous ferons remarquer qu'à cette époque reculée, les terrains marécageux devaient s'étendre jusqu'au pied du plateau, et qu'aujourd'hui, sur ce sol mis en culture, s'observent quelques silex taillés mêlés à des os fracturés. Là, sans doute, était la cité sur pilotis au milieu des marais. Nous nous proposons, M. Benoist et moi, de poursuivre nos recherches sur ce point (1).

Les ossements du plateau de Cubzac sont fracturés systématiquement. Nous y avons recueilli aussi, comme dans la station de Bordeaux, des métatarsiens de bœufs encore entiers, mais dont les têtes articulaires ont subi un commencement d'écrasement; les instruments, tels que poinçons, spatules ou polissoirs, présentent les mêmes formes, sont même fabriqués avec

(1) Depuis la rédaction de cette notice, une fouille pratiquée dans le marais, à 100 mètres environ du plateau, semble par ses résultats venir confirmer nos prévisions. Elle nous a fourni des écailles d'huîtres mêlées à des instruments en os, parmi lesquels : deux grands poinçons ou pointes de lance en cerf, et deux hameçons aussi en cerf, d'une longueur de 0m09, exactement semblables par la forme à ceux employés aujourd'hui par les Esquimaux.

les mêmes os que ceux provenant du lit de cendres de la rue Rohan; mais, malgré ces rapprochements, il n'y a pas pour nous synchronisme entre ces deux stations. Comme la cité palustre de Bordeaux, le camp de Cubzac appartient à l'âge de la pierre polie; mais, ainsi que nous l'avons dit dans une précédente Notice, la cité anté-historique de Bordeaux est contemporaine des kjökkenmöddings du Danemark; tandis que pour nous le camp de Cubzac serait d'une époque postérieure, c'est à dire synchronique, des Palafittes ou cités lacustres de la Suisse. Cette opinion, nous la puisons dans la présence de la hache polie en silex pyromaque, de la poterie ornée et des fusaïoles, fusaïoles qui, soit dit en passant, ne sont pas pour nous des pesons de fuseau, mais bien des perles pour collier, ou peut-être mieux encore des plombs de filets.

La faune de Cubzac comprend chèvre, sus, petit bœuf, cheval, chien, ou loup et cerf.

Bordeaux, 1er mai 1868.

CUBZAC (GIRONDE)

1

2

3

4

5

6

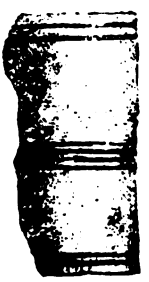
7

8

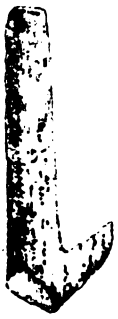
Nau

CAMP DE L'ÂGE DE LA PIERRE POLIE

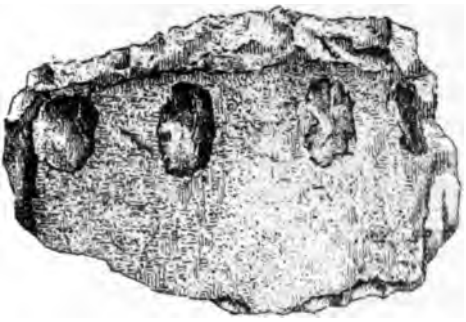
CUBZAC (GIRONDE)


9

10


11

12


13

15

14

16

M 10 U

DE LA MÉTHODE

ET

DE LA PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALES

leçon faite le 27 décembre 1867

PAR A. BAUDRIMONT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

MESSIEURS,

Vous savez que nous sommes réunis dans cette enceinte pour nous occuper spécialement de la chimie.

Si je me bornais à dire à ceux qui n'ont aucune notion de cette science, que *c'est elle qui étudie la composition des corps, les actions qu'ils exercent les uns sur les autres au contact apparent et les produits qui résultent de ces réactions,* je risquerais de n'être point compris; car les opérations de la chimie sont d'une nature tellement spéciale, qu'il faut les avoir vues pour en avoir une idée suffisante.

Quoique nous soyons souvent témoins de phénomènes chimiques, tels que ceux de la combustion qui a lieu dans nos foyers et de celle qui nous donne la lumière artificielle qui nous éclaire; quoiqu'il s'en accomplisse incessamment en nous-mêmes dans la nutrition et la respiration, la plupart de ces phénomènes ne sont ni assez nombreux, ni assez évidents, pour que nous en ayons une connaissance satisfaisante. Il a fallu créer une méthode d'exploration pour apprendre à les connaître; aussi, la chimie est-elle une science toute moderne qui a été complètement ignorée des savants de l'antiquité, quoique, en réalité, on en retrouve des traces dans l'alchimie, et surtout dans les travaux de quelques savants du Moyen Age.

Avant d'aborder l'étude de la chimie, il importe de connaître la

méthode qui lui a donné naissance et d'avoir une idée de l'ensemble des sciences. C'est en les comparant les unes avec les autres que la spécialité de la chimie ressortira d'une manière évidente.

Placé sur le globe que nous habitons et qui se meut dans l'espace, l'homme ne peut rester indifférent au magnifique spectacle qui l'entoure : les cieux, la mer, la terre, les végétaux, les animaux, sont les objets incessants de ses observations; il en étudie la situation relative, les formes, la structure. Mais employât-il le télescope qui semble lui faire franchir des distances immenses et le rapprocher des êtres les plus éloignés; se servît-il du microscope qui lui fait voir des objets si ténus qu'ils échappent entièrement à la vue simple, il resterait encore en dehors de la partie du domaine des sciences expérimentales, qui comprend la chimie dans sa vaste étendue.

Pour connaître les faits sur lesquels ces sciences sont fondées, *il a fallu créer l'expérimentation.* Il a fallu placer les êtres dans des circonstances telles que la nature ne nous les donne pas. Il est résulté de ce nouveau mode d'exploration une foule de faits, de produits ou de phénomènes, qui, sans lui, seraient à jamais demeurés inconnus, et qui nous ont donné la clé d'un trésor inépuisable de connaissances qui sont vraiment dignes, non seulement du plus vif intérêt, mais de notre admiration la plus profonde.

Les principaux moyens que l'homme possède pour étudier les sciences sont : l'*observation directe,* l'*expérimentation* et les *opérations de sa raison,* qui doit le diriger dans tous les actes de sa vie intellectuelle.

Thalès de Milet, un Grec, qui vécut dans le VI^e^ siècle qui précéda notre ère, c'est à dire il y a environ deux mille et quatre cents ans, sut qu'une matière que l'on nommait *électron,* et que nous nommons *ambre jaune* ou *succin,* jouissait de la propriété d'attirer les corps légers après avoir été frottée.

On savait encore, à cette époque reculée, qu'une pierre noire nommée *magnès* jouit de la propriété d'attirer le fer, et que le feu ne peut être entretenu dans un vase fermé. Ajoutons à cela qu'Archimède est parvenu à concentrer la chaleur solaire à l'aide d'un appareil formé de miroirs réflecteurs, et qu'il s'en servit, dit-on, pour incendier une flotte qui assiégeait Syracuse.

Les connaissances fondées sur l'expérience qui nous ont été

léguées par les Grecs étaient donc fort restreintes, isolées, et n'avaient aucun caractère scientifique.

Cet état a duré pendant un grand nombre d'années, et ce n'est que depuis deux siècles environ que la méthode expérimentale a pris un développement considérable et est devenue ce qu'elle est aujourd'hui, c'est à dire une source inépuisable de faits de la plus haute importance comme science, et conduisant en outre à des applications éminemment utiles.

Si l'on recherchait les causes de l'ignorance dans laquelle l'homme est demeuré si longtemps plongé, il faudrait les attribuer d'abord à la domination des Romains, et ensuite à l'existence d'une philosophie dite *scholastique,* qui avait la prétention de tout expliquer sans rien connaître.

Les Romains ne nous ont effectivement rien laissé qui soit retatif à la philosophie expérimentale, ni même aux simples sciences d'observation. L'ouvrage de Pline n'est qu'une compilation informe qui occupe le plus bas degré des sciences naturelles; c'est à dire que l'on ne trouve dans les œuvres de ce collecteur que des descriptions insuffisantes, qui ne sont réunies entre elles par aucune de ces méthodes qui, en moins d'un siècle, sous l'inspiration des Linnée, des de Jussieu, des Cuvier, ont jeté une si vive lumière sur les sciences qui n'ont exigé que la simple observation dirigée par la raison humaine pour prendre naissance.

La domination des Romains a donc exercé une influence funeste sur le développement intellectuel des nations. Non seulement ils ne nous ont rien laissé dans cet ordre des connaissances humaines ; mais, à proprement parler, ils n'ont été que des barbares qui ont perfectionné l'art de la guerre pour égorger leurs voisins et vivre de leurs dépouilles.

Vous m'excuserez, Messieurs, d'avoir tant insisté sur cette partie négative de l'histoire de la science; mais j'ai cru devoir le faire, d'autant plus que nous vivons à une époque où, malgré tous les bienfaits dont elle nous a comblés, il est encore besoin d'affirmer que la véritable gloire et le bonheur de l'homme ne consistent pas dans le nombre des baïonnettes et la force des pièces d'artillerie.

Il y a quelques siècles que régnait une philosophie nommée *scholastique,* philosophie fondée sur les faibles connaissances qui

nous ont été léguées par les Grecs et sur des idées préconçues. Cette philosophie, profondément ignorante, avait la prétention de tout expliquer, et malheureusement elle a laissé parmi nous des traces profondes, si profondes qu'à notre époque l'interprétation des sciences en est affectée, et que, loin d'être libres, nous sommes encore dans une période de réaction, ainsi que le titre de *méthode à posteriori,* donné par divers savants, et notamment par M. Chevreul, à la méthode expérimentale, vient l'attester. Ce n'est que parce que les prétendus philosophes scholastiques jugeaient *à priori,* c'est à dire avant de connaître et en raison de principes inventés et purement imaginaires, que le terme *posteriori* se trouve justement appliqué, comme marquant la plus grande différence qui peut exister entre une méthode factice, illusoire, qui a la prétention de tout expliquer sans l'avoir convenablement étudié, et une méthode qui dit à l'esprit humain : *Garde-toi de juger avant de connaître!*

Pour connaître, il faut expérimenter.

Il faut placer les corps dans une foule de circonstances, les mettre en présence les uns des autres, étudier les phénomènes et les produits nouveaux qui résultent de ces tentatives.

Ce n'est que depuis deux siècles environ que cette nouvelle méthode s'est révélée à l'homme, et déjà elle a établi une ligne de démarcation nettement tranchée entre notre état social et celui des peuples anciens.

Je vous disais, il n'y a qu'un instant, que Thalès de Milet connaissait la propriété que possède l'*électron* d'attirer les corps légers lorsqu'il a été frotté. Nous allons voir ce que ce simple fait est devenu entre les mains des expérimentateurs.

En essayant d'obtenir le même résultat avec d'autres corps, on a vu que les résines en général, le soufre et le verre, jouissaient de la même propriété; mais, de plus, qu'après avoir attiré un corps, ils le repoussaient, et que certains corps, après avoir été frottés, attiraient ceux qui avaient été repoussés par d'autres : tel est, par exemple, le cas du verre à l'égard du soufre et des résines.

Cette petite balle de moelle de sureau, dorée et suspendue à un fil de soie, forme ce qu'on appelle un *pendule électrique.* Si l'on en approche un morceau de résine frottée, celui-ci l'attire et la repousse aussitôt qu'il a été mis en contact avec elle; le verre

frotté, au contraire, attire celle qui est repoussée par la résine et la repousse aussi après le contact, et un morceau de résine frottée l'attire lorsqu'elle est repoussée par le verre.

On a donné le nom d'*électricité* à la cause de ces phénomènes, et déjà l'on a pu les généraliser dans une loi que l'on formule ainsi : les corps électrisés de la même manière se repoussent, et ceux électrisés d'une manière contraire s'attirent.

Ces faibles actions ont été considérablement amplifiées. Otto, de Guerike, a inventé une machine produisant des effets plus puissants. Elle était essentiellement formée d'un globe de soufre que l'on faisait tourner sur un axe et que l'on frottait avec les mains ou avec un morceau de drap. Les machines électriques sont généralement formées d'une glace circulaire montée sur un axe, qui tourne entre des frottoirs; l'électricité qu'elles produisent est recueillie par un cylindre de métal, isolé ou séparé du sol par des pieds de verre.

Aujourd'hui de nombreuses tentatives sont faites, et de nouvelles machines, plus puissantes que ces dernières, sont apparues. Mais dans toutes le frottement est la cause première du développement de l'électricité.

Ces machines, lorsqu'elles sont mises en activité, non seulement produisent des attractions et des répulsions, comme vous le voyez par ces morceaux de papier qui sont attirés par le conducteur et repoussés ensuite, mais elles donnent aussi des étincelles éminemment remarquables, lorsque l'on en approche le doigt ou une tige de métal terminée par une boule.

Une baguette de verre, un morceau de soufre ou de résine, n'en tirent aucune étincelle, et il en est de même de tous les corps idio-électriques ou directement électrisables. Cela a permis de distinguer les corps en *conducteurs* et en *non conducteurs* de l'électricité : tous les métaux et le corps de l'homme sont conducteurs, les corps idio-électriques ne le sont point; il en est de même de l'air, de la laine et de la soie.

On fait quelquefois des expériences sans trop savoir ce que l'on en pourra tirer, et cependant la nature répond toujours à l'expérimentateur qui l'a interrogée. Sa réponse, fût-elle négative, peut encore être utile; car il importe de connaître la limite des faits et des actions que nous étudions.

C'est peut-être à quelque tentative de ce genre qu'est due l'invention des condensateurs électriques.

En 1746, Cuneus, disent les uns, Musschenbroeck, disent les autres, plaça une clé dans un petit bocal contenant de l'eau, peut-être pour voir si le métal séparé par un corps non conducteur donnerait une étincelle, et l'approcha du conducteur d'une machine en activité. Non seulement il obtint des étincelles qui, à la vérité, ont été en diminuant d'intensité, mais en voulant retirer la clé avec la main libre, l'expérimentateur *éprouva une violente commotion*.

Phénomène singulier, étonnant, et bien digne des méditations des hommes de science.

Ce vase contenant une clé et de l'eau donna naissance à la bouteille de Leyde, qui fut le premier condensateur. On eut l'idée de réunir plusieurs grandes bouteilles de Leyde, et l'on créa ainsi une batterie électrique dont les étincelles produisent autant de bruit qu'un fort coup de fouet, et dont il serait fort dangereux pour l'homme de recevoir la commotion, car on a construit des batteries assez fortes pour tuer un bœuf.

Vous avez devant vous l'image réelle de la foudre.

De Romas, de Bordeaux, et Franklin, guidés par cette analogie, purent, à l'aide de cerfs-volants, soustraire l'électricité des nuages orageux et la soumettre à des expériences qui permirent d'en reconnaître l'identité.

Plus tard, Franklin inventa le paratonnerre.

Il y a loin de là à la faible expérience signalée par Thalès de Milet, et tous ces phénomènes ont été obtenus en moins d'un siècle !

Un fait d'un autre ordre démontrera peut-être mieux encore la puissance de la méthode expérimentale.

Il y a encore moins d'un siècle qu'un médecin de Bologne, en Italie, Galvani, a écorché une grenouille pour des besoins particuliers. Cet animal, qui paraissait mort, fut traversé d'avant en arrière, au dessus des cuisses, par un fil métallique. Ce fil fut attaché à un balcon de fer, et Galvani remarqua avec étonnement que chaque fois que le vent poussait les pattes de la grenouille contre le balcon, elle exécutait des mouvements violents. Il fallait tout expliquer. Ce savant médecin vit là *un fluide particulier, le*

fluide nerveux, qui fonctionnait chaque fois que le circuit métallique venait à se fermer.

Volta, qui habitait Pavie, eut connaissance de ce fait, et l'attribua, non pas au fluide nerveux, *mais à l'électricité développée par le contact de deux métaux hétérogènes :* le fer et le laiton.

Si, en effet, on suspend la partie inférieure d'une grenouille écorchée à un fil métallique d'une seule nature, on peut toucher les muscles de ses pattes avec l'extrémité libre du fil, et l'on n'obtient rien. Si, au contraire, on emploie deux fils de natures différentes, et que l'un d'eux soit facilement oxydable, l'animal éprouve des convulsions.

Volta pensa alors à augmenter cette nouvelle source d'électricité pour la rendre plus sensible. Il plaça l'une sur l'autre une rondelle de cuivre et une rondelle de zinc, et forma ainsi ce que l'on nomma un *couple électrique*. Il assembla ensuite plusieurs couples en les superposant et en les séparant les uns des autres par des rondelles de drap imprégnées d'eau acidulée, qu'il considérait comme un simple conducteur, afin de transmettre l'électricité d'un couple à l'autre.

Dans la théorie de cet homme célèbre, chaque métal développant une électricité propre, il était évident que l'on ne pouvait superposer deux couples sans que les électricités contraires des métaux mis en contact ne se détruisissent en se neutralisant réciproquement, et qu'il était indispensable d'employer un corps simplement conducteur de l'électricité comme intermédiaire. Il créa ainsi l'instrument que l'on nomme *pile à colonne*. Cet instrument possédait une puissance notable; il permettait d'exciter des contractions et des mouvements chez les animaux vivants, chez des suppliciés; de décomposer l'eau et plusieurs sels métalliques; mais sa construction présentait des inconvénients, et l'on fit une pile horizontale, dans laquelle les rondelles de drap humide furent remplacées par de l'eau acidulée seule. Cette pile présentait aussi plusieurs inconvénients, dont le principal était de se détruire rapidement. On la remplaça par la pile de Wollaston, dont les couples peuvent être séparés des liquides ou y être plongés à volonté.

Plusieurs piles sont connues aujourd'hui. L'une d'elles, la principale, celle qui produit les plus grands effets, est celle de Bunsen modifiée; le cuivre s'y trouve remplacé par du charbon de cornue

à gaz taillé convenablement, et l'on emploie deux acides : l'azotique au centre en contact avec le charbon, et le sulfurique dilué en contact avec le zinc. Ces deux acides sont, d'ailleurs, séparés par un vase poreux en biscuit de porcelaine qui ne leur permet de se mêler que fort lentement.

Aujourd'hui l'on n'admet plus que l'électricité donnée par ces sortes d'instruments soit développée par le contact des métaux hétérogènes, mais bien par des réactions chimiques.

Enfin, nous sommes partis de convulsions exercées dans les pattes d'une grenouille, et nous sommes arrivés à un instrument qui fond les métaux les plus réfractaires, qui détruit presque tous les composés chimiques lorsqu'ils sont placés dans des circonstances convenables, et qui nous donne la lumière électrique.

La pile de Volta a été inventée en 1790. Vous voyez le chemin qui a été parcouru pendant le temps qui s'est écoulé depuis une époque si rapprochée de nous : moins d'un siècle, et plus que depuis l'origine de l'homme ! Voilà ce que nous a donné l'expérimentation.

L'électricité qui se développe dans une pile n'est pas la même que celle produite par le frottement, et dont il a été précédemment question ; mais elles peuvent se transformer l'une dans l'autre.

L'électricité développée par le frottement porte le nom d'*électricité statique*. Il m'arrivera souvent de la désigner sous le nom de *mécanique*. La deuxième porte le nom d'*électricité dynamique*. Je l'appellerai de préférence *électricité chimique*, pour rappeler son origine.

L'*électricité chimique* se meut dans les fils métalliques avec une rapidité qui n'est comparable qu'à celle de la lumière dans les espaces célestes. Dans un fil de cuivre, elle parcourt plus de cent mille lieues en une seconde. C'est ce qui a permis d'établir le télégraphe électrique, et sans entrer en rien dans les détails de cet instrument, vous allez le voir fonctionner sous vos yeux. Il est représenté par deux appareils reliés entre eux par un courant électrique. On ne peut mouvoir l'un sans que l'autre en fasse autant.

Lorsqu'un fil dans lequel passe un courant d'électricité dynamique est rapproché d'un fil neutre, à l'instant même il se développe un courant dans ce deuxième fil ; mais le courant cesse aussitôt.

C'est ce que l'on nomme l'*induction électrique*. On distingue le *courant inducteur* déterminé par une pile en activité, et le *courant induit* qui naît sous l'influence de ce dernier.

Dans l'intention d'augmenter l'action de ces courants, on a roulé les fils pour en faire des bobines, et l'on peut avoir une bobine inductrice et une bobine induite. Si l'on interrompt à chaque instant le courant inducteur, on reproduit chaque fois le courant induit, qui n'aurait duré qu'un instant, quelle que fût la durée du courant inducteur.

L'électricité induite diffère de l'électricité inductrice et possède des propriétés qui la rattachent à l'électricité mécanique. Elle donne des étincelles, produit des commotions terribles, et peut servir pour charger des condensateurs.

Je vous rends témoins des faits que je viens d'avancer. Plus encore, le courant électrique développe la propriété magnétique dans le fer.

Voici un fer cylindrique recourbé et enveloppé d'un fil métallique. Si l'on fait passer un courant électrique dans ce fil, à l'instant même le fer devient un aimant des plus puissants. C'est l'électro-aimant inventé par M. Pouillet, agent qui trouve des applications nombreuses dans la télégraphie électrique.

Vous voyez, Messieurs, que nous sommes loin de l'époque grecque, que nous avons marché à pas de géants, et qu'en moins d'un siècle, nous avons fait cent fois plus que toute l'antiquité.

La contemplation de la nature telle qu'elle s'offre à notre observation est donc insuffisante. Il faut expérimenter, chercher de nouveaux faits. Il suffit de mettre la main à l'œuvre, et celui qui travaille, s'il est en même temps guidé par une saine raison, peut être assuré de recueillir des faits toujours intéressants pour la science, et qui, tôt ou tard, pourront trouver leur application.

Qui aurait pu prévoir qu'un petit morceau d'ambre frotté et une grenouille écorchée nous auraient donné les immenses résultats dont vous venez d'être témoins, et qui n'ont d'analogues que dans la lumière solaire et la foudre, que l'on n'aurait jamais pu comprendre, et à laquelle on n'aurait pu rien opposer, si l'expérience n'était venue éclairer l'homme !

Je parle d'applications, Messieurs, et j'aborde ce sujet. Il ne suffit pas que l'expérience nous donne des faits nouveaux qui enrichis-

sent la science, et satisfassent les scrutateurs de la nature; il faut encore qu'elle nous donne des applications utiles. Permettez-moi d'en signaler quelques-unes à votre attention : la chaleur, revêtant la forme de la vapeur, est devenue une force qui remplace celle de l'homme, des animaux, du vent et des chutes d'eau, force titanique qui a changé la face du monde; l'électricité nous a donné la galvanoplastie, la télégraphie, un agent thérapeutique puissant; la lumière nous a donné la photographie, art tout nouveau, qui ne nous étonne plus. Mais si l'on avait dit, il y a seulement trente-cinq ans, il existe des miroirs dans lesquels on ne peut se regarder sans y laisser son portrait, personne n'eût voulu le croire, et pourtant aujourd'hui c'est un fait réalisé. J'ai eu, plein de confiance dans la méthode expérimentale, l'honneur de prophétiser ce fait dans un concours qui eut lieu à l'École de Médecine vers 1834. On sait aujourd'hui si ma prophétie s'est réalisée.

Il ne suffit point non plus de parler de l'expérience, de la nouvelle voie qu'elle a ouverte à l'homme et de ce qu'elle a créé de merveilleux; il faut autant que possible la réduire en méthode; il faut voir comment l'homme la soumet à son génie, et comment il s'en sert, non seulement pour connaître de nouveaux faits qui en étendent le domaine, mais pour les préciser, les généraliser et en tirer les lois et les applications, qui sont le but que s'efforcent d'atteindre les expérimentateurs de nos jours.

J'ai peut-être été injuste envers la chimie, en ne faisant remonter l'expérimentation qu'à une époque très rapprochée de nous; l'alchimie, qui s'y rattache d'une manière intime, était cultivée dès la plus haute antiquité; mais ses adeptes agissaient dans le secret le plus profond, et lorsqu'il leur a pris envie de publier leurs travaux, ils l'ont fait d'une manière si obscure, qu'il est impossible de les comprendre. Cependant, il faut reconnaître que, vers le neuvième siècle, la chimie proprement dite existait chez les Arabes, et Géber, qui vivait à cette époque, a laissé un véritable traité de chimie, comprenant *la somme de perfection* et un *Traité du magistère*, qui commencent par des notions relatives à la méthode expérimentale, principalement aux qualités que l'expérimentateur doit posséder et aux défauts qui peuvent l'empêcher de réussir. Ces défauts sont rapportés à la mauvaise disposition du corps et de l'esprit, et l'auteur considère

ces derniers comme étant plus considérables que les premiers.

La chimie a brillé au XIII^e^ siècle, où vivaient : Albert-le-Grand, en Allemagne; Roger Bacon, en Angleterre; Raymond Lulle, des îles Baléares, et surtout Arnaud de Villeneuve, en France. J'ai eu entre les mains un précieux manuscrit de cette époque, où l'on décrit une foule d'expériences de chimie. Plus tard est apparu au XV^e^ siècle le célèbre pseudonyme Basile Valentin, dont les écrits, tels que les douze clés de l'art hermétique, appartiennent à l'alchimie; mais son *Currus triumphalis antimonii* et un manuscrit que je possède, et qui dévoile *ses tours de main*, c'est à dire la méthode qu'il faut suivre pour opérer, démontrent qu'il était un habile expérimentateur.

François Bacon, qui vécut de 1560 à 1626, a écrit son *Novum organum*, ouvrage célèbre, dans lequel il démontre la haute importance de l'expérience et les avantages qui peuvent en découler; mais il n'a lui-même que très peu expérimenté.

Il était réservé à Galilée, qui vécut dans le même temps, de 1564 à 1641, et à ses contemporains, d'ouvrir la voie qui a été si féconde en découvertes précieuses. Descartes, Newton et une foule d'illustres savants ont parcouru cette voie de la manière la plus brillante et la plus heureuse.

On savait depuis longtemps que le poids de l'étain augmente par la calcination; mais personne n'avait pu donner l'explication de ce fait, lorsque, dans la première moitié du XVII^e^ siècle, Jean Rey, du Bugue, en Périgord, l'attribua à l'air qui venait s'y fixer.

Cette opinion était d'autant plus hardie, que l'on ignorait que l'air est pesant.

Je dois citer Priestley en Angleterre, Schéèle en Suède et Lavoisier en France, qui, vers la fin du siècle dernier, furent les fondateurs de la chimie dite *pneumatique* ou chimie des fluides élastiques; mais c'est surtout ce dernier savant qui a renversé les fausses théories et en a créé une nouvelle entièrement fondée sur l'expérience.

Je n'en citerai qu'un exemple. Cet illustre savant, voyant le rôle que les alcalis et les terres jouaient dans la constitution des sels, fut conduit à admettre que ces matières sont des oxydes métalliques. En 1807, Davy, savant physicien anglais, donna la preuve que cette opinion était fondée, en décomposant la potasse,

la soude, la chaux, la baryte et le strontiane par l'électricité dynamique. En 1808, Gay-Lussac et Thenard purent extraire le potassium et le sodium par une méthode purement chimique, en enlevant l'oxygène de la potasse et de la soude au moyen du fer, à une température élevée. Bientôt après, Curaudau obtint le même résultat par le charbon. Plus tard, Brunner perfectionna ce dernier procédé. En 1827, M. Voehler obtint l'aluminium, et en 1828, M. Bussy parvint à extraire le magnésium.

Plusieurs de ces métaux ont déjà été l'objet d'applications importantes. L'aluminium rendra d'immenses services lorsqu'on pourra le produire à un prix moins élevé qu'aujourd'hui. Il est peu dense, très résistant, nullement vénéneux et l'on pourra en faire une foule d'objets de la plus grande utilité. Le magnésium, en brûlant, développe une telle lumière, ainsi que vous le voyez, qu'il peut remplacer le soleil pour la photographie, et qu'il a pu permettre de photographier les catacombes et l'intérieur des égouts de Paris.

Par cette esquisse rapide, vous pouvez juger des progrès qu'a faits l'expérimentation; vous voyez que les résulats obtenus ont été confirmés par plusieurs méthodes, et qu'il en est résulté des applications considérables.

L'art des expériences consiste, en réalité, dans une suite d'inventions. Il arrive quelquefois que les faits sont imprévus, comme cela eut lieu pour la grenouille de Galvani; mais le plus souvent l'expérimentateur crée des circonstances nouvelles; il profite des analogies, il rapproche les faits isolés, les combine, cherche à augmenter les effets produits, à corriger des défauts, à diminuer des inconvénients, enfin à perfectionner l'œuvre entreprise.

Les savants qui ont consacré leur vie à l'expérimentation scientifique, et qui y ont trouvé la gloire qui s'attache à leur nom, ont senti la nécessité, sinon de se créer une méthode, mais au moins de communiquer au public les observations générales qu'ils ont faites. Le cours de physique de Dulong était toujours précédé d'une courte et précieuse introduction sur la philosophie expérimentale. Les travaux de M. Chevreul sont imprégnés de l'espèce de culte qu'il a voué à l'expérience, et son histoire des connais-

sances chimiques commence par une analyse de la méthode expérimentale. On a d'Auguste Laurent une méthode de chimie dans laquelle il traite successivement de la constitution des corps, de leurs métamorphoses ou des réactions chimiques relatives aux êtres organiques, de la théorie atomique et de la classification. On doit à M. Claude Bernard une introduction à la médecine expérimentale, qui nous donne l'historique et les motifs des travaux qu'il a entrepris.

On n'a point encore une méthode générale et certaine qui puisse guider l'expérimentateur dans ses recherches. Marchant du connu à l'inconnu, il peut effectivement se présenter des cas qui n'ont pu être prévus, et c'est dans cet imprévu qu'est justement le caractère de l'expérience; car si l'on connaissait d'avance les résultats qu'elle doit donner, il serait inutile de l'entreprendre.

Cependant la méthode expérimentale peut être résumée en quelques points principaux. Elle comprend essentiellement :

I. La recherche de faits nouveaux.
II. Leur accroissement en nombre et en intensité.
III. Leur confirmation par différentes méthodes.
IV. Leur mesure exacte et précise.
V. Leur application à l'industrie, aux arts, à la médecine, et en général à tous les besoins de l'homme.

L'accroissement du nombre des faits est la base même de l'expérience, puisqu'il est la condition indispensable de l'existence de cette partie créatrice des sciences. Un premier fait en amène un second, et commence ainsi une série qui s'étend en rayonnant, et dont le dernier terme ne peut jamais être atteint.

Un expérimentateur ne peut se contenter d'avoir observé un fait nouveau; il faut qu'il le reproduise, afin d'être bien certain de n'avoir pas commis d'erreur. Il est même convenable que ce fait soit confirmé par plusieurs expérimentateurs, et s'il se peut, par des méthodes différentes les unes des autres.

On peut, à quelque distance du foyer d'un verre convergent ou d'un miroir concave, produire une image fort nette et fort distincte. Celui qui verrait cette image et la prendrait pour un corps matériel, commettrait une erreur qu'il comprendrait immédiatement s'il y portait la main, car elle n'offrirait aucune résistance.

On a matérialisé les phénomènes physiques, tels que le calorique, la lumière, l'électricité. Aujourd'hui, l'expérience a prononcé, et cette opinion a dû être abandonnée.

Il faut donc que l'esprit soit constamment en garde contre les jugements trop précipités, et il importe qu'une vérification, par une nouvelle méthode, vienne corroborer l'observation ou la modifier. C'est alors que les faits ne peuvent plus laisser de doute sur la réalité de leur existence et qu'ils peuvent être définitivement adoptés.

Découvrir des faits nouveaux et les observer, ce n'est qu'un premier pas dans la carrière expérimentale : il faut soumettre les observations à des mesures rigoureuses à l'aide d'instruments de la plus grande précision.

La mesure exacte des faits, soit par la balance, soit de toute autre manière, conduit à des résultats beaucoup plus utiles et beaucoup plus précieux que la simple observation : elle permet de les soumettre au calcul et de trouver les lois qui les régissent. C'est par de telles mesures que l'on a des notions assez exactes sur le système du monde; c'est par elle que l'on a découvert les proportions définies de la chimie et toutes les lois qui régissent cette science, ainsi que la physique moderne.

L'expérimentation, par les applications qui en sont découlées, a établi une ligne de démarcation nettement tranchée entre les peuples anciens et les peuples actuels.

Qui aurait pu soupçonner, il n'y a même qu'un très petit nombre d'années, qu'un homme, sans se fatiguer, franchirait l'espace plus rapidement que le plus habile coursier, et qu'il transmettrait sa pensée à des distances immenses avec une vitesse telle que l'on a peine à le comprendre?

L'expérimentation s'applique à la mécanique des solides, des fluides, à la physique, à la biologie ou à la science de la vie, et c'est elle qui nous a donné la chimie.

Par la *synthèse,* l'expérimentation a imité une foule de produits naturels et en a fait un plus grand nombre encore qui n'existent point tout formés dans la nature, et qui, par conséquent, n'auraient jamais été connus sans elle, et dont l'homme aurait dû nécessairement être privé.

Par l'*analyse,* méthode nouvelle, profonde, d'un ordre tout

spécial, elle a isolé les éléments chimiques, elle nous a permis de comparer la composition des êtres vivants avec celle des êtres ambiants et d'en connaître l'origine. Nous savons effectivement aujourd'hui que la matière organique ou combustible des êtres vivants est entièrement tirée de l'eau et de l'atmosphère. C'est de ces milieux que sont primitivement venus l'hydrogène, l'oxygène, l'azote et le carbone, qui sont entrés et entrent encore dans leur composition.

Pour certaines parties de la chimie, il y a une méthode simple et naturelle qui est suivie par les expérimentateurs, sans qu'ils en aient fait une étude spéciale; méthode qui leur est transmise, soit dans les laboratoires, soit parce qu'elle découle de la lecture des travaux des savants qui ont écrit sur cette science.

Ce qui domine dans l'étude d'un corps, c'est d'en connaître la nature, s'il est simple, ou la composition, s'il est formé de plusieurs éléments combinés ensemble; d'en étudier les propriétés physiques et les propriétés chimiques.

La chimie comprend deux parties essentiellement distinctes : une qui consiste à observer les corps dans l'*état statique* et en eux-mêmes; l'autre qui les étudie dans l'*état dynamique* ou lorsqu'ils agissent mutuellement les uns sur les autres.

La première partie appartient plus spécialement au domaine des sciences naturelles, et surtout à la physique. Elle consiste dans l'examen des propriétés physiques des corps; elle en étudie l'état, la forme, la structure, la densité, la manière dont ils se comportent avec la chaleur et la lumière, en tant qu'elles n'entraînent point de réactions chimiques ou qu'elles ne les altèrent point d'une manière permanente.

A l'action de la chaleur se rattachent les *points de fusion et d'ébullition*, les *chaleurs spécifiques*, les *chaleurs latentes*, les *modifications polymorphiques*. A la lumière, considérée au point de vue optique, se relient la couleur, la transparence ou l'opacité, l'examen en présence de la lumière polarisée, etc.

Puis viennent ensuite les réactions produites sous l'influence de la chaleur, de la lumière et de l'électricité, et celles enfin qui sont dues à l'influence réciproque des corps qui donnent lieu à des unions de différents ordres et à la substitution simple ou double.

Les produits organiques ont donné des résultats éminemment

remarquables. Aux éléments qui entrent dans leur composition, les chimistes ont pu substituer presque tous ceux que nous connaissons : les chloroïdes, les téphralides se substituent à l'hydrogène; le soufre, le silicium, le tellure prennent ou peuvent prendre la place de l'oxygène. Il en sera de même de tous les calcoïdes. L'azote peut être remplacé par les autres azotoïdes, tels que le phosphore, l'arsenic, l'antimoine et le bismuth; les platinoïdes, les silicides peuvent être substitués au carbone; des corps d'une classe peuvent remplacer ceux d'une autre classe dans des conditions toutes spéciales, qui font qu'un seul équivalent peut remplacer deux ou trois, ou quatre équivalents d'une autre classe. Des corps composés peuvent même être substitués à des éléments chimiques, tels sont le cyanogène, l'amidogène, l'ammonium, le bi-oxyde d'azote, l'acide hypazotique et tous les radicaux organiques dont le nom est terminé en HYLE.

On voit par ce simple énoncé que la vie d'un homme ne suffirait pas pour faire l'histoire complète d'une substance.

Lorsqu'un nouveau produit est obtenu, ce qui importe le plus est de déterminer la classe et l'ordre dans lesquels il vient se ranger. Aussitôt que ce résultat est réalisé, l'analogie indique tout ce qui est à faire pour compléter son histoire.

C'est par des analogies de cet ordre que l'iode, le brôme et même le cyanogène sont venus se ranger auprès du chlore; que l'esprit de bois et l'esprit dit *de pommes de terre* ont été réunis à l'alcool, et que, par une suite d'analogies non interrompues, des carbures d'hydrogène liquides ou solides ont été rattachés à l'hydrogène bi-carboné gazeux; que l'acide stéarique ou l'acide margarique, corps solides et inodores, prennent rang à la suite de l'acide acétique.

Mais la chimie ne se borne point à ces réactions fondamentales. Il y en a d'autres non moins évidentes, non moins certaines, qui peuvent ne point présenter d'analogies connues, et qui, tout en exigeant une méthode plus laborieuse, méthode qui consiste à mettre un produit nouveau en présence de tous les autres corps dans des circonstances variées, ne donnent pas moins des résultats certains.

Mais, il faut le répéter, la base, le point de départ de toutes les réactions, est la détermination de la nature des corps ou leur

analyse qualitative et quantitative, qui, seules, permettent d'apprécier et de juger sainement ce qui se passe dans les réactions.

L'analyse chimique est donc une méthode nouvelle, profonde, inespérée, que l'on ne saurait trop apprécier, qui a donné et qui donnera toujours des résultats du premier ordre.

Quoiqu'il existe une foule de sectes philosophiques, il n'y a cependant, et il ne peut y avoir, qu'une seule philosophie : celle de la raison humaine. Il en serait certainement ainsi si cette raison était libre et suffisamment éclairée; mais il en est autrement. L'expérience ayant donné des résultats aussi considérables que ceux dont vous avez été témoins, on a créé la philosophie expérimentale pour la distinguer d'une foule de philosophies qui n'ont aucune raison d'être.

L'expérience et les faits qu'elle a découverts n'ont certainement rien changé à la raison humaine; mais il faut reconnaître qu'ils l'ont largement enrichie. Cette raison ne peut s'exercer que sur des faits; et des faits nouveaux, nombreux, quelquefois d'une nature spéciale et d'une haute importance, ont accru le nombre des éléments qui lui sont soumis; ils ont dû modifier ses méthodes, et c'est ce qui est arrivé, ainsi que vous pouvez le penser d'après ce que j'ai dit de la philosophie scholastique.

La philosophie expérimentale consiste donc essentiellement, dans l'application de l'intelligence humaine, aux faits nombreux découverts par l'expérience; elle comprend essentiellement, indépendamment de ce qui a été précédemment attribué à la méthode expérimentale :

I. La coordination des faits;
II. Leur généralisation;
III. La recherche des lois qui président à leur accomplissement;
IV. La création des théories.

La coordination des faits ou leur rapprochement et leur classification permet de les envisager d'un point de vue plus élevé, et de simplifier leur étude.

Cette première opération intellectuelle est d'une nécessité

absolue pour porter la lumière là où il n'y aurait que désordre, confusion et ténèbres.

La généralisation des faits est la conséquence de leur coordination; elle permet de les résumer et d'en avoir tout à la fois une idée simple et précise.

Il y a plusieurs espèces de *lois :* les unes ne sont que l'expression générale des faits; les autres en précisent les relations.

Les deux premières lois de Képler nous donnent un exemple de ces deux cas.

La première de ces lois dit que *les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.* Ce n'est là que l'énonciation d'un fait général.

La deuxième loi peut être énoncée ainsi : *les rayons vecteurs des planètes décrivent pour chacune d'elles des aires égales dans des temps égaux.* Il y a ici une relation entre le temps et l'aire décrite par le rayon vecteur de chaque planète.

Lorsque l'on exprime cette loi générale de la chimie : *les corps se combinent dans des proportions définies,* on n'émet que l'expression d'un fait général prouvé par l'expérience; mais lorsque l'on dit que *les chaleurs spécifiques des éléments chimiques ou d'une série quelconque de composés de la même classe sont en raison inverse de leurs équivalents, on exprime une relation du deuxième ordre.*

Ce sont ces dernières relations qui sont les véritables lois des sciences naturelles dans la plus grande acception du mot.

Les *théories* doivent, autant que possible, être exemptes d'hypothèses et ne représenter que la relation simple et naturelle des faits. Cependant, on peut dépasser les limites de la réalité, comme on l'a fait pour les créations purement intellectuelles des atomes et du fluide éthéré, qui ont rendu d'immenses services, il faut le reconnaître; mais il ne faut cependant jamais oublier leur origine, et se tenir en garde contre les tendances que l'on a pour les considérer, comme étant appuyées sur des êtres ou des faits dont l'évidence ne peut être mise en doute. Il en est surtout de même pour les phénomènes que l'esprit n'a que trop souvent été porté à matérialiser, ainsi que je vais avoir l'occasion de vous l'exposer en parlant de l'abstraction.

Les faits découverts par l'expérimentation sont la base de nos

raisonnements, comme les définitions et les axiomes de la géométrie, et l'on peut par conséquent leur appliquer les différentes opérations de l'intelligence. C'est à ce point de vue que l'*analyse*, la *synthèse* et l'*abstraction* méritent, non seulement d'être prises en considération, mais d'être l'objet des plus profondes méditations.

L'*abstraction* surtout exige toute notre attention.

L'expérience donne naissance à des êtres et à leurs actes. Ces actes sont caractérisés par du mouvement, et nous apparaissent souvent comme des phénomènes d'ordres tout à fait spéciaux. Il est souvent arrivé qu'on les a confondus avec des êtres proprement dits. La chaleur, la lumière, l'électricité, le magnétisme, qui ne sont rien autre chose que la matière agissante, ont été considérés comme des fluides ayant une existence matérielle. Newton lui-même, ce puissant génie, considérait la lumière comme formée de corpuscules se mouvant avec une extrême rapidité, et dont la grosseur variait selon la couleur.

Une expérience récente peut servir pour démontrer, ainsi que je l'ai toujours admis, que l'électricité n'est point un fluide, car elle ne saurait franchir le moindre espace dans le vide. Elle ne le ferait qu'autant qu'elle arracherait les particules des corps, et qu'elle serait transmise avec elles. C'est ce dernier cas qui se présente dans la production de la lumière électrique dans le vide.

L'électricité n'est donc point un fluide spécial, ni l'éther en mouvement, ainsi que M. Saigey l'a admis récemment, mais un mouvement spécial qui est transmis par certains corps.

La méthode expérimentale mérite toute notre confiance. Elle est sûre et certaine; mais l'explication que nous donnons aux faits qu'elle nous a révélés peut être erronée et factice. Il faut donc être toujours en garde contre la propension que nous avons à trop généraliser ou à dépasser les limites de ce qu'elle nous a révélé.

Il est une erreur de jugement qui a été plusieurs fois commise, et qu'il faut éviter avec le plus grand soin.

De ce qu'une chose n'a pu être faite, on en a conclu qu'elle était impossible, tandis que la seule conclusion rationnelle eût été d'affirmer qu'on n'avait pu la réaliser dans les conditions où l'on a expérimenté; car effectivement rien n'a démontré que le résultat cherché n'aurait pu être obtenu dans de nouvelles conditions. Je vous en citerai un exemple remarquable :

De ce que l'expérience s'est arrêtée aux éléments chimiques de l'époque actuelle, on en a conclu qu'ils étaient indécomposables, que chacun d'eux était d'une nature spéciale, et qu'ils étaient des *corps simples;* par exemple, que le soufre et le fer sont du soufre et du fer, et que jamais l'on ne pourra tirer d'eux que du soufre et du fer.

Nous ne pouvons ni ne devons ainsi préjuger de l'avenir des sciences.

Déjà les observations des nébuleuses au moyen de la spectroscopie ont porté M. Huggins, savant astronome anglais, à considérer l'azote comme un corps composé, et, d'une autre part, le soufre, le fer et bien d'autres éléments chimiques, se présentent à nous sous des aspects si variés, qu'il serait doublement déraisonnable d'affirmer qu'ils ne contiennent que du soufre et du fer; car on pourrait demander dès à présent : Mais quel soufre et quel fer? En effet, n'y a-t-il pas le ferrosum et le ferricum, et, d'une autre part, le soufre et la plupart des corps ne sont-ils pas polymorphes?

Jamais je n'ai commis cette erreur, et c'est pour cela que j'ai adopté de préférence le nom d'*éléments chimiques* plutôt que celui de *corps simples;* car les éléments peuvent être composés comme les matériaux qui entrent dans la construction d'un édifice, et n'ont rien d'arrêté comme l'idée de corps simple.

Ce qui vient d'être dit des corps simples s'applique immédiatement à la transmutation des métaux réputés *vils* par les alchimistes, tels que le plomb, le mercure et le fer, en argent ou en or purs. *Rien ne prouve que ce résultat ne puisse être obtenu.* Si les alchimistes n'avaient point fait un secret de la transmutation métallique, et si l'on en avait fait une opération vulgaire, tout le monde y croirait, et l'on ne saurait pas davantage ni pourquoi ni comment l'opération s'effectue.

En général, l'esprit humain repousse ce qu'il n'a jamais vu, et accepte sans examen ce qui se rapporte à des faits connus dont il n'a nullement l'explication.

Ces sortes de démonstrations pourraient porter le nom de *négatives;* elles ne prouvent point qu'une chose est impossible, mais seulement que l'on n'a pu l'obtenir ou la réaliser.

Aujourd'hui, la plupart des physiciens, et pour des motifs qu'il

m'est impossible d'exposer ici, admettent que ces phénomènes physiques sont dus au mouvement des parties les plus intimes de la matière, et non à des fluides qui s'échapperaient des corps. C'est ainsi qu'une suite non interrompue d'expériences est venue corriger les premières erreurs de notre jugement.

Je m'arrête ici, Messieurs; l'expérimentation est un sujet vaste, immense, inépuisable, dont nous sommes loin de connaître tous les produits et tous les résultats. Vous avez été témoins d'une partie des faits considérables qu'elle a fait découvrir en moins de deux siècles, et, loin de croire qu'elle a à peu près dit son dernier mot, nous devons espérer qu'elle ouvrira à nos successeurs de nouveaux horizons à contempler, de nouveaux champs à explorer, et que l'esprit de l'homme ira en grandissant, à mesure qu'il s'enrichira de toutes les merveilles que ce mode d'exploration de la nature lui promet.

En terminant, et pour me résumer, je vous rappellerai en quelques mots que la philosophie expérimentale repose sur l'application de toutes les ressources de l'intelligence humaine aux faits découverts ou à découvrir par l'expérimentation. Considérée au point de vue tout spécial qui la caractérise, elle se trouve exposée dans le tableau suivant :

I. Recherche et confirmation des faits nouveaux;
II. Leur mesure exacte et précise;
III. Leur coordination;
IV. Leur généralisation;
V. Recherche des lois qui président à leur accomplissement;
VI. Création de théories qui les relient entre eux;
VII. Leur application à tous les besoins matériels ou à toutes les satisfactions morales que l'homme peut se procurer par leur intervention.

DES

POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS

dits SOLIDES D'ARCHIMÈDE

PAR M. VALAT.

Ire PARTIE.

Considérations générales et formules.

Les cinq corps réguliers, dont plusieurs géomètres attribuent l'invention à Platon, mais dont la connaissance est certainement bien antérieure, ne sont pas les seules formes remarquables qui ont attiré l'attention des géomètres. Képler, dans son Traité des Harmonies du Monde (*Quinque libri Harmonices Mundi,* édit. de Lintz, 1619), donne la figure de treize corps qu'il nomme *Solides d'Archimède.* Bien que nous n'ayons pas trouvé dans les œuvres du grand géomètre de Syracuse le passage qui autorise une pareille assertion, nous ne mettons pas en doute son exactitude. Quoi qu'il en soit, cette précieuse étude est intéressante et ferait désirer qu'elle fût complétée; il énonce la connaissance des treize solides, paraissant due au hasard. Il y avait à combler une lacune, celle qui répondait à la recherche rationnelle de ces corps. Il leur donne le nom de *semi-réguliers*, parce que bien qu'ils soient formés de polygones plans réguliers, ils renferment des faces de périmètre différent, comme des triangles équilatéraux, des carrés, en combinaisons binaire ou ternaire.

Nombre de géomètres, après Képler, ont repris le sujet. On lit encore avec intérêt les recherches qui ont paru dans divers Traités de perspective et d'architecture; nous citerons entre autres le noble vénitien Daniel Barbaro, Albert Dürer, le P. Niceron, Ozanam; des noms plus connus dans les annales des sciences se présentent

encore : Desargues, Lahire, Deparcieux, Parent, Simon Stevin, François de Candalle, Montucla, etc., etc.

Aucun d'eux n'a pourtant dépassé Képler ni essayé de former une théorie générale. Nous n'excepterons pas un curieux Mémoire de Lidonne, publié en 1808, à la suite de sa Table des Nombres premiers; on y trouve des calculs d'inclinaisons et des constructions plus détaillées; mais rien encore qui ressemble à une théorie générale embrassant tout le sujet et portant avec elle la démonstration qu'il n'y a rien au delà. Lidonne d'ailleurs lui-même le sentait si bien, qu'il prend l'engagement de refondre et d'achever un travail qu'il regrette d'avoir seulement esquissé; et cet engagement, il ne l'a pas rempli, soit qu'il ait été entraîné à d'autres recherches, soit que le temps lui ait manqué. Ce qui manquait surtout, c'était une analyse pareille à celle dont Lagrange et Laplace se sont servis pour établir les conditions d'existence des cinq corps réguliers, et que, plus tard, Poinsot et Cauchy ont heureusement appliquée aux polyèdres réguliers étoilés.

C'est cette lacune que j'ai essayé de combler dans un Mémoire qui fut présenté à l'Institut, le 17 juillet 1854, et mentionné dans les Comptes rendus; il devait être l'objet d'un Rapport au nom d'une Commission composée de MM. Poncelet, Babinet et Poinsot. Ce dernier avait bien voulu se charger d'en rendre compte, et plusieurs fois il m'avait entretenu d'un sujet qui avait quelque analogie avec celui de son beau Mémoire, lorsque, d'ajournement en ajournement, il atteignit le terme de sa carrière. Je dus retirer le manuscrit, et c'est seulement en 1866 que j'en présentai un extrait aux réunions de la Sorbonne : il eût été sans doute publié (du moins avait-on demandé mon avis à cet égard), lorsque le grand nombre de tableaux et surtout les difficultés d'exécution de plusieurs planches de figures fort compliquées ont fait renoncer à l'impression du Mémoire, bien moins complet cependant que le premier.

Récemment, j'ai repris quelques conséquences de mon premier travail pour en faire l'objet d'une communication à l'Académie de Bordeaux. Elle a été publiée dans ses *Actes*, 1867 (2ᵉ trimestre). Ayant eu l'intention d'en tirer quelques exemplaires, je fis hommage de l'un d'eux à la Société des Sciences physiques et naturelles, et il allait prendre place dans les Archives lorsque l'un de mes honorables collègues, à qui rien n'échappe, m'a demandé une

explication qui rendait nécessaire la connaissance de mon ancien Mémoire, ou tout au moins de certaines formules mentionnées dans ma récente publication. Flatté de l'attention dont ces formules étaient l'objet, j'ai cru devoir demander la permission d'en faire un rapide exposé. Ce travail, quoique composé à une époque déjà un peu ancienne, pourra paraître neuf : je désire qu'il ne paraisse pas tout à fait indigne d'occuper l'attention des géomètres.

Le problème dont il est question consiste à former un corps terminé par des figures régulières et assemblées sous des angles polyèdres égaux ; que ces faces, d'ailleurs planes, soient de deux, de trois ou plus encore espèces différentes ; ce que je désignerai par *solides semi-réguliers à combinaisons binaires, ternaires, etc.*

Or, il est aisé de voir, avant toute considération, que les angles solides peuvent être tout au plus formés de trois sortes de figures ; car, en prenant les plus simples, le triangle, le carré, le pentagone et l'hexagone dont les angles sont respectivement de 60°, 90°, 108°, 120°, on aurait, pour la somme de ces angles, une valeur de 378°, supérieure à 360°, ce qui ne peut convenir à un polyèdre convexe.

Il faut donc commencer par des combinaisons ternaires et résoudre le problème proposé dans ce cas.

Soient 1° f, f', f'' le nombre des faces de chaque espèce ;

2° n, n', n'' le nombre de leurs côtés, avec la condition que l'on ait $n > 2$, $n' > 3$, $n'' > 4$; de sorte que les valeurs les plus simples soient $n = 3$, $n' = 4$, $n'' = 5$;

3° p, p', p'' le nombre des angles plans de chaque espèce fournis par les faces f, f', f''.

Nota. Nous poserons pour abréger $p + p' + p'' = q$, et nous remarquerons qu'on ne peut avoir que deux valeurs pour q, savoir : $q = 3$, $q = 4$; car si $q = 5$, en admettant $p = 3$, $p' = 1$, $p'' = 1$, et prenant le polygone le plus simple pour f, c'est à dire le triangle équilatéral, on aura pour les trois angles 180°, et les deux autres étant des angles de carré et de pentagone, par suite de 90° et 108°, il y aurait en tout $180° + 90° + 108° = 378°$ pour les cinq angles, ce qui n'est pas admissible.

Cela posé, en vertu du théorème d'Euler sur la relation qui existe entre le nombre des sommets S, celui des faces F et celui des

arêtes A, savoir : $S + F = A + 2$, nous obtiendrons la formule fondamentale

$$(1) \qquad \frac{fn + f'n' + f''n''}{f + f' + f'' - 2} = \frac{2q}{q-2},$$

et l'examen des angles plans qui constituent chaque angle solide, nous fournit les deux équations suivantes :

$$(2) \qquad \frac{fn}{p} = \frac{f'n'}{p'} \quad , \quad (3) \qquad \frac{f'n'}{p'} = \frac{f''n''}{p''}.$$

Il suffit d'un léger examen pour constater l'exactitude de ces trois équations de condition.

1° Les faces du polyèdre, mises à part, présentent évidemment $nf + n'f' + n''f''$ angles ou sommets ; mais comme elles se réunissent pour former le corps, et viennent s'assembler de manière à déterminer pour un seul sommet $p + p' + p''$ angles plans, il est évident que le nombre des sommets du polyèdre se trouve réduit à

$$\frac{nf + n'f' + n''f''}{p + p' + p''} = S.$$

2° On a sans contestation

$$f + f' + f'' = F.$$

3° Enfin, chaque arête répondant à deux faces, il s'ensuit que

$$\frac{nf + n'f' + n''f''}{2} = A.$$

Donc, en vertu de $S + F = A + 2$, on peut poser

$$\frac{nf + n'f' + n''f''}{p + p' + p''} + f + f' + f'' = \frac{nf + n'f' + n''f''}{2} + 2,$$

d'où, par transformation, on parvient à l'équation

$$(4) \qquad \frac{nf + n'f' + n''f''}{f + f' + f'' - 2} = \frac{2(p + p' + p'')}{p + p' + p'' - 2} = \frac{2q}{q-2}.$$

Cette forme, assez remarquable, nous la remplacerons par celle-ci, plus commode pour la discussion :

$$(5) \quad f(2q + 2n - qn) + f'(2q + 2n' - qn') + f''(2q + 2n'' - qn'') = 4q.$$

Quant aux équations (2) et (3), elles se justifient aisément en observant la formation de chaque angle polyèdre qui doit réunir le même nombre de faces f, f', f'' de chaque espèce; par suite, lorsque $p = p'$, il faut que $nf = n'f'$; mais si p vaut $2p'$, la face f étant double en présence de la face de l'ordre f', il faut, par compensation, qu'on ait nf double de $n'f'$. En général

$$\frac{nf}{p} = \frac{n'f'}{p'}, \text{ et de même } \frac{nf}{p} = \frac{n''f''}{p''}.$$

Avant d'entamer aucune discussion, remarquons de suite que s'il s'agit de combinaisons binaires, f'', n'', p'' disparaissent, et les conditions exprimées dans (2), (3), (5) deviennent plus simplement

$$\frac{nf}{p} = \frac{n'f'}{p'}, \quad f(2q + 2n - qn) + f'(2q + 2n' - qn') = 4q.$$

Enfin, rien n'empêche de descendre des combinaisons binaires aux corps réguliers connus, en supprimant p', n', f', d'où résulte la condition unique

$$f(2q + 2n - qn) = 4q = 4p.$$

C'est la formule de Laplace dont nous allons rappeler l'usage, pour indiquer par un exemple le parti que nous tirerons de nos formules dans les deux cas précédents de combinaisons binaires ou ternaires.

L'équation de condition $f(2q + 2n - qn) = 4p$, ou bien $f(2p + 2n - pn) = 4p$ donne

$$f = \frac{4p}{2p + 2n - pn} = \frac{4}{\frac{2n}{p} - (n-2)}.$$

Et si l'on pose

$$q = 3,\ q = 4,\ q = 5,$$

ou bien

$$p = 3,\ p = 4,\ p = 5,$$

(car on ne peut aller à $p = 6$, puisque le triangle équilatéral ayant un angle de 60°, on aurait, dans le cas de $p = 6$, 360° pour les angles plans autour d'un sommet),

$$1^o\ p = 3,\ f = \frac{4}{\frac{2n}{3} - (n-2)} = \frac{12}{6-n};$$

$n=3, f=4$, tétraèdre;
$n=4, f=6$, cube ou hex^{dre};
$n=5, f=12$, dodécaèdre.

$2°\ p=4$, $f=\dfrac{4}{\frac{2n}{4}-(n-2)}=\dfrac{8}{4-n}$; $n=3$, $f=8$, octaèdre.

$3°\ p=5$, $f=\dfrac{4}{\frac{2n}{5}-(n-2)}=\dfrac{20}{10-3n}$; $n=3$, $f=20$, icosaèdre.

Ainsi sont déduits analytiquement les cinq corps réguliers, et on voit qu'il n'y en a pas davantage. Ceci est connu sans doute ; mais il nous a paru bon de rappeler cette discussion, d'ailleurs si courte, pour montrer ce que nous nous proposons de faire dans les deux hypothèses des combinaisons ternaires ou binaires ; d'ailleurs, nous devions insister sur la méthode qui nous permettait de considérer cette formule connue avant nous comme une conséquence de celles que nous avons établies.

Passons actuellement aux combinaisons ternaires, par lesquelles nous avons dû commencer comme les plus générales.

1er Cas. *Combinaisons ternaires.*— Les équations (2) et (3) permettent d'éliminer f', f'' de l'équation (5), qui donne

$$(6)\qquad f=\frac{4pn'n''}{2(pn'n''+p'nn''+p''nn')-nn'n''(q-2)}.$$

D'ailleurs,

$$f'=\frac{np'}{pn'}f,\qquad f''=\frac{np''}{pn''}f.$$

Il suffit donc de considérer l'équation (6), en y faisant les hypothèses indiquées plus haut, $q=3$, $q=4$, ce qui nous oblige à poser les conditions suivantes :

$$\text{Pour } q=3,\quad p=1,\ p'=1,\ p''=1\ ;$$

$$\text{Pour } q=4,\begin{cases} p=2,\ p'=1,\ p''=1\ ;\\ p=1,\ p'=2,\ p''=1\ ;\\ p=1,\ p'=1,\ p''=2\ . \end{cases}$$

L'hypothèse $q=3$ réduit l'équation (6) à la forme

$$f=\frac{4n'n''}{2(n'n''+nn''+nn')-nn'n''}\ ;$$

les autres deviennent

$$f' = \frac{n}{n'} f, \qquad f'' = \frac{n}{n''} f.$$

La première donne pour $n = 4$, $n' = 6$, $n'' = 8$,

$$f = 12, \quad \text{d'où } f' = 8, \ f'' = 6,$$

solide de 26 *faces,* 12 carrés, 8 hexagones, 6 octogones.

Pour $n = 4$, $n' = 6$, $n'' = 10$, on a

$$f = 30, \text{ d'où } f' = 20, \ f'' = 12,$$

autre *solide de* 62 *faces,* 30 carrés, 20 hexagones et 12 décagones.

Cette hypothèse n'en fournit pas d'autre.

Admettant $q = 4$, nous n'avons qu'un solide ternaire pour les valeurs

$$p = 1, \quad p' = 2, \quad p'' = 1,$$

avec

$$n = 3, \quad n' = 4, \quad n'' = 5,$$

à l'aide de l'équation (6), qui devient

$$f = \frac{2n'n''}{n'n'' + 2nn'' + nn' - nn'n''},$$

avec

$$f' = \frac{2n}{n'} f, \qquad f'' = \frac{n}{n''} f;$$

on obtient

$$f = 20, \qquad f' = 30, \qquad f'' = 12,$$

3e *solide ternaire de* 62 *faces,* dont 20 triangles, 30 carrés, 12 pentagones.

2e Cas. *Combinaisons binaires.* — Passant aux combinaisons binaires, nous n'avons que deux équations de condition, savoir :

$$f = \frac{4pn'}{2(pn' + np') - nn'(q-2)}, \qquad f' = \frac{np'}{pn'} f.$$

En outre, nous avons à considérer les trois hypothèses

$$q = 3, \quad q = 4, \quad q = 5.$$

Et d'abord :

I. $q = 3$, avec $\begin{cases} p = 1,\ p' = 2, \text{ hypothèse qui conduit à 3 solides ;} \\ p = 2,\ p' = 2, \text{ qui ne donne rien ;} \end{cases}$

d'où, avec

1° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 6, \text{ d'où } f = 4,\ f' = 4 ; \\ \textit{solide de } 8 \textit{ faces} : 4 \text{ triangles, } 4 \text{ hexagones.} \end{cases}$

2° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 8, \text{ d'où } f = 8,\ f' = 6 ; \\ \textit{solide de } 14 \textit{ faces} : 8 \text{ triangles, } 6 \text{ octogones.} \end{cases}$

3° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 10, \text{ d'où } f = 20,\ f' = 12 ; \\ \textit{solide de } 32 \textit{ faces} : 20 \text{ triangles, } 12 \text{ décagones.} \end{cases}$

II. $q = 4$, avec $\begin{cases} p = 1,\ p' = 3, \text{ un solide ;} \\ p = 2,\ p' = 2, \text{ deux solides ;} \\ p = 3,\ p' = 1, \text{ pas de solide.} \end{cases}$

4° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 4, \text{ d'où } f = 8,\ f' = 18 ; \\ \textit{solide de } 26 \textit{ faces} : 8 \text{ triangles, } 18 \text{ carrés.} \end{cases}$

5° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 4, \text{ d'où } f = 8,\ f' = 6 ; \\ \textit{solide de } 14 \textit{ faces} : 8 \text{ triangles, } 6 \text{ carrés.} \end{cases}$

6° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 5, \text{ d'où } f = 20,\ f' = 12 ; \\ \textit{solide de } 32 \textit{ faces} : 20 \text{ triangles, } 12 \text{ pentagones.} \end{cases}$

III. $q = 5$, avec $\begin{cases} p = 1,\ p' = 4, \text{ pas de solide ;} \\ p = 2,\ p' = 3, \quad \text{id.} \\ p = 3,\ p' = 2, \quad \text{id.} \\ p = 4,\ p' = 1, \text{ deux solides.} \end{cases}$

7° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 5, \text{ d'où } f = 80,\ f' = 12 ; \\ \textit{solide de } 92 \textit{ faces} : 80 \text{ triangles, } 12 \text{ pentagones.} \end{cases}$

8° $\begin{cases} n = 3,\ n' = 4, \text{ d'où } f = 32,\ f' = 6 ; \\ \textit{solide de } 38 \textit{ faces} : 32 \text{ triangles, } 6 \text{ carrés.} \end{cases}$

Ces huit solides sont construits avec des triangles.

En admettant

$$n = 4, \text{ avec } p = 1,\ p' = 2,\ (q = 3),$$

on obtient

9° $\begin{cases} n' = 6, \text{ d'où } f = 6,\ f' = 8 ; \\ \textit{solide de } 14 \textit{ faces} : 6 \text{ carrés, } 8 \text{ hexagones.} \end{cases}$

Avec des pentagones

$$n = 5, \text{ et } p = 1,\ p' = 2,\ (q = 3),$$

on

$$10^{o}\begin{cases} n'=6, \text{ d'où } f=12,\ f'=20; \\ \textit{solide de } 32 \textit{ faces} : 12 \text{ pentagones, } 20 \text{ hexagones.}\end{cases}$$

Toute autre hypothèse est inadmissible.

Nota. Cependant avec

$q=3$, 1^{o} { L'hypothèse $p=1, p'=2$, avec $n=3, n'=4$, donne $f=2,\ f'=3$, *prisme triangulaire semi-régulier.*

$q=4$, 2^{o} { L'hypothèse $p=3$, $p'=1$, avec $n=3$, donne $f=2n'$, $f=2$, sorte de *prismes gauches* à deux bases polygonales de n' côtés, et deux fois autant de triangles latéraux réguliers entre ces bases.
Si l'on prend $n'=3$, on obtient l'*octaèdre régulier*, qui vient se ranger parmi les polyèdres semi-réguliers de cette série.

$q=3$, 2^{o} { L'hypothèse $p=2, p'=1$, $(q=3)$, $n=4$, donne $f=n'$, $f'=2$, sorte de *prisme semi-régulier*, qui se confond avec tout prisme droit à base quelconque polygonale régulière, et latéralement compris entre des carrés en nombre égal à celui des côtés de la base.
Si l'on prend $n'=4$, on obtient le *cube* ou l'*hexaèdre régulier*.

Ainsi, les recherches géométriques de Képler, celles de Lidonne et autres ont laissé trois lacunes : 1° celle du prisme triangulaire ; 2° celle de la série nulle part mentionnée ; 3° enfin celle des prismes droits.

L'exposition rapide que nous avons cru devoir présenter a l'avantage de faire connaître l'ensemble des études qu'exige le sujet, et nous avons adopté ce plan, qui semble peu conforme à la méthode lumineuse des géomètres, afin de nous mettre en mesure de procéder avec plus d'ordre dans les détails qui suivent, et dont il nous sera permis de ne pas nous occuper avec l'étendue qu'on

aurait droit d'exiger, si nous n'avions indiqué comment il est aisé de les retrouver à l'aide de nos formules.

Une dernière réflexion mérite d'être mentionnée avant d'aborder une étude plus complète des propriétés de ces corps; il est bien évident qu'une patiente et laborieuse revue des diverses combinaisons géométriques qu'on peut imaginer avec les polygones réguliers les plus simples, du triangle équilatéral au décagone régulier, nous conduisait aux résultats fournis par les formules données plus haut, et c'est ce qui a été tenté avec plus ou moins de succès par Képler, Lidonne et bien d'autres. Toutefois, il est certain que cette voie, d'ailleurs pénible, ne satisfait point la logique; on aime à procéder sciemment dans une nouvelle recherche, de manière à se convaincre : 1° qu'on a bien trouvé tous les corps qui rentrent dans la catégorie des formes annoncées; 2° qu'on est en droit de conclure qu'il n'en existe pas au delà de ceux qui ont été formés.

Il nous reste maintenant à les étudier isolément pour en découvrir les propriétés et surtout la formation. On verra qu'ils peuvent être déduits des cinq corps réguliers connus par des sections, tantôt sur les angles, tantôt sur les faces, ce qui permet d'en rattacher la théorie à celle des précédents, et fait espérer que la cristallographie tirera quelque parti de cette théorie; toutefois, c'est une recherche indépendante, à quelques égards, de celle que nous avons entreprise.

IIe PARTIE.

ARTICLE 1er.

Groupes binaires ou polyèdres à deux sortes de faces.

Reprenons les formules

$$f = \frac{4pn'}{2(pn' + np') - nn'(q-2)},$$

et

$$f' = \frac{np'}{pn'}, \quad f = \frac{4np'}{2(np' + pn') - nn'(q-2)}.$$

Nous poserons les trois hypothèses $q = 3$, $q = 4$, $q = 5$, en

rappelant la nécessité de remplir la double condition que, dans l'angle triple, deux des angles plans aient une valeur supérieure au troisième, et que la somme des trois angles ou en général la somme des angles plans, soit moindre que quatre angles droits.

L'hypothèse de $q = 3$ nous a conduit à l'existence de trois solides :

Le 1er de 8 faces, à 4 triangles et 4 hexagones; (1)
Le 2e de 14 faces, à 8 triangles et 6 octagones; (2)
Le 3e de 32 faces, à 20 triangles et 12 décagones. (3)

On les déduit des conditions que doivent remplir p, p', n et n'. En posant $p + p' = 3$, on peut avoir $p = 1, p' = 2$, ou $p = 2$, $p' = 1$.

La première disposition donne

$$f' = \frac{8n}{2n' + 4n - nn'}, \quad f = \frac{n'}{2n} f'.$$

1° Groupe binaire formé avec des triangles.

Admettant seulement les combinaisons dans lesquelles entre le triangle, nous poserons

$$n = 3, \quad \text{d'où } f' = \frac{24}{12 - n'}, \; f = \frac{n'}{6} f',$$

et l'on essaiera

$$n' = 4, \; n' = 5, \; n' = 6, \text{ jusqu'à } n' = 11.$$

Examinons ces divers cas :

$n = 3, n' = 4$, d'où $f' = \frac{24}{8} = 3$, $f = 2$, prisme triangulaire droit à 5 faces;

....., $n' = 5$, d'où $f' = \frac{24}{7}$, donc pas de polyèdre;

....., $n' = 6$, d'où $f' = 4$, $f = 4$, solide d'Archim. annoncé; (1)

....., $n' = 7$, d'où $f' = \frac{24}{5}$, rien;

....., $n' = 8$, d'où $f' = 6$, $f = 8$, autre solide d'Archimède; (2)

....., $n' = 9$, d'où $f' = 8$, $f = 12$, qui semble réalisable;

mais en plaçant sur les angles d'un polygone de neuf côtés les faces qui complètent le trièdre, on sera forcé de placer deux triangles de

suite, ce qui changera la nature du polyèdre et le rendra complètement irrégulier.

$n=3$, $n'=10$, d'où $f'=12$, $f=20$, autre solide d'Archim.; (3).

....., $n'=11$, d'où $f'=24$, $f=44$, également inadmissible à cause du nombre impair des côtés du deuxième polygone, qui nous forcerait à placer deux triangles équilatéraux de suite, au lieu de la disposition adoptée.

En prenant $p=2$, $p'=1$, nous devrons employer les formules

$$f'=\frac{4n}{4n'+2n-nn'},\quad f=\frac{2n'}{n}f',\text{ avec } n=3,$$

d'où

$$f'=\frac{12}{n'+6},\quad f=\frac{2n'}{3}f'.$$

Aucune hypothèse n'est admissible pour n', à moins de prendre $n'=6$, d'où $f'=1$ et $f=4$, supposition qui présente un hexagone en présence de deux triangles équilatéraux; l'angle de l'hexagone étant de 120° serait égal à la somme des deux angles des triangles équilatéraux constituant l'angle trièdre.

Soit $q=4$, d'où les trois cas:

$$\begin{cases} p=1, \\ p'=3, \end{cases}\qquad \begin{cases} p=2, \\ p'=2, \end{cases}\qquad \begin{cases} p=3, \\ p'=1. \end{cases}$$

Admettons $p=1$, $p'=3$, d'où $f'=\frac{18}{9-2n'}$ $f=\frac{n'}{9}f'$, lorsque $n=3$.

On peut faire

$n=3$, $n'=4$, d'où $f'=18$ et $f=8$, autre solide d'Archimède. (4)

Admettant $p=2$, $p'=2$, avec $n=3$, d'où

$$f'=\frac{12}{6-n'},\quad f=\frac{n'}{3}f',$$

nous pourrons faire

$n=3$, $n'=4$, d'où $f'=6$, $f=8$, autre solide d'Archim. (5)
....., $n'=5$, d'où $f'=12$, $f=20$, id. (6)

Enfin, posant $p=3$, $p'=1$ avec $n=3$, on obtient $f'=2$, $f=2n'$. C'est une série de corps à $2n'+2$ faces, sorte de prismes *gauches* ayant deux bases polygonales égales, parallèles et régu-

lières, avec des triangles latéraux dont le nombre égale le double de celui des côtés de ces mêmes polygones.

Ainsi, nous obtenons trois solides d'Archimède, comme dans la première hypothèse. Celle-ci nous a montré le prisme triangulaire droit, à côtés égaux; nous devons, à la seconde supposition, une série singulière qui s'étend à l'infini et que nous pouvons commencer au polyèdre régulier de huit faces, l'octaèdre, quand on posera $n' = 3$, en même temps que $n = 3$.

Si $q = 5$, nous avons à examiner les quatre cas suivants :

$$1^\circ \begin{cases} p = 1, \\ p' = 4, \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} p = 2, \\ p' = 3, \end{cases} \quad 3^\circ \begin{cases} p = 3, \\ p' = 2, \end{cases} \quad 4^\circ \begin{cases} p = 4, \\ p' = 1. \end{cases}$$

1° Nous aurons $f' = \frac{48}{24 - 7n'}$, $f = \frac{n'}{12} f'$; pour $n = 3$, et $n' < 4$, pas de polyèdre.

2° Avec $n = 3$, $f' = \frac{36}{18 - 5n'}$, même impossibilité.

3° ..... $f' = \frac{24}{12 - 3n'} = \frac{8}{4 - n'}$, id.

4° ..... $f' = \frac{12}{6 - n'}$, $f = \frac{4n'}{n} f'$, posant $n' = 4$,

$f' = 6$, $f = 32$, solide d'Archimède. (7)

En posant avec $n = 3$, $n' = 5$, on aura

$f' = 12$, $f = 80$, autre solide d'Archimède. (8)

Le polyèdre régulier de 20 triangles peut se déduire de cette dernière hypothèse en faisant $n' = 3$, en même temps que $n = 3$; car les formules deviennent :

$$f' = \frac{12}{5 - 3} = 4 \text{ et } f = \frac{12}{3} \cdot 4 = 16, \quad \text{total } 20.$$

Ainsi, le premier groupe de combinaisons binaires, formé avec le triangle, comprend *huit corps* indépendamment des formes particulières que nous avons signalées.

2° Groupe binaire formé avec des carrés.

Posons $n = 4$, les deux formules sont alors

$$f' = \frac{8p'}{4p' + pn' - 2n'(q - 2)}, \quad f = \frac{pn'}{4p'} f'.$$

Des trois hypothèses sur la valeur $q = 3, q = 4, q = 5$, une seule est admissible; car, en prenant $q = 4$, il faudrait au moins trois faces carrées et une face pentagonale; de sorte que la somme des angles plans de chaque angle quadruple vaudrait $270^\circ + 108^\circ = 378^\circ$, ce qui ne saurait exister.

Posons donc $q = 3$, d'où

$$1^\circ\ p = 1,\ p' = 2, \text{ et}$$
$$2^\circ\ p = 2,\ p' = 1.$$

Il en résulte, en premier lieu,

$$f' = \frac{16}{8 - n'},\ f = \frac{n'}{8} f' :$$

donc on a $n' < 8$, et par suite, il n'y a que les suppositions $n' = 5, n' = 6, n' = 7$.

$n' = 5$ donne $f' = \frac{16}{3}$, impossibilité manifeste.

$n' = 6$ ..... $f' = \frac{16}{2} = 8$, $f = 6$, solide d'Archimède. (9)

$n' = 7$ ..... $f' = 16$, $f = 14$, impossible par le nombre impair des côtés du polygone combiné avec le carré.

En second lieu, $f' = 2, f = n'$, série particulière des corps formés par un nombre indéterminé de carrés latéraux appuyés sur deux polygones réguliers égaux d'un nombre quelconque de côtés; ce sont, à proprement parler, des prismes droits, parmi lesquels se trouve le cube ou l'hexaèdre régulier pour $n' = 4$.

3° Groupe binaire formé avec des pentagones.

Ici $n = 5$, et de plus les hypothèses $q = 4$, $q = 5$ étant écartées, il restera la supposition $q = 3$ (angles triples).

Avec $n = 5$, on a

$$f' = \frac{20 p'}{10 p' + 2 p n' - 5 n'},\quad f = \frac{p n'}{5 p'} f',$$

et nous aurons soit $p = 1, p' = 2$, soit $p = 2, p' = 1$.

Dans le premier cas, nous avons

$$f' = \frac{40}{20 - 3 n'},\quad f = \frac{n'}{10} f'.$$

On peut prendre $n' = 5$, d'où

$$f' = 8, f = \frac{5.8}{10} = 4, \text{ dodécaèdre régulier.}$$

Mais avec $n' = 6$, nous trouvons

$$f' = 20, f = 12, \text{ dernier solide d'Archimède,} \qquad (10)$$

composé de 12 pentagones et de 20 hexagones.

L'hypothèse $p = 2, p' = 1$ n'est pas admissible, parce que l'angle triple aurait en un sommet trois angles de pentagones au lieu de deux.

On n'a pas à s'occuper de combinaisons nouvelles en partant de $n = 6$, parce que déjà trois angles de ce genre de faces valent 360°; *a fortiori* l'impossibilité apparaît en assemblant avec le polygone de six côtés, des polygones d'un nombre de côtés plus grand. Telle est la première série de nos groupes binaires, présentant, avec les dix corps anciennement connus, deux séries dont une est nouvelle, indépendamment du prisme triangulaire droit.

ARTICLE 2.

Groupes ternaires, ou polyèdres à trois sortes de faces.

Les groupes ternaires les plus simples seront formés des polygones de 3, 4 et 5 côtés. Or, les angles de ces polygones étant de 60°, 90° et 108°, il est aisé de voir que l'hypothèse $q = 5$ ne peut être appliquée; car il y aurait alors, dans le cas le moins défavorable, $p = 3, p' = 1, p'' = 1$, ce qui conduirait à un angle quintuple formé de trois angles de triangle, un angle de carré et un angle de pentagone, valant $180° + 90° + 108° = 378°$, ce qui n'est pas admissible. Nous écarterons donc cette supposition et n'aurons alors à discuter que les deux cas $q = 3$, $q = 4$. Nous allons voir les restrictions que comportent les assemblages de polygones destinés à former des combinaisons ternaires.

Soit $q = 3$, d'où, comme seule hypothèse, résulte

$$p = 1, \quad p' = 1, \quad p'' = 1;$$

les formules générales deviennent

$$f' = \frac{4nn'}{2(nn' + nn'' + n'n'') - nn'n''}, \quad f = \frac{n''}{n'} f', \quad f = \frac{n'}{n} f'.$$

Partant du triangle, nous posons $n = 3$, d'où

$$f'' = \frac{12n'}{6n' + 6n'' - n'n''}.$$

Joignons-y le carré $n' = 4$, alors on a

$$f'' = \frac{24}{12 + n''},$$

qui ne donne aucune valeur raisonnable pour f''; le triangle et le carré ne peuvent donc entrer dans une combinaison ternaire.

Après avoir exclu le triangle et le carré dans ces combinaisons, nous ne prendrons pas le triangle et le pentagone qui ne formeront pas davantage un angle triple. Essayons du triangle, de l'hexagone et de l'octogone; nous n'obtiendrons rien encore, et nous devrons bannir le triangle des groupes ternaires, aussi bien que tout polygone d'un nombre impair de côtés.

Soit donc

$$n = 4,\ n' = 6,\ \text{d'où}\ f'' = \frac{24}{12 - n''}.$$

Si $n'' = 8$, on obtient

$$f' = 6,\quad f' = 8,\quad f = 12,\ \text{nouveau solide à 26 faces.}\qquad (11)$$

Si $n'' = 10$, on a

$$f' = 12,\quad f' = 30,\quad f = 20,\ \text{autre solide à 62 faces,}\qquad (12)$$

possible, les angles 90°, 120°, 144° valant 354°.

Soit $n = 6$, puis $n' = 8$ et $n'' = 10$; on aurait trois angles de 120°, 135°, 144°, dont la somme dépasse 360°. Nous avons donc épuisé les combinaisons ternaires à angle triple.

Posons $q = 4$, d'où les trois hypothèses :

$$1^\circ\begin{cases} p = 1, \\ p' = 1, \\ p'' = 2, \end{cases}\quad 2^\circ\begin{cases} p = 1, \\ p' = 2, \\ p'' = 1, \end{cases}\quad 3^\circ\begin{cases} p = 2, \\ p' = 1, \\ p'' = 1. \end{cases}$$

Le premier cas nous fournit

$$f'' = \frac{2nn'}{2nn' + nn'' + n'n'' - nn'n''},\ \text{avec}\ f' = \frac{n''}{2n'},\ f' = \frac{n''}{2n}f''.$$

Avec un triangle $n = 3$, et un carré $n' = 4$, d'où

$$f' = \frac{48}{24 - 5n''}, \text{ et } n'' < 5, \text{ pas de combinaison.}$$

Au lieu du triangle, prenant toute autre figure, le carré ou le pentagone, nous n'aurons pas davantage de combinaison ternaire.

Soit donc $p = 1$, $p' = 2$, $p'' = 1$, d'où

$$f' = \frac{2nn'}{nn' + 2nn'' + n'n'' - nn'n''},$$

avec

$$f' = \frac{2n''}{n'} f', \quad f = \frac{n''}{n} f'.$$

Posant $n = 3$, $n' = 4$, il en résulte

$$f' = \frac{12}{6 - n''};$$

par suite, on n'a que la valeur disponible $n'' = 5$, d'où

$$f' = 12, \qquad f' = 30, \qquad f = 20, \tag{13}$$

dernier des solides d'Archimède à 62 faces, toute autre combinaison ne pouvant se réaliser.

Enfin avec $p = 2$, $p' = 1$, $p'' = 1$, on a

$$f' = \frac{2nn'}{nn' + nn'' + 2n'n'' - nn'n''}, \quad f' = \frac{n''}{n'} f', \quad f = \frac{2n''}{n} f'.$$

Posant $n = 3$, $n' = 4$, il en résulte

$$f' = \frac{24}{2 - n''},$$

qui n'admet aucune valeur pour n''; laissons toute combinaison de ce genre.

On ne peut d'ailleurs prendre $n = 4$, sans composer quatre angles simples dont la somme surpasse 360°; par suite, toutes les combinaisons sont épuisées.

ARTICLE 3.

Considérations purement géométriques.

La marche que nous avons suivie nous a paru à la fois simple et logique; nous n'avons pas été détourné de notre plan par la considération que la matière est essentiellement géométrique; nous

pensons enfin que l'analyse élémentaire dont nous avons fait usage, loin d'embarrasser le géomètre, en devient un auxiliaire utile ; elle facilite tous les calculs qu'entraîne l'examen des propriétés de ces corps, et il ne faut pas oublier que nos recherches prennent place à la suite des éléments de géométrie ou même de la trigonométrie rectiligne et sphérique, comme offrant un complément indispensable à la discussion si fort réduite, on ne sait pourquoi, des corps réguliers, dont l'importance n'a pas été assez appréciée.

Toutefois, il est bon d'étudier ces mêmes corps à un point de vue purement géométrique, et ce serait méconnaître les services rendus à la science par Képler, Lidonne et leurs émules, que de passer sous silence les constructions ingénieuses qui rattachent ces corps semi-réguliers aux cinq corps platoniques. Ce n'est pas pour la première fois que les deux méthodes, géométrique et analytique, se prêtent un secours mutuel ; et ce n'est pas un simple problème de géométrie ou d'analyse que nous avons voulu résoudre. Nous avons désiré faire entrer dans l'étude des éléments des propriétés qui ne sont expliquées nulle part, en leur donnant les deux formes auxquelles il faut avoir recours, sauf à choisir des deux celle qui paraîtra la plus commode ou la plus opportune. Dans tous les cas, ce qui nous reste à faire servira de contrôle ou de complément à la première partie.

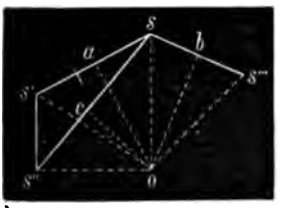
Tout polyèdre régulier est inscriptible et circonscriptible à la sphère ; il a donc un centre qui est celui des deux sphères concentriques : ces propriétés sont des plus importantes, mais il en est d'autres qui méritent d'être signalées.

Ainsi, l'analogie qui apparaît dans la construction des cinq polyèdres réguliers permet de rapprocher l'hexaèdre ou le cube, de l'octaèdre, comme le dodécaèdre de l'icosaèdre. Le tétraèdre semble isolé, et cependant on le rapproche avec quelque intérêt de l'octaèdre, et il n'est pas indifférent de les comparer tous à la pyramide triangulaire qui fait l'élément du tétraèdre régulier, de l'octaèdre et de l'icosaèdre ; comme aussi de rapprocher cette même pyramide élémentaire des pyramides à face carrée ou pentagonale qui constituent le cube et le dodécaèdre.

En écartant à regret l'étude de ces corps remarquables, qui ne sont pas l'objet immédiat de ce travail, il est aisé de voir cependant qu'elle se lie par plusieurs points à la connaissance des corps semi-

réguliers, et nous aurons par conséquent à signaler des propriétés communes ou analogues, aussi bien que des rapprochements inattendus entre certains d'entre eux.

Fig. 1.



En premier lieu, l'on voit que nos polyèdres, formés de faces équilatérales, sont inscriptibles à la sphère; car on aura toujours pour des côtés a, b, c appartenant à des faces d'un ordre différent, assemblées en s, sommet d'un angle polyèdre, les triangles sao, sbo, sco, égaux à cause de so commun et de $sa = sc = sb$; donc $so = s'o = s''o = s''o$, c'est à dire que les sommets sont tous également distants d'un même point o, facile à déterminer.

Mais ces polyèdres ne sont pas circonscriptibles, car les faces ne sont pas de même ordre et s'écartent d'autant plus ou moins de o qu'elles ont plus ou moins de côtés.

L'étude seule des analogies qui rattachent les polyèdres réguliers aux polyèdres semi-réguliers, comme les uns et les autres aux polygones plans réguliers, mériterait un chapitre particulier, dont on trouverait les éléments dans les recueils des Sociétés scientifiques, un peu trop négligés.

Ire Section. — *Combinaisons binaires.*

Elles sont au nombre de 10, que l'on peut subdiviser en trois groupes : le premier renferme 5 polyèdres à angles triples; le deuxième en contient 3 à angles quadruples, et le troisième en a 2 seulement à angles quintuples.

Article 1er. — *Groupes à angles triples.*

Premier solide. — *Tétraèdre tronqué.* (Sixième solide de Képler, *Tetraedron truncum.*)

Le premier qui s'offre à nous est formé de 4 triangles et 4 hexagones. Coupons chaque angle solide du tétraèdre régulier par un plan mené au tiers de chaque arête à partir du sommet commun; nous détacherons quatre pyramides triangulaires régulières qui vaudront chacune le 27ème du tétraèdre, et il en restera le polyèdre semi-régulier à 8 faces régulières, 4 triangles équilatéraux et 4 hexagones; il a toutes les conditions assignées à ce genre de

corps, angles solides égaux formés de deux angles d'hexagones et d'un angle de triangle équilatéral; total, $120° + 120° + 60° = 300°$: toutes ses arêtes sont égales au tiers du côté du tétraèdre donné.

Nous avons dit que le nouveau solide est inscriptible dans une sphère de rayon R facile à calculer, mais n'est point circonscriptible, et nous le répétons, parce que Lidonne a commis l'étrange méprise de l'affirmer : les milieux des arêtes étant également distants du centre de la sphère primitive circonscrite au tétraèdre de rayon R, lequel est aussi le centre de la seconde sphère de rayon R', nous avons une troisième sphère de rayon R''.

1. *Comparaison du nouveau solide au tétraèdre donné.*

c étant le côté du tétraèdre donné, c' celui du tétraèdre tronqué, on a

$$c' = \frac{c}{3};$$

d'ailleurs, s, v étant la surface et le volume du premier, on a

$$c = \frac{2}{3} R\sqrt{6}, \quad s = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3}, \quad v = \frac{8}{27} R^3\sqrt{3},$$

R étant le rayon de la sphère circonscrite.

Or, les surfaces des quatre nouveaux triangles sont

$$c'^2\sqrt{3} = \frac{c^2\sqrt{3}}{9};$$

celles des 4 hexagones,

$$6c'^2\sqrt{3} = \frac{2}{3} c^2\sqrt{3}.$$

Donc la surface totale

$$s' = \frac{7}{9} c^2\sqrt{3} = \frac{56}{27} R^2\sqrt{3}, \quad \text{d'où } s' = \frac{7}{9} s.$$

Le volume d'une des pyramides enlevées est exprimé par la surface de base multipliée par $\frac{1}{3}$ de la hauteur, c'est à dire

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{36} \times \frac{c\sqrt{6}}{27} = \frac{c^3\sqrt{2}}{324};$$

les quatre vaudront

$$\frac{c^3\sqrt{2}}{81} = \frac{32\sqrt{3}}{729} R^3 = \frac{4}{27} v,$$

d'où

$$v' = v - \frac{4}{27}v = \frac{184}{729}R^3\sqrt{3}.$$

2. Il est aisé d'exprimer en fonction de c, c' ou R les valeurs des rayons des sphères, l'une circonscrite aux sommets du nouveau solide, l'autre inscrite sur les milieux des arêtes : soient R' et R''. On a

$$R''^2 = \frac{c^2}{8} = \frac{R^2}{3},$$

d'où $\quad R^2 = 3R''^2, \quad R = R'\sqrt{3}, \quad R^3 = 3R''^3\sqrt{3}$;

$$R''^2 = \frac{11}{27}R^2,$$

d'où $\quad R^2 = \frac{27}{11}R''^2, \quad R = 3R'\sqrt{\frac{3}{11}}, \quad R^3 = \frac{81}{11}R''^3\sqrt{\frac{3}{11}}$;

par conséquent on aura

$$s' = \frac{56}{11}R''^2\sqrt{3} = \frac{56}{9}R''^2\sqrt{3} \quad , \quad v' = \frac{184}{1089}R''^3\sqrt{33} = \frac{184}{11}R''^3.$$

On en déduit les valeurs numériques suivantes :

Pour $R = 1$,	$s' =$	3,5924026,	$v' =$ 0,431705,
lorsque	$s =$	4,6188021,	$v =$ 0,5132002;
Pour $R' = 1$,	$s =$	8,8177131,	$v =$ 0,9706148,
sphère	$s =$	12,5673706,	$v =$ 4,1887902.
Pour $R'' = 1$,	$s' =$	10,772049,	$v' =$ 2,2716049.

Les distances du centre commun aux faces triangulaires ou hexagonales sont exprimées par les formules

$$ot = \frac{R}{9}\sqrt{73}, \quad \text{d'où } ot^2 = \frac{73}{81}R^2,$$

$$oh = \frac{R}{3}\sqrt{\frac{19}{3}}, \quad \text{d'où } oh^2 = \frac{19}{27}R^2,$$

et $$ot^2 - oh^2 = R^2\left(\frac{73}{81} - \frac{19}{27}\right) = R^2.\frac{16}{81}.$$

Ainsi on a $ot > oh$, ce qui devait être; la différence sera

$$R\left(\frac{1}{9}\sqrt{73} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{3}}\right) = \frac{R}{3}\left(\frac{\sqrt{73}}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right)$$

$$= \frac{R}{9}(\sqrt{73} - \sqrt{57}) = \frac{R}{9}(8{,}5440 - 7{,}5498)$$

$$= \frac{R}{9}(0{,}9942) = R.(0{,}1105).$$

Propriétés qui découlent de sa construction. — I. Appliquons, pour les calculs relatifs au nombre des arêtes, des sommets et des faces, le théorème d'Euler $S + F = A + 2$ (A étant le nombre des arêtes, F celui des faces et S celui des sommets); on trouve 18 arêtes et 12 angles solides.

Connaissant les trois angles plans de chaque angle trièdre

$$120°,\ 120°,\ 60°,$$

nous trouvons les inclinaisons suivantes :

1° Pour deux faces hexagonales contiguës, 76°51′48″ ;

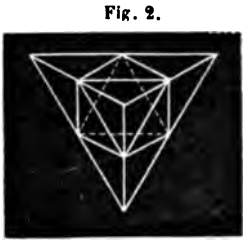
2° Pour l'angle dièdre de deux faces triangulaires et hexagonales, 109°28′16″;

3° Pour l'angle d'une arête sur l'apothème du triangle adjacent, 185°15′51″.

Enfin, il est aisé de suivre la formation du solide par le développement des diverses faces autour de l'une d'elles; par exemple, l'hexagone H entouré de trois triangles et de trois hexagones, l'un de ceux-ci ayant le quatrième triangle qui vient fermer le solide.

Nota. Une coupe faite sur les milieux des arêtes donne lieu à l'octaèdre régulier, comme il aisé de le voir par la *fig.* 2.

Fig. 2.



Ainsi, le premier solide sera représenté par la figure 3 et développé dans la figure 4.

Nota. Une seconde coupe du tétraèdre par les plans qui passent au milieu des arêtes contiguës à un même angle trièdre conduit, comme on le sait et comme on va le voir sans difficulté, à l'octaèdre régulier dont l'arête est la moitié de celle du triangle, ce qui établit une rela-

Fig. 3.

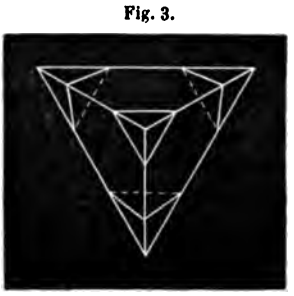


Fig. 4.

tion intime entre le tétraèdre et l'octaèdre, et produit un solide qui a sa surface $= \frac{1}{2}$ de la surface du tétraèdre et un volume aussi moitié moindre.

Deuxième solide. — *Hexoctaèdre hexagonal, octaèdre tronqué* (neuvième solide de Képler), *de 14 faces, 6 carrés et 8 hexagones.*

Ce solide est ainsi nommé parce que nous le tirons de l'octaèdre régulier. La coupe a lieu en faisant passer des plans par le tiers de chaque arête, de manière à enlever six pyramides à base carrée, en formant au-dessous de chaque carré et entre deux carrés voisins huit hexagones réguliers; les angles solides seront triples et comprendront deux angles d'hexagones et un angle de carré, 120°, 120° et 90°.

Les carrés sont disposés comme dans le cube ou l'hexaèdre, par suite, parallèles deux à deux; mais ils sont séparés par les huit hexagones qui se placent aux quatre angles de chaque carré; du reste, il résultera une figure analogue de toute section, qui sera faite entre le sommet et le milieu de l'arête, sauf qu'il n'y aura rien de régulier dans les hexagones formés, bien que les carrés existent.

Ce nouveau corps aura 24 angles triples et 36 arêtes; chaque angle triple comprendra deux angles d'hexagones pour un de carré; le somme des trois angles plans vaudra donc 330°.

Les inclinaisons de deux faces hexagonales sont de 109°28′16″, l'angle dièdre d'un carré et d'un hexagone de 125° 15′ 51″; l'arête commune à deux hexagones fait avec la diagonale du carré opposé un angle de 135°.

Nota. Les propriétés que nous calculons par la méthode suivie pour le premier solide, réclament un examen minutieux qui ne présente aucune difficulté. Pour ne point surcharger le texte, déjà bien long, de détails faciles à suppléer, nous nous arrêterons seulement, quand les circonstances le demanderont, sur celles de ces propriétés dont l'intérêt ou la recherche nous paraîtront mériter une mention spéciale. Les figures suivantes nous donnent une idée soit de la construction du solide, soit de la forme et du mode pratique par lequel on peut le reconstituer par le développement des faces.

Nota. Le nom d'*hexoctaèdre* (Képler l'appelle *cuboctaèdre*, ce qui revient au même) est évidemment dérivé de la coupe faite dans

l'octaèdre, et d'une pareille dans l'hexaèdre, qui toutes deux conduisent au même résultat, comme on le verra bientôt.

Fig. 5.

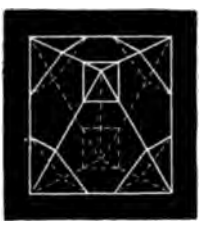
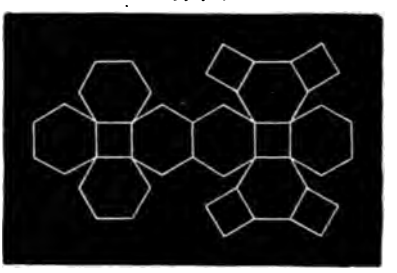


Fig. 6.



Troisième solide. — *Hexoctaèdre triangulaire, à 14 faces, 6 carrés, 8 triangles.*

L'analogie nous conduit à une seconde coupe dans l'octaèdre, bien qu'elle se brise en partie dans la nature des angles solides qui deviennent quadruples; mais elle se conserve si complètement pour tout le reste qu'il est impossible de séparer ces deux corps, dont l'un est connu dès que l'autre a été déterminé; les huit hexagones sont simplement remplacés par huit triangles équilatéraux.

Il est évident, en effet, que si la section faite dans l'octaèdre passe par les milieux des arêtes, le côté que fournissait chaque arête ainsi partagée n'existe plus, lorsque la section prend la moitié au lieu du tiers, et l'hexagone devient un triangle; quant aux carrés, ils subsistent aussi bien que dans la construction précédente, et nous obtenons les résultats suivants :

Le solide contient 12 angles quadruples, 24 arêtes et 14 faces; les faces carrées sont inclinées de 90° l'une sur l'autre; les triangles contigus ont une inclinaison de 109°28′18″; le carré et le triangle font un angle de 125°15′51″, comme on devait s'y attendre.

Ces six carrés ont leur arête égale à la moitié de celle de l'octaèdre; leurs surfaces équivalent à

$$\frac{3c'^2}{2} \text{ ou } 6c'^2.$$

Les huit triangles ayant la même arête vaudront

$$\frac{c'^2\sqrt{3}}{2} = 2c'^2\sqrt{3};$$

par conséquent, la surface totale est

$$\frac{c^2}{2}(3+\sqrt{3}) = 2c'^2(3+\sqrt{3}).$$

Le volume s'obtient en retranchant du solide primitif les six pyramides déterminées par la coupe des angles polyèdres qui valent en tout

$$\frac{c^3\sqrt{2}}{8};$$

en sorte que le volume cherché vaut

$$\frac{c^3\sqrt{2}}{3} - \frac{c^3\sqrt{2}}{8} = \frac{5}{24}c^3\sqrt{2} = \frac{5}{3}c'^3\sqrt{2}.$$

Les valeurs des rayons R, R', R'' sont calculées fort simplement, et nous permettent d'exprimer la surface et le volume des sphères correspondantes.

Fig. 7.

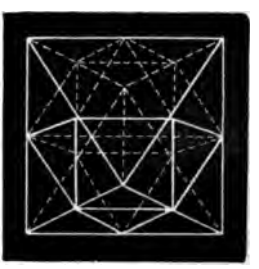
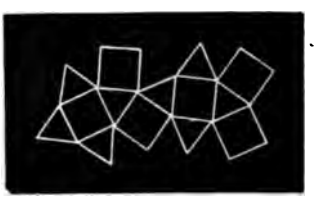


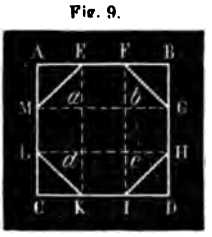
Fig. 8.



Quatrième solide. — *Hexaèdre tronqué à 14 faces, ou hexoctaèdre octogonal.*

Coupons chaque carré, tel que BC (*fig.* 3), par des plans qui détachent de l'angle trièdre correspondant une pyramide réglière, ayant pour arête une droite formant avec les parties du carré conservées un octogone régulier, construction sans aucune difficulté, puisqu'il s'agit de substituer au carré AC un octogone EI, en conservant une portion EF = EM = ML.

Fig. 9.



Il est aisé de voir que AE = AM vaut

$$\frac{AB\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1), \text{ et que } EF = AB(\sqrt{2}-1),$$

ou bien, selon la notation adoptée, on a

$$c' = c(\sqrt{2} - 1) = c.\,0{,}4142135,$$

comme AE vaudra

$$c.\,0{,}29280322;$$

d'ailleurs, la construction formant sur chaque face primitive un octogone régulier, laisse vis-à-vis l'angle trièdre du solide un triangle équilatéral; en sorte que le nouveau polyèdre aura 8 triangles équilatéraux et 6 octogones réguliers.

En outre, il comprendra 24 angles triples, 36 arêtes; l'angle triple sera formé de deux angles d'octogones de 135° et d'un angle de triangle, total 330°. Les inclinaisons seront :

1° Entre deux octogones..... de 90°;
2° Entre un octogone et un triangle..... de 125°15′51″,8;
3° Entre l'arête et l'apothème du triangle.. de 144°44′ 8″,2.

Fig. 10.

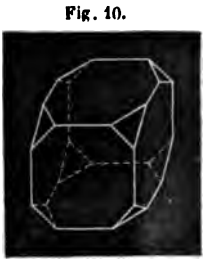
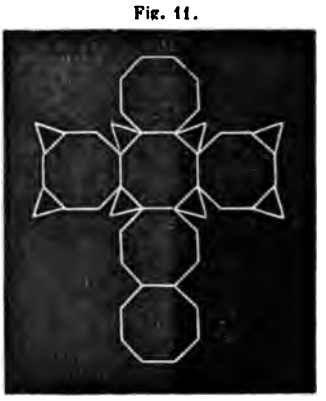


Fig. 11.



Cinquième solide.— *Icosihexaèdre*, ou encore le *rhombe cuboctaédrique de Képler*.

Il est également taillé dans le cube et l'hexaèdre, et contient 26 faces, dont 18 carrés et 8 triangles équilatéraux.

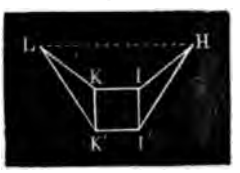
Construction. Enlevons du cube, par une coupe faite sur les arêtes, quatre prismes triangulaires égaux, en formant sur les deux carrés qui servent de base supérieure et inférieure, deux octogones réguliers égaux, d'où résultera un prisme octogonal droit de même hauteur que le cube primitif.

Cela posé, menons dans nos octogones quatre diagonales parallèles deux à deux; chacune interceptant deux des angles de l'octo-

gone, elles formeront par leur intersection mutuelle dans le milieu un petit carré dont les côtés sont parallèles à ceux du grand carré, base du cube; par chaque diagonale, menons un plan qui s'incline sur les arêtes extérieures du prisme et en détache de petits polyèdres, à la condition de former une section latérale qui détermine avec la section parallèle inférieure et les deux arêtes intactes du prisme un carré. Ces huit plans ainsi tracés, 4 à l'octogone supérieur, 4 à l'octogone inférieur, présenteront huit carrés latéraux, et deux autres égaux aux premiers dans les octogones, au total 10.

Suivons la double construction sur la figure ABCD, p. 343, base supérieure du cube qui a fourni le carré *abcd* et sur les faces latérales du prisme; la coupe LH donne le polyèdre (*fig.* 4) à cinq faces

Fig. 12.



que nous détachons pour en mieux détailler les parties; ce sont : d'abord la face supérieure LHIK, trapèze de la première figure; trois latérales, savoir, KII'K', carré de côté égal à *ab*, et les deux triangles égaux LKK', HII'; enfin une cinquième postérieure LHI'K'. La coupe opposée suivant MG détache un polyèdre égal; mais les deux autres qui passent par FI, EK ne détachent que deux portions d'un solide plus petites que ces deux polyèdres, parce que les premières coupes ont déjà emporté une partie du solide qui constituerait le polyèdre de droite ou de gauche, si notre coupe primitive eût commencé par FI et par EK.

Une troisième et dernière section achèvera de régulariser le solide, en retranchant par des plans menés suivant KI et les trois analogues, en haut et en bas, des pyramides irrégulières que la section précédente a laissées latéralement entre les huit carrés latéraux et les deux précédents, sans introduire aucune modification dans ces carrés : cette dernière construction ajoute donc 8 carrés et 18 triangles, dont 4 en haut, 4 en bas, dont les sommets vont aboutir aux angles du carré *abcd*, comme de son analogue, dont les bases s'appuient sur les côtés des carrés latéraux.

Cette forme, ainsi complétée, est une des plus difficiles à retracer dans les trois périodes de la construction que nous venons d'indiquer; aussi faut-il la reproduire dans les développements que nous donnons aux détails du calcul qu'il a paru opportun de supprimer dans la plupart des autres solides.

La première section du cube donne des résultats faciles à trouver; si nous représentons l'arête du cube par c, comme à l'ordinaire, et celle du second carré intérieur par c', nous aurons :

$$1^\circ\ c' = c(\sqrt{2}-1);\quad 2^\circ\ \mathrm{AC} = \frac{c\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1) = d;\quad 3^\circ\ d = \frac{c'\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{d'où } d^2 = \frac{c^2}{2};$$

en sorte que l'octogone inscrit

$$= 2c^2(\sqrt{2}-1) = 0{,}828\,c^2,$$

tandis que les quatre triangles enlevés au carré valent

$$c^2(3-2\sqrt{2}) = 0{,}172.$$

La deuxième construction nous donne des prismes dont la hauteur est la longueur de l'arête c, et dont la base AEM est connue; le volume de chacun sera exprimé par

$$\frac{c^3}{4}(\sqrt{2}-1)^2.$$

La troisième construction présente des solides moins faciles à évaluer directement; mais on évite des calculs sinon inutiles, du moins peu importants, en traitant séparément les pyramides triangulaires et quadrangulaires dont le solide est composé. Les bases nous seront fournies par la valeur du côté; la hauteur sera facile à déterminer.

La régularité des coupes, leur symétrie par rapport au centre de figure qui est le centre des sphères, inscrite ou circonscrite au cube, nous montrent dans le nouveau polyèdre semi-régulier un corps inscriptible à une sphère de même centre que les précédentes, mais non circonscriptible, sinon dans une sphère dont la surface comprend les milieux de toutes les arêtes.

Nous croyons utile d'ajouter quelques détails sur les calculs des éléments du polyèdre, sans prendre l'obligation d'en reproduire d'analogues pour les autres. Observons d'ailleurs que ce corps de 26 faces à 18 carrés et 8 triangles équilatéraux, a ses angles quadruples, 48 arêtes égales et 24 sommets; de plus :

l'angle dièdre de deux carrés adjacents $= 135^\circ$;
celui d'un triangle et d'un carré $= 144^\circ 45' 8''$.

L'angle quadruple peut être considéré comme formé de deux angles trièdres; de sorte qu'en détachant l'angle trièdre S, formé des triangles ASD, DSC, CSA, on obtient un triangle sphérique rectangle à angles de 90°, 60°, 135°, d'où l'on tire l'angle dièdre des deux faces adjacentes ASD, DSC, carré et triangle.

Fig. 13.

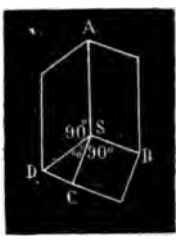


Fig. 14.

Calculs. Soient *oc*, *ot* les perpendiculaires menées du centre de figure sur les faces carrées ou triangulaires, et nommons-les h, h', on aura

1° $$h = \frac{1}{2}\,c = \frac{c'}{2}(\sqrt{2}+1);$$

2° D'un autre côté, la relation du cube à la sphère circonscrite de rayon R donne R en fonction de c ou c', et *vice versa*; or, on a

$$3c^2 = 4R^2, \quad \text{d'où } c^2 = \frac{4R^2}{3},$$

et puisque $h^2 = \frac{c^2}{4}$, on a aussi $h^2 = \frac{R^2}{3}$, d'où $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$;

3° Pour $R' = oa$, nous avons

$$R'^2 = h^2 + \overline{ac}^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c'^2}{2} = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{c^2}{4}(7-4\sqrt{2}),$$

par suite $= \frac{R^2}{3}(7-4\sqrt{2})$ et $R^2 = \frac{3R'^2}{17}(7+4\sqrt{2})$,

ou bien aussi

$$c^2 = \frac{4R^2}{17}(7+4\sqrt{2});$$

4° Pour $R'' = ok$, on aura

$$R''^2 = R'^2 + \frac{c'^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2(\sqrt{2}-1)^2}{4},$$

d'où

$$R''^2 = \frac{c^2}{2}(2-\sqrt{2}) = \frac{2R^2}{3}(2-\sqrt{2});$$

5° Enfin, la hauteur h' des pyramides triangulaires s'obtient par

le triangle *oit*, dans lequel on connaît deux côtés, *ot* et *ti*; l'une de ces droites R'' est calculée, l'autre est le tiers de la hauteur du triangle équilatéral; on a donc

$$h'^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\, c^2 - \frac{c'^2}{12},$$

d'où

$$h'^2 = \frac{c'^2}{12}(43-30\sqrt{2}) = \frac{c^2}{12}(11+6\sqrt{2}) = \frac{R^2}{9}(11+6\sqrt{2}).$$

Surfaces et volumes. A l'aide des données précédentes, on a bientôt la surface s' formée de 18 carrés, 18 c'^2, et de 8 triangles, $2\,c'^2\sqrt{3}$. Par suite

$$s' = 2c'^2(9+\sqrt{3}) = 21{,}4641016\,c'^2.$$

En fonction de c^2, la formule devient

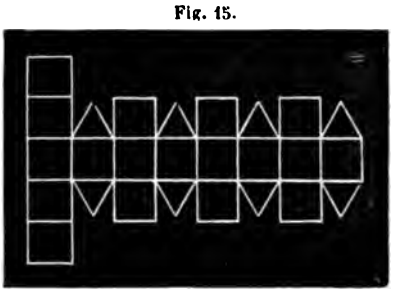
$$s' = 2c^2(27+3\sqrt{3}-18\sqrt{2}-2\sqrt{6}) = 3{,}68266\,c^2.$$

Le volume v' sera calculé par l'évaluation des 18 pyramides à base carrée et des 8 pyramides à base triangulaire. Les premières ont pour expression $6c'^2h$, les autres $\frac{2}{3}c'^2h'\sqrt{3}$, d'où

$$v' = \frac{2c'^3}{3}(6+5\sqrt{2}) = 8{,}714045\,c'^3,$$

et de là à ce même volume en fonction de c, R, R' ou R'', il n'y a aucune difficulté; par suite, le volume du solide pourra être comparé à ceux du cube et des diverses sphères.

Fig. 15.



Sixième solide.— *Dodécaèdre tronqué à 32 faces* (huitième solide de Képler).

Coupons le dodécaèdre régulier sur les angles solides par des plans qui transforment les 12 pentagones en autant de décagones

réguliers; il est évident que chaque angle trièdre disparaît pour faire place à un triangle équilatéral; de là notre polyèdre de 32 faces à 20 triangles et 12 décagones, qui comprendra 60 angles triples et 90 arêtes; chacun des sommets aura deux angles de décagones et un angle de triangle; en tout $288° + 60° = 348°$.

Les inclinaisons des faces adjacentes seront :

1° Pour deux décagones contigus..... 116°33′54″;

2° Pour un décagone et un triangle.... 142°37′21″;

3° L'arête commune à deux décagones fait, avec l'apothème du triangle opposé, un angle de 159°5′41″.

Fig. 16.

Septième solide. — *Autre dodécaèdre tronqué à 32 faces* (cinquième solide de Képler), ou l'*icosidodécaèdre*.

Une seconde coupe dans le dodécaèdre par des plans passant aux milieux des arêtes, détermine, comme tout à l'heure, 20 triangles équilatéraux et 12 pentagones réguliers, au lieu de 12 décagones; il y a donc fort peu de différence entre ce corps et le précédent. La plus importante consiste dans la forme de l'angle solide qui est quadruple en ce polyèdre; 2 angles de pentagones s'unissent à 2 angles de triangles.

Il y a 30 angles solides et 60 arêtes, et dans chacun de ces angles quadruples la somme des 4 angles plans = 336°.

Les inclinaisons des faces opposées sont :

1° Pentagonales, de 116° 33′ 54″ (voir le dodécaèdre):

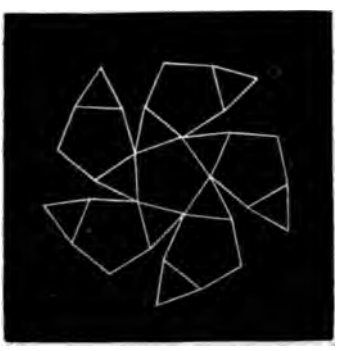
2° Triangulaires, de 138° 11′ 22″ (voir l'icosaèdre);

3° L'angle de deux arêtes contiguës, 144° (décagone).

Des calculs analogues à ceux que nous avons indiqués pour le

cinquième solide se présentent ici avec quelques complications de plus; toute difficulté cesse en prenant les formules qui, dans les polygones réguliers plans ou les polyèdres réguliers, lient les arêtes aux rayons des cercles ou des sphères.

Fig. 17.



Huitième solide. — *Icosaèdre tronqué à* 32 *faces*, 20 *hexagones*, 12 *pentagones* (dixième de Képler), l'*icosidodécaèdre*.

En coupant l'icosaèdre par des plans qui détachent de chaque angle solide une pyramide pentagonale, puisqu'il y a cinq triangles réunis autour d'un même point, on peut obtenir : 1° des hexagones qui remplacent les 20 triangles; 2° des triangles dont chacun est le quart du triangle de l'icosaèdre. Dans les deux cas, les autres faces sont des pentagones réguliers au nombre de 12; de là les deux corps dont nous nous occupons.

Le premier s'obtient par des sections qui séparent le tiers supérieur de l'arête, c'est à dire le plus voisin du sommet de l'angle polyèdre; il aura ses angles triples formés par deux angles d'hexagone et un angle de pentagone; on y comptera donc 32 faces, 60 sommets ou angles, et 90 arêtes.

L'angle dièdre de deux hexagones = 138°11′22″8,

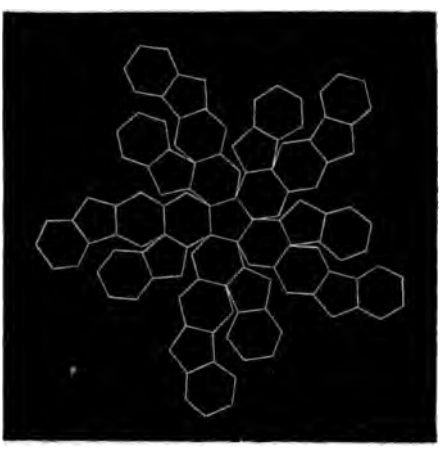
. . . . . d'un hexagone et d'un pentagone = 142°37′21″.

L'angle entre une arête de l'hexagone et l'apothème du pentagone opposé = 148°16′56″8.

L'angle entre une arête du pentagone et la grande diagonale de l'hexagone opposé = 144°44′8″.

Le second solide que nous avons mentionné s'obtient en faisant passer les plans par les milieux des arêtes, ce qui réduit les hexa-

Fig. 18.



gones du solide précédent à des triangles, d'ailleurs en même nombre que les pentagones; il a ses angles quadruples formés de deux angles de pentagones et de deux angles de triangles, 60 arêtes et 30 sommets.

Inclinaisons. 1° Angle de deux pentagones 116°33′54″;
2° Angle d'un pentagone et d'un triangle 143°23′24″;
3° Angle de deux triangles opposés..... 138°11′22″8.
C'est le corps sous le n° 7 fourni par le dodécaèdre.

Neuvième solide.— *Hexoctaèdre tronqué à 38 faces, 32 triangles, 6 carrés* (premier solide de Képler), *cubissimus, triacontaoctaèdre.*

Donnons une idée de ce corps remarquable, que l'on peut déduire de l'hexoctaèdre qui est formé de 8 triangles et de 6 carrés, le deuxième de Képler, auquel il a donné le nom de *tétraèdre tronqué*. Rappelons d'abord la composition de celui-ci pour saisir l'analogie des deux corps.

Le solide déjà étudié se forme de trois sections distinctes : deux parfaitement égales et symétriques, composées d'un carré aux quatre côtés duquel viennent s'adapter 4 triangles équilatéraux, qui opposent leurs pointes en s'inclinant sur le carré; en sorte que la figure offre 4 angles polyèdres inachevés ayant déjà trois faces,

deux triangulaires et une carrée; ces deux formes sont placées en regard l'une de l'autre, de manière que les deux carrés soient non seulement parallèles, mais encore puissent être envisagés comme les bases d'un prisme droit ayant pour hauteur les diagonales de quatre carrés qui viennent s'interposer entre les deux portions de polyèdres mentionnées; de plus, dans quelque sens qu'on prenne les six carrés, ils se touchent par leurs pointes, et leurs diagonales sont ou paraissent perpendiculaires; c'est une propriété que nous pourrons étudier : voilà donc 6 carrés et 8 triangles.

En considérant le même corps sous un autre point de vue, nous obtenons un résultat aussi remarquable. Prenons, en effet, pour bases parallèles, deux triangles opposés; chacun sera environné de trois carrés séparés par trois triangles, d'où 7 faces sur chaque base et par suite 14. En outre, nos deux bases, quoique parallèles, sont dans une situation inverse, la pointe de l'une correspondant à la base de l'autre : elles sont d'ailleurs séparées par deux faces d'ordre différent, un carré et un triangle. L'étude de ce corps, outre les particularités curieuses qu'il offre, prépare à celle du solide bien plus compliqué dont il s'agit.

Venons-en maintenant à notre solide, assemblage de 6 carrés et de 32 triangles. Nous y voyons d'abord les 6 carrés du corps précédent. Au-dessous de chaque carré, et tout autour se rangent 12 triangles réguliers, comme dans le corps précédent il y avait 4 carrés et 4 triangles; les carrés adjacents sont remplacés par 8 triangles; en prenant deux carrés opposés pour bases, nous retrouvons les deux fragments de polyèdres qui doivent constituer presque tous les solides en les opposant l'un à l'autre : ces deux portions ont à elles deux 24 triangles et 2 carrés. Entre elles se placera une bande formée de 12 faces, dont 4 carrés et 8 triangles, présentant alternativement des angles solides à deux ou trois faces; les angles binaires ont un carré et un triangle, les angles ternaires ont un carré et deux triangles; la forme est la même des deux côtés, qui viennent s'adapter aux deux portions déjà examinées. Cette bande a aussi ses angles inachevés, alternativement doubles et triples, qui viendront recouvrir les angles correspondants de nos deux portions de polyèdre, d'où sortira le polyèdre en question, à 6 carrés et 32 triangles.

Il a 24 angles solides quadruples et 60 arêtes.

Inclinaison de deux triangles adjacents 153°26′3″.

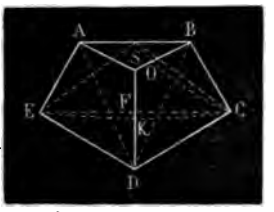
. . . . . d'un triangle sur le carré contigu 134°24′40″,

. . . . . de l'arête du triangle sur la décagonale du carré 126°24′12″.

L'angle quadruple repose sur un polygone irrégulier de cinq côtés, dont quatre sont égaux à l'arête du solide et le cinquième à la diagonale du carré qui complète l'angle ; les cinq angles valent $60° \times 4 + 90° = 240° + 90° = 330°$.

1° *Calcul pour la détermination des angles solides.* Le pentagone ABCDE sur lequel est posé l'angle polyèdre S, nous sera donné par les conditions suivantes : 1° $SA = SB = SC = SD = SE = c$; 2° $AE = DE = CD = CB = c$, tandis que $AB = c\sqrt{2}$; 3° les angles en S sont au nombre de quatre, égaux comme angles de triangles équilatéraux, plus un cinquième $ASB = 90°$ appartenant au carré.

Fig. 19.



Les triangles égaux dont se compose la figure, leur symétrie par rapport au point S qui est également distant des cinq points A, B, C, D, E, nous montrent que le polygone ABCDE est plan et inscriptible, que les diagonales CA, BE sont égales, et que CI, EI, tombant au milieu de AB, sont pareillement égales. Menons CK, EK sur le milieu de SD, on aura deux perpendiculaires sur SD ; de sorte que l'angle CKE est l'angle mesure de l'angle dièdre ESDC. De plus, $CK = KE = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Soit $CE = y$; la seconde diagonale CA du pentagone n'est pas connue, représentons-la par x.

Le quadrilatère inscriptible CDEA nous donne

$$y^2 = c^2 + cx,$$

et le quadrilatère ABCE donne

$$x = c^2 + cy\sqrt{2};$$

De ces équations résulte l'équation

$$y^3 - 2c^2y = c^3\sqrt{2},$$

ou celle-ci

$$x^4 - 2c^2x^2 - 2c^3x = c^4.$$

La première, plus simple, n'a qu'une racine réelle, facile à calculer, et nous aurons $y = 1{,}6867\,c$, d'où, par l'équation

$$x = \frac{y^2 - c^2}{c},$$

nous concluons la valeur de $x = 1{,}8515\,c$. Voici les conséquences :

1° Dès lors, le triangle CKE est déterminé par les trois côtés et nous aurons par le demi-triangle rectangle CKF, d'abord le demi-angle CKF $= 76°43'1'',66$, et ensuite CKE $= 153°26'3''$.

2° Le triangle SAC est également déterminé par ses trois côtés, SA $=$ SC $= c$ et AC $= x$; en nous servant du triangle rectangle formé dans ce triangle isoscèle, nous avons $\frac{1}{2}$ ASC $= 67°2'20''$, d'où ASC $= 134°4'40''$.

3° L'angle trièdre en S formé des angles plans ASB $= 90°$, BSC $= 60°$, et ASC $= 134°4'40''$, nous fait connaître l'angle dièdre ASBC $= 143°26'29''$.

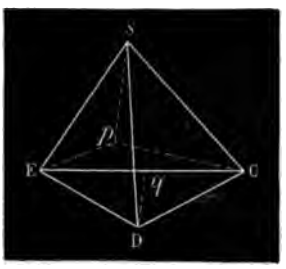
4° Le triangle DEC du pentagone a ses côtés déterminés ; on peut donc calculer la valeur de l'angle D que nous trouvons de 115°.

5° Le triangle CAB a trois côtés connus, AB$C = c\sqrt{2}$, BC $= c$, AC $= x = 1{,}8415$, d'où l'on calcule l'angle B qui $= 97°56'47''$.

Nous tirons de ces deux dernières valeurs la détermination complète du pentagone dont les cinq angles offrent les grandeurs suivantes : 1° BAE $=$ ABC $= 97°56'47''$; 2° ABD $=$ BCD $= 114°\ 33'13''$; 3° CDE $= 115°$.

Pour calculer les rayons des sphères de rayons R', R'', nous avons dans le pentagone considéré jusqu'à présent une propriété géométrique qui va nous y conduire. Le triangle DCE, partie du plan de ce polygone, est inscriptible dans un petit cercle qui fait à son tour partie de la sphère de rayon R', et si du sommet S on abaisse une perpendiculaire sur le plan de ce triangle, nous aurons dans le pied p de cette perpendiculaire le centre même du cercle circonscrit à ce triangle. Soit h la perpendiculaire (*fig.* 8), et $pE = r$, nous aurons :

Fig. 20.



1° $r^2 = c^2 - h^2$, ou bien $h^2 = c^2 - r^2$; et l'on sait que

$r = \frac{cde}{4S}$ (c,d,e étant les trois côtés du triangle et S sa surface);

d'ailleurs la surface $= \frac{y.dq}{2}$, et

$$\overline{dq}^2 = c^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{4c^2 - y^2}{4}; \text{ donc } r^2 = \frac{c^4}{4c^2 - y^2}.$$

2° Le sommet S peut être considéré comme l'extrémité du diamètre de la sphère de rayon R'; par suite, on a

$$c^2 = 2R'h, \text{ d'où } R' = \frac{c^2}{2h} = \frac{c^2}{4}\frac{(4c^2 - y^2)}{3c^2 - y^2}.$$

Cela posé, R'' se lie à R' par la relation

$$R'^2 = R''^2 + \frac{c^2}{4}, \text{ d'où l'on tire } R''^2 = R'^2 - \frac{c^2}{4};$$

et, substituant, on a

$$R''^2 = \frac{c^4}{4(3c^2 - y^2)} = \frac{c^2}{4(2c - x)}.$$

Or x est connu; nous aurons donc en supprimant tout détail inutile, $R'' = 1{,}256c$, $R' = 1{,}352c$.

Il nous reste, pour avoir tous les éléments du calcul relatif à ce corps, à obtenir la grandeur des perpendiculaires menées du centre commun des sphères de rayon R' et R'' sur les faces triangulaires et carrées.

Soient (*fig.* 6) deux faces adjacentes, ainsi que les perpendiculaires *ot*, *oc*, puis traçons le quadrilatère *otic*, et menons les droites $oA = R'$, $oI = R''$. Connaissant en outre les longueurs *it*, *ic*, il sera facile de calculer $ot = \sqrt{R''^2 - tk^2}$ et $\overline{oc}^2 = \sqrt{R'^2 - ck^2}$. Tout aussi bien pouvons-nous employer à cet effet $oA = R'$; par les relations $\overline{ot}^2 = R''^2 - \overline{oa}^2$ et $\overline{oc}^2 = R'^2 - \overline{ca}^2$, on obtiendra $ot = 1{,}228.c$, et $oc = 1{,}1524\ c$ (*fig.* 5).

La différence $ot - oc = 0{,}0702\,c$ exprime le rapprochement du carré au centre de la sphère par rapport au triangle.

Surface et volume du solide. La surface se compose de 6 carrés et de 32 triangles; ce sera donc $6c^2 + 8c^2\sqrt{3} = 19{,}8564064\,c^2$,

d'où l'on tire en fonction de R' ou de R'',

$$s' = 10{,}861653\, R'^2 = 12{,}578355\, R''^2.$$

Le volume comprend 6 pyramides à base carrée et 32 pyramides à base triangulaire; on aura donc

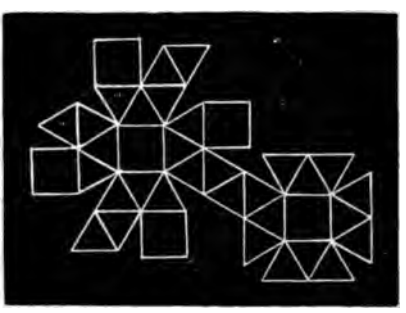
$$v' = 5{,}32270512\, c^3 = 3{,}142839\, R'^3 = 3{,}918940\, R''^3.$$

Les sphères de rayon R', R'' étant calculées, on aura les rapports de la surface et du volume du polyèdre à la surface et au volume de ces sphères,

$$\frac{s'}{s_{R'}} = 0{,}86427\,, \quad \frac{s'}{s_{R''}} = 1{,}000874,$$

$$\frac{v'}{v_{R'}} = 0{,}750297\,, \quad \frac{v'}{v_{R''}} = 0{,}935592.$$

Fig. 21.



Dixième solide. — *Ennéécontadièdre* (*icosaèdre tronqué* de Képler), à 92 *faces*, 80 *triangles et* 12 *pentagones*.

C'est le solide qui s'approche le plus du précédent; car on le forme de triangles et de pentagones disposés autour de chaque angle solide dans les mêmes conditions; chaque carré a ses quatre angles entourés de quatre triangles équilatéraux. Ici, c'est le pentagone qui prend la place du carré, et chaque angle du pentagone se combine avec les quatre angles de triangle équilatéral; le pentagone élémentaire a donc 15 triangles équilatéraux, et le pentagone qui lui est opposé en a tout autant, total 30. Entre les deux bases, plaçons deux bandes formées de 5 pentagones chacune, que réu-

nissent ou séparent 25 triangles, et l'on aura la figure dont il est question. Fig. 22.

Il nous reste à en démontrer la possibilité par une construction directe ou indirecte; celle-ci, la moins rationnelle, étant la plus facile, puis nous conduisant aux valeurs des éléments de la figure, nous l'emploierons en premier lieu.

Remarquons d'abord que les 4 angles des triangles équilatéraux valent 240°, que l'angle du pentagone en vaut 108; par suite, les cinq feront 348°, première condition réalisable : cet angle quintuple est donc possible. En outre, le pentagone ABCDE, sur lequel s'appuie l'angle quintuple, est un polygone plan inscriptible dans un cercle. En effet, prenant les triangles adjacents BSC, CSD, et considérant en même temps le triangle BCD inscrit dans un cercle de rayon OB = OC = OD, il faut que SO soit une perpendiculaire sur le plan BCD, à cause des trois obliques égales et également éloignées de O. De plus, les triangles contigus, l'un ASB, l'autre DSE, ayant la même inclinaison sur leurs adjacents ASE, CSD, et présentant des arêtes égales, il est évident que BA vient se poser sur le plan BCD, comme DE, et dès lors les obliques égales SA, SB d'un côté, SE, SD de l'autre, iront se placer sur la circonférence, puisque leurs extrémités A, E seront à pareille distance de O que B, C ou D. Dès lors mettant aux 5 sommets d'un pentagone régulier 4 triangles assemblés comme ils le sont en S, nous formons le polyèdre inachevé dont nous avons parlé, comprenant 15 triangles et 1 pentagone; le reste, ainsi que nous l'avons indiqué.

De plus, on voit que le pentagone ABCDE sur lequel s'appuie l'angle quintuple est inscriptible dans un cercle dont il est aisé de calculer le rayon. En effet, considérant en particulier le triangle BCD inscrit dans un cercle de rayon BO, il faudra bien que la perpendiculaire abaissée de S sur le plan de ce triangle tombe sur O, puisque S et O se trouvent en même temps à égale distance des trois points B, C, D; les triangles SAB, SDE ayant sur leurs adjacents SBC, SCD des inclinaisons égales, et surtout égales à celle des plans SCB, SCD, il faut bien que DE tombe sur le même plan que BCD,

ainsi que BD. Concluons que le pentagone, bien qu'irrégulier, se trouve sur un même plan et est inscrit dans le cercle qui passe par les points B, C, D. La suite de la construction amènera, comme dans le cas précédent, 4 triangles équilatéraux autour de chaque angle du pentagone, en tout 15; et les nouveaux angles solides introduits par cette construction, bien qu'inachevés, pourront se compléter à l'aide d'un pentagone par sommet, combiné avec un ou deux triangles, selon que le sommet considéré aura trois ou deux angles de triangle équilatéral.

Fig. 23.

Ainsi, en A, il y a déjà 3 angles; il suffira donc de deux faces nouvelles; en B, où il n'y a que deux angles, il faudra trois faces nouvelles, ce qui amène autour de la série des 15 triangles, alternativement 2 et 3 angles de triangles avec un seul angle de pentagone. Comme il y a d'ailleurs 10 sommets, il semble donc que ces nouveaux angles polyèdres devraient comprendre 28 faces; mais on doit remarquer que chaque nouveau pentagone sert à deux sommets consécutifs; voilà déjà 10 faces réduites à 5. En outre, les triangles supplémentaires se réduisent également de 15 à 10. Il y aura donc en totalité 15 faces de plus; mais à ces 15 faces il faut ajouter 15 triangles formés par trois des côtés des nouveaux pentagones libres : ce sera donc en tout 30 faces à joindre aux 16 premières, totalité 46. C'est la moitié de notre solide; de sorte qu'une seconde moitié pareille à la première terminera le solide en s'adaptant à la première par leurs angles respectivement incomplets.

On peut donc considérer le corps comme formé de deux calottes à 16 faces, opposées et symétriques l'une de l'autre quant à la position de leurs faces, puis d'une double zône ou ceinture de 30 faces, dont 5 pentagones et 25 triangles constituant la zône, en tout 30, séparant nos deux calottes polyédriques.

Calcul relatif au polygone semi-régulier ABCDE. — En supposant $SA = SB = SC = SD = SE = c$, $AD = BE = x$, et $BD = AC = y$, nous avons, en considérant les deux quadrilatères ABCD, ABDE, tous les deux inscriptibles,

$$(1) \qquad y^2 = c^2 + cx, \text{ d'où } x = \frac{y^2 - c^2}{c},$$

(2) $x^2 = c^2 + \frac{c(1+\sqrt{5})}{2} y$, d'où $y = \frac{2(x^2-c^2)}{c(1+\sqrt{5})}$.

Nous en tirons les deux équations à une inconnue

$$x^4 - 2c^2x^2 - c^2x\,\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{c^4(1+\sqrt{5})}{2},$$

$$y^4 - 2c^2y = \frac{c^3(1+\sqrt{5})}{2}.$$

La dernière, plus simple, devient pour $y = cy'$,

$$y'^4 - 2y' = 1{,}618034,$$

d'où l'on déduit la valeur de $y = 1{,}71556\,c$, et par suite celle de $x = 1{,}943146$.

Ces valeurs obtenues, on peut aisément déterminer la grandeur des angles du pentagone : 1° par le triangle BCD, ou mieux par le triangle BCI, on a l'angle DCI, ou $\frac{1}{2}$ angle BCD, 59° 4′ 6″ ; par suite BCD = 118° 8′ 12″ ; 2° par le triangle ABE dont les trois côtés sont connus, on obtient A = 92° 47′ 42″, ce qui donne pour les 3 angles en B, C, D la valeur unique calculée de 118° 8′ 12″, et pour les 2 angles en A, E, la valeur 92° 47′ 42″ les cinq valant 540°.

$$\begin{array}{r} 118°\ 8'\ 12'' \times 3 = 354°\ 24'\ 36'' \\ 92°\ 47'\ 42'' \times 2 = 185°\ 35'\ 24'' \\ \hline 540°. \end{array}$$

Le rayon du cercle circonscrit au pentagone sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle OCH construit sur CH = $\frac{1}{2}$ BC et avec la bissectrice de l'angle C. Soit OC = r ; nous aurons, en effet,

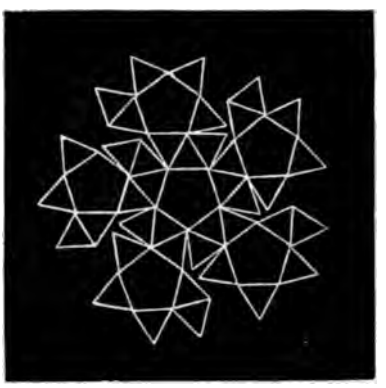
$$r = \frac{\text{CH}}{\cos\frac{1}{2}\text{BCD}} = \frac{c}{2\cos 59°\,4'\,6''}, \text{ d'où l'on tire } r = 0{,}97274\,c.$$

La hauteur SO de la pyramide pentagonale, que nous nommerons h, est le côté d'un triangle rectangle SOB, dont on connaît l'hypoténuse SB = c, et le rayon r = OB que nous venons de calculer ; on aura donc $h^2 = 0{,}05377690\,c^2$, d'où $h = 0{,}23189\,c$.

Par des moyens analogues à ceux déjà employés, on obtiendra R', R'', les longueurs des perpendiculaires qui sont abaissées du cen-

tre commun des deux sphères sur les deux ordres de faces, enfin les surfaces et les volumes du corps en fonction de c, R' ou R^*.

Fig. 21.



2e Groupe des corps solides.

Combinaisons ternaires.

Onzième solide. — *Premier solide à trois sortes de faces; le cuboctaèdre tronqué de Képler, autrement dit l'icosihexaèdre, formé de* 12 *carrés,* 6 *octogones et* 8 *hexagones, coupe faite dans l'octaèdre.*

Construction. — Première coupe faite dans l'octaèdre par des plans qui détachent de chaque sommet 6 pyramides quadrangulaires; l'angle solide est remplacé par un carré, et le triangle lui-même est réduit à un hexagone, régulier ou non, tant que la section n'atteint pas le milieu de l'arête; la partie à détacher de cette arête, nous la déterminerons plus tard. Passons à une seconde coupe sur les trois côtés introduits sur chaque face et parallèlement à l'arête primitive conservée dans la première construction; elle va transformer les carrés en octogones réguliers et les hexagones irréguliers en hexagones réguliers; les 12 arêtes du premier solide seront remplacées par autant de carrés avec une même arête pour ces trois ordres de faces carrées, hexagonales et octogonales. Admettons un instant que le solide ainsi décrit soit réalisable et même exécuté, comme d'ailleurs nous le montrerons bientôt: nous aurons un solide à 26 faces comprenant 48 angles triples, à 3 angles plans égaux de 90°, 120°, 135°; 72 arêtes et trois sortes d'inclinaisons ou angles dièdres :

1° L'angle du carré et de l'hexagone sera de 144° 44′ 8″,

2° L'angle du carré et de l'octogone, 135°,

3° Enfin l'angle de l'hexagone et de l'octogone, 128° 15′ 52″.

Le corps est inscriptible dans une sphère de même centre que la sphère circonscrite à l'octaèdre primitif, mais non circonscriptible.

Fig. 25.

Examinons maintenant les conditions que nous avons à remplir dans les hypothèses précédentes. Pour que notre polyèdre soit semi-régulier, 1° il faut que $a'b' = a'd' = a'g'$; posant $AB = t$ et $ab = t'$, enfin $a'b' = c$, nous avons d'abord $t = R\sqrt{2}$, d'où $t^2 = 2R^2$ et $t^2 = 2R^2\sqrt{2}$, d'où l'on tire $R = \frac{t\sqrt{2}}{2}$, $R^2 = \frac{t^2}{2}$ et $R^3 = \frac{t^3\sqrt{2}}{4}$. Posant $aa' = bb' = x$, on aura $t' = c + 2x$; d'ailleurs $a'g' = aa'\sqrt{2}$, comme diagonale du carré fait sur aa', par suite $x\sqrt{2}$; puis $c = t' - 2x = t' - t'\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = t'\sqrt{2} - t' = t'(\sqrt{2}-1)$.

2° On aura également ab ou t partagé de manière que $a'b'$ serve d'arête commune à l'hexagone régulier, au carré et à l'octogone régulier; or, $a'b'$ étant égal à $a'd' = aa' + af = aa' + ae$, d'où $c = x + ae$, et $ae = c - x = x(\sqrt{2}-1) = \frac{t'\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$; d'ailleurs, $fg = 3a'b' = 3t'(\sqrt{2}-1)$, et comme $AC - 2Ca$, $= ae$, nous en conclurons $t - 2t' = \frac{t'\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)^2$, d'où $t = \frac{3t'\sqrt{2}}{2}$, et $t' = \frac{t\sqrt{2}}{3}$.

3° Exprimons maintenant x ou $a'b'$ en fonction de t ou de R, ce qui ne présente aucune difficulté, et nous poserons sans autre détail les expressions suivantes :

1° $x = \frac{t'\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1) = \frac{t}{3}(\sqrt{2}-1) = \frac{R\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1)$, d'où pour $R = 1$, $x = 0{,}1952515$.

2° $ab = t' = \frac{t\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}R$.

3° $a'b' = c = t'(\sqrt{2}-1) = \frac{t\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1) = \frac{2R}{3}(\sqrt{2}-1)$
$= 0{,}2761424\,R.$

On peut ajouter à ces valeurs celles-ci, qu'il est bon de noter :

$$4°\ ae = t - 2t' = \frac{t\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1) = \frac{t}{3}(\sqrt{2}-1)^2$$
$$= \frac{R\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1)^2 = 0{,}0808802.$$

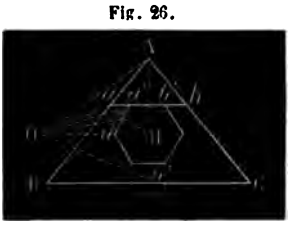
5° H (hauteur du triangle ABC) $= \frac{1}{2}\,t\sqrt{3} = \frac{1}{2}R\sqrt{6} = 1{,}2247448.$

6° h (hauteur du petit triangle abc) $= \frac{t\sqrt{6}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773503.$

Calculs relatifs aux sphères de rayon R′ ou R″.

La condition imposée à la première coupe étant remplie, puisque ab ou ac est une fonction très simple de t, savoir, $t\,\frac{\sqrt{2}}{3}$, on en conclut que le solide est réalisable et facile à exécuter. En outre, nous voyons que la section dont il s'agit met le plan suivant ab entre le tiers et la moitié de l'arête AB, quoique plus près de son milieu; on a, en effet, $aA = 0{,}4714045\,t$. Dès lors, nous pourrons continuer nos évaluations selon la méthode suivie jusqu'à présent. Soit donc $OA = R$, $oa = R'$, $Om = R''$. Nous aurons successivement

Fig. 26.



$$Ha = a'b' = \frac{2}{3}R(\sqrt{2}-1),$$

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{4}{9}H^2 = R^2 - \frac{2}{3}R^2 = \frac{R^2}{3},$$

par suite $\qquad Oa'^2 = R'^2 = \frac{R^2}{9}(15 - 8\sqrt{2}),$

d'où $R' = \frac{R}{3}\sqrt{15 - 8\sqrt{2}}$, comme $R = \frac{3R'}{\sqrt{15-8\sqrt{2}}}$.

Remontons à la valeur de c : on obtient

$$c = 2R' \sqrt{\frac{13-6\sqrt{2}}{97}} = 0{,}43147\,R'$$

et

$$R' = \frac{c}{2}\sqrt{13+6\sqrt{2}} = 2{,}3176448\,c.$$

Pour R'', on a, dans le triangle OmH,

$$R''^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}R^2(\sqrt{2}-1) = \frac{2}{3}R^2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1),$$

et par conséquent

$$c = R'\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{3}} = 0{,}441884\,R',$$

comme

$$R' = c\sqrt{\frac{3(2+\sqrt{2}}{2}} = 2{,}263037\,c.$$

Nota. Puisqu'on a trouvé $ab = \frac{2}{3}R$ et $a'b' = \frac{2}{3}R(\sqrt{2}-1)$, il s'ensuit que

$$\frac{a'b'}{ab} = \sqrt{2}-1 = 0{,}4146132,$$

et que

$$\frac{ab}{b'a'} = 1+\sqrt{2} = 2{,}4142136;$$

Ainsi ab est un peu plus que le double de $a'b'$ ou de c.

$$\frac{AB}{ab} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2{,}1213203.$$

A son tour AB est un peu plus que le double de ab; nous en tirons également

$$\frac{AB}{a'b'} = \frac{3}{2}(2+\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}+3 = 5{,}1213203,$$

c'est à dire que AB vaut un peu plus que cinq fois $a'b'$.

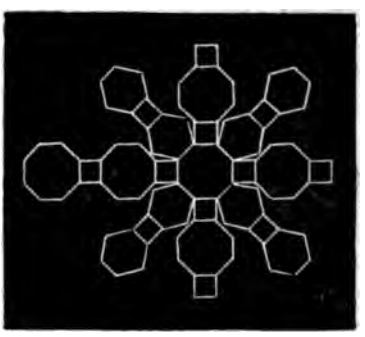
Mentionnons encore en passant les expressions de la surface, comparée à celle de l'octaèdre primitif et du volume également :

$$\text{Surface oct.} = 2c^2\sqrt{3} = s;\quad \text{volume } id. = c^3\frac{\sqrt{2}}{3} = v.$$

On trouve $s' = 2s(3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) = 17{,}82718.\ s$;

$v' = 3v(14 + 11\sqrt{2}) = 88{,}669.\ v$.

Fig. 27.



Douzième solide. — *Icosidodécaèdre tronqué* (Troisième de Képler).

Une première coupe dans l'icosaèdre détache des pyramides pentagonales, en déterminant sur les triangles ainsi divisés des hexagones irréguliers au nombre de 20, tels que $abcdef$; une seconde coupe faite suivant des parallèles aux arêtes dont le nombre est de 30, autant de carrés égaux, et régularise nos hexagones de manière que nous obtenons un corps qui comprend 12 décagones, 20 hexagones et 30 carrés : rien ne s'oppose à ce que les coupes remplissent les conditions que nous venons d'indiquer.

Fig 28.

Admettons pour le moment que le solide ainsi décrit soit réalisable, et que nous en ayons exécuté la construction, nous aurons un corps de 62 faces semi-régulier inscriptible, qui présente 120 angles solides triples de 90°, 120° et 144° (total 354°), 180 arêtes et trois sortes d'angles dièdres.

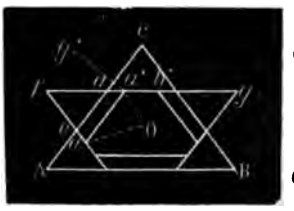
1° L'angle d'un carré et d'un hexagone.... 159° 5′ 41″;
2° L'angle d'un carré et d'un décagone..... 148° 16′ 57″;
3° L'angle d'un hexagone et d'un décagone. 142° 37′ 21″.

Examinons maintenant les conditions imposées par les deux coupes : soit $AB = i$, $ab = c$, $a'b' = c'$, et posons $aa' = bb' = x$; nous avons

1° $a'b' = c - 2x = a'd' = a'f = x + af = x + ae = x + i - 2c$,

d'où $$x = c - \frac{i}{3};$$

Fig. 29.



d'ailleurs $a'g' = aa'\sqrt{2} = a'd' = a'b'$, donc $c' = x\sqrt{2} = c - 2x$, d'où $x = \frac{c\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$: puis $c' = c\sqrt{2}-1$, et $i = 3c - 3x = 3(c-x) = \frac{3c\sqrt{2}}{2}$, d'où $c = i\sqrt{2}$.

Ainsi $c = i\frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}4714045\,i$, et puisque $ab = ac$, concluons qu'on n'a pas pris la moitié de l'arête; d'ailleurs

$$c' = c(\sqrt{2}-1) = \frac{i\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1) = 0{,}1952621\,i.$$

C'est le côté du nouvel hexagone régulier, un peu supérieur au tiers de ab, conditions réalisées toutes les deux sans la moindre difficulté.

Fig. 30.

2° Les valeurs précédentes nous serviront à placer nos hexagones de la première ou de la seconde coupe à côté ab ou $a'b'$; il nous reste à évaluer c et c' en fonction de rayon R, R', R''. Posons $os = R$, $oa' = k$, $oi = R''$, $oo' = h$, $SI = H$: nous avons d'abord o', pied de la perpendiculaire OO', centre du cercle inscrit ou circonscrit au triangle ABS et à l'hexagone régulier. En effet, $\frac{SI}{H} = \frac{ab}{AB}$, ou bien $\frac{SI}{\frac{1}{2}i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{2}}{3i}$, d'où $SI = \frac{i\sqrt{6}}{6}$, ce qui est bien la valeur convenable de SI; car, admettant IO' pour le rayon du cercle inscrit à l'hexagone de côté $a'b'$, on a $IO' = \frac{a'b'\sqrt{3}}{2}$ $= \frac{i\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2-1})$, d'où $SO' = SI + IO' = \frac{i\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2-1}) = i\frac{\sqrt{3}}{3}$, qui est bien la valeur de SO', considéré dans le triangle primitif

SAB comme joignant S avec le centre du cercle circonscrit.

3° Nous obtiendrons, par des calculs analogues,

$$OO'' = h^2 = \frac{i^2}{24}(7+3\sqrt{5})$$

$$R''^2 = \frac{i^2}{72}(9\sqrt{5}+69-32\sqrt{2}) = 0{,}6093024\, i^2.$$

$$c'^2 = \frac{2}{9}i^2(3-2\sqrt{2}) = \frac{4}{45}R^2(5-\sqrt{5})(3-2\sqrt{2}).$$

sachant que

$$i^2 = \frac{2R^2}{5}(5-\sqrt{5}).$$

$$R''^2 = \frac{i^2}{6}\left(3-2\sqrt{2}+\frac{7+3\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{i^2}{24}(19+3\sqrt{5}-8\sqrt{2}),$$

d'où $$R''^2 = 0{,}59774\, i^2.$$

4° Les longueurs des perpendiculaires abaissées du centre commun des sphères de rayon R', R'' étant désignées par p, p', p'' (p sur le carré, p' sur l'hexagone, p'' sur le décagone), nous avons

$$p^2 = R''^2 - \frac{c'^2}{4} = 15{,}5121\, c'^2, \text{ d'où } p = 3{,}938\, c';$$

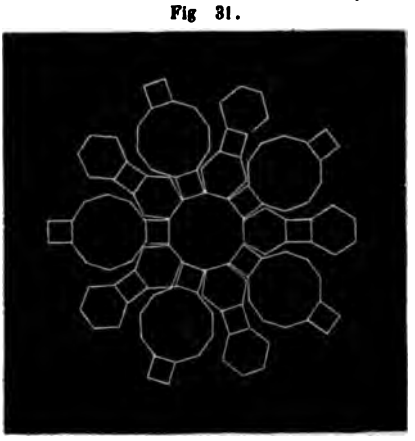
$$p'^2 = \frac{i^2}{24}(7+3\sqrt{5}) = \frac{9c'^2(\sqrt{2}+1)^2}{48}(7+3\sqrt{5})$$

$$= \frac{3c'^2}{16}(3+2\sqrt{2})(7+3\sqrt{5}) = 14{,}949968\, c'^2.$$

$$\text{d'où } p' = 8{,}866\, c'$$

$$p''^2 = 13{,}389866\, c'^2, \text{ d'où } p'' = 3{,}659\, c'.$$

Fig 31.



Treizième solide (le onzième de Képler), *à 62 faces comme le précédent, que Képler nomme hexacontadièdre.*

Ce solide a la plus grande analogie avec le précédent et contient comme lui 62 faces, dont 30 carrés, 12 pentagones et 20 triangles. Les décagones du douzième solide sont remplacés par autant de pentagones, et les 20 hexagones sont remplacés par 20 triangles.

Les angles solides sont quadruples et formés de 2 angles de carrés, d'un angle de triangle et d'un angle de pentagone, en tout $90° + 90° + 60° + 108° = 348°$; il a 60 sommets, 120 arêtes, 62 faces; il est coupé sur l'icosaèdre et présente les inclinaisons suivantes :

Angle du triangle et du carré = 159° 5′ 41″,
Angle du triangle et du pentagone = 148° 37′ 21″,
Angle du carré et du pentagone = 148° 16′ 57″.

Les valeurs précédentes sont les mêmes que dans le solide que nous venons de décrire, et ne devaient pas en différer, puisque les coupes sont faites dans le même polyèdre régulier par des plans parallèles à ceux que nous avions tracés. Il est impossible que l'analogie soit plus complète : même nombre de faces, pareil nombre de carrés, angles de polyèdres égaux, identité d'angles dièdres. Nous aurons par conséquent bien peu de chose à dire sur ce solide; il nous suffira d'établir les conditions qui rendent possible la construction des deux formes données par nos deux sections.

Fig. 32.

1° Pour que ab, cd remplissent les conditions prescrites, il faut qu'on ait, en posant $ab = p$, $cd = p'$,

$$ac = c - 2p, \quad cd = p' = cg = ac + ag = ac + ae,$$

d'où

$$\frac{1}{2}p + ae = p',$$

et par suite

$$2p' = c - 3p.$$

Une relation connue entre p et p' donne

$$p = p'\,(\sqrt{5} - 1)\ (1),$$

on aura

$$c = \frac{2p + 3p'}{2} = \frac{p'}{2}\,(3\sqrt{5} - 1) = p\,\frac{7 + \sqrt{5}}{4} = 2{,}309016\,p\,;$$

puis

$$p' = \frac{2c}{3\sqrt{5} - 1} = \frac{c}{22}\,(3\sqrt{5} + 1), \text{ et } p = \frac{4c}{7 + \sqrt{5}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{11}\,c\,,$$

d'où l'on tire

---

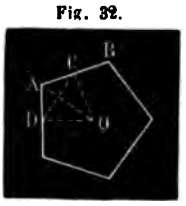
(1) Si $ab = p$, $cd = p'$, l'un et l'autre appartenant à des pentagones réguliers, le second inscrit dans le premier, posant $AO = r$ et $CO = r'$, on sait que

$$p = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,, \text{ d'où } p^2 = \frac{r^2}{2}(5 - \sqrt{5})$$

et

$$r = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}\,;$$

Fig. 32.



par conséquent

$$r^2 = p^2\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\,.$$

On a pareillement

$$p' = \frac{r'}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,;$$

d'ailleurs

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}\,, \quad \text{d'où} \quad p' = \frac{pr'}{r}\,, \quad p'^2 = \frac{p^2 r'^2}{r^2}\,.$$

Remarquant que

$$r'^2 = r^2 - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}\,\frac{5 + \sqrt{5}}{5}\,, \quad \frac{p^2}{r^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\,,$$

nous en déduirons

$$p'^2 = \frac{p^2}{8}(3 + \sqrt{5})\,, \text{ d'où } p' = \frac{p}{4}(1 + \sqrt{5})\,, \quad p = p'\,(\sqrt{5} - 1).$$

On en conclut encore

$$r'^2 = \frac{p^2}{20}\,(5 + 2\sqrt{5}) = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\,p'^2, \text{ d'où } r' = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\,.$$

$$= c^2 \frac{23 + 3\sqrt{5}}{242} = \frac{4}{121} R^2 \frac{25 - 2\sqrt{5}}{5};$$

$$p'^2 = 2c^2 \frac{17 - 7\sqrt{5}}{121} = \frac{8}{121} R^2 \frac{85 - 3\sqrt{5}}{5}.$$

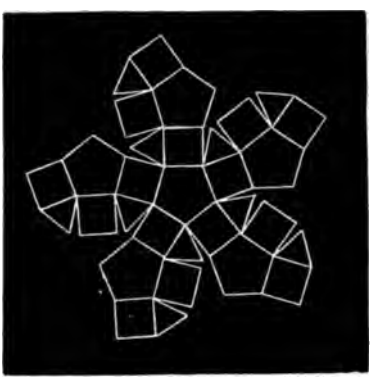
La première valeur de $p = \frac{7-\sqrt{5}}{11} c$ donne $0{,}433084\, c$.

Ainsi ab n'est pas la moitié de AB; il en surpasse les $\frac{2}{5}$.

La seconde valeur, celle de $p' = c\frac{3\sqrt{5}+1}{22}$, donne $0{,}350373\, c$; de sorte que cd est entre le tiers et le quart de AB, et environ les $\frac{4}{5}$ de ab.

L'hexagone irrégulier qui résulte de la première coupe existe donc, et dès lors les deux conditions que nous avons imposées à nos plans de section seront exactement remplies.

Fig. 33.



En continuant la recherche des éléments du solide, on exprimera p, p' en fonction de R, R' ou R'', et l'on calculera sans peine les longueurs respectives des hauteurs h_c, h_t, h_p des pyramides construites sur les trois ordres de faces avec le centre des sphères pour sommet.

$p^2 = 0{,}20735728\, R^2$, $p'^2 = 0{,}13571856\, R^2$,

$h_c = 0{,}78029 R$, $h_t = 0{,}79465\, R$, $h_p^2 = 0{,}57850695\, R^2$,

d'où $h_p = 0{,}7606\, R$.

NOTE

SUR LA

CHALEUR SPÉCIFIQUE DE LA FARINE DE FROMENT

PAR M. ABRIA

Je communique à la Société les résultats de quelques expériences que j'ai faites, à l'invitation de nos deux collègues MM. Dupuy et de Lacolonge, dans le but de déterminer la valeur de la chaleur spécifique de la farine de froment. Cette capacité calorifique, qu'il peut être utile de connaître dans un certain nombre de circonstances, n'a pas, à ma connaissance, été mesurée. Je n'en ai trouvé du moins aucune trace dans les recherches que j'ai faites sur ce point, surtout dans les annales de chimie et de physique.

Je me suis servi, pour cette détermination, de l'appareil de M. Regnault. La farine avait été desséchée dans l'étuve à air chaud pendant plusieurs jours, puis renfermée dans un vase en ferblanc de dimensions convenables, lequel avait été soudé immédiatement après. Ce vase portait une ouverture centrale dans laquelle était logé le thermomètre de l'étuve à vapeur. La farine est restée chaque fois dans celle-ci un intervalle de temps suffisant (deux à trois heures) pour qu'on pût être bien certain qu'elle en avait la température.

Les expériences ne présentent aucune difficulté, mais elles sont fort longues. L'équilibre de température, entre le corps chaud et le vase calorimétrique, ne s'établit que fort lentement à cause de la faible conductibilité de la farine; il résulte de là une correction nécessairement un peu incertaine. Néanmoins, les valeurs obtenues sont assez concordantes, et donnent 0,268 pour la chaleur spécifique cherchée.

Données des expériences :

Poids de la farine..... 97ᵍ00
— du vase en ferblanc..... 65,8 en eau... 7ᵍ24
— de l'eau du vase calorimétrique.... 1000,0
— du vase calorimétrique (cuivre).... 230,9 en eau... 21,94

Abaissement de température du vase calorimétrique pour 1 degré d'excès dans une minute : 0°016.

Numéros des expérien-ces.	Températ° de l'étuve à vapeur.	Températ° du vase calorimétri-que.	Variation observée.	Temp° de l'air.	Correction calculée.	Durée de l'expé-rience.	Températ° finale du calorimètre.	Chaleur spécifique.
I	99° 02	22° 67	2° 78	25° 7	— 0,38	21ᵐ	25° 07	0,2673
II	99° 02	23° 58	2° 78	26° 6	— 0,41	23ᵐ	25° 95	0,2671
III	97° 54	23° 80	2° 36	25° 7	— 0,03	16ᵐ	26° 13	0,2693
							Moyenne des trois expériences :	0,268

SUR LES

FAITS QUI SERVENT DE BASE A LA GÉOMÉTRIE

PAR M. HELMHOLTZ.

Extrait des *Actes de la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de Heidelberg*, tome IV, p. 197.

Traduit de l'allemand par J. HOÜEL (1).

Mes recherches sur la manière dont s'opère la localisation dans le champ visuel m'ont conduit à réfléchir sur les origines de la considération générale de l'espace. Il se présente ici une première question, dont la réponse ne peut être donnée que par les Sciences exactes : c'est de distinguer quelles sont, parmi les propositions de la Géométrie, celles qui expriment des vérités de fait, et celles, au contraire, qui sont de simples définitions, ou des conséquences des définitions et des expressions que l'on a choisies pour les énoncer. Cette recherche est complètement indépendante de la question ultérieure de l'origine de notre connaissance des propositions qui expriment des faits. La première question n'est donc pas aussi facile à résoudre qu'on le croit communément, parce que les figures de la Géométrie sont des idéaux, dont les figures matérielles du monde réel ne peuvent jamais qu'approcher, sans satisfaire pleine-

---

(1) La question de l'origine des idées géométriques étant une de celles qui préoccupent le plus en ce moment les savants des pays voisins, nous avons cru faire chose utile en contribuant à faire connaître les idées de l'illustre physicien de Heidelberg. Nous profitons de quelques changements indiqués par l'Auteur depuis la publication de son Mémoire, et modifiant certains points des conclusions du travail primitif. *(Note du Trad.)*.

ment aux exigences de l'idée, et parce qu'aussi, pour vérifier expérimentalement l'invariabilité de la forme des corps et l'exactitude des figures du plan et de la ligne droite que nous rencontrons dans les corps solides, il nous faut employer précisément les propositions géométriques elles-mêmes, dont il s'agit d'établir une sorte de démonstration expérimentale.

D'un autre côté, on peut se convaincre, avec un peu de réflexion, comme le montrera la suite de cette Note, que la série des axiômes géométriques, que l'on pose habituellement dans la Géométrie élémentaire, est insuffisante, et qu'en réalité on suppose encore tacitement une suite de plusieurs autres faits. On a bien cherché, dans des Traités récents, à compléter les axiômes d'Euclide; mais on manquait d'un principe qui pût faire reconnaître si la lacune était comblée. Comme nous ne pouvons nous représenter clairement que des relations d'étendue telles qu'il est possible d'en figurer dans l'espace réel, cette clarté d'intuition nous jette facilement dans l'illusion de regarder comme une chose évidente par elle-même ce qui est véritablement une propriété particulière, et sans évidence intrinsèque, du monde extérieur en présence duquel nous vivons.

On surmonte cette difficulté à l'aide de la Géométrie analytique, dont les calculs reposent sur de pures idées de grandeur, et qui n'emploie dans ses démonstrations aucune intuition visuelle. On pourrait donc, pour décider la question qui nous occupe, la ramener à la recherche de celles des propriétés analytiques de l'espace et des grandeurs étendues, que l'on a dû admettre au commencement de la Géométrie analytique, comme base de ses propositions.

J'avais entrepris cet examen, et j'étais déjà parvenu aux principaux résultats, lorsqu'a paru la Leçon d'habilitation de Riemann *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie,* dans laquelle le même sujet est étudié à un point de vue qui ne diffère pas essentiellement du mien. J'ai appris à cette occasion que Gauss s'était aussi occupé de cette même question, et que son célèbre Mémoire sur la courbure des surfaces formait une partie de ces recherches, la seule qu'il ait publiée.

Riemann commence par expliquer comment les propriétés générales de l'espace, sa continuité, la multiplicité de ses dimensions peuvent s'exprimer analytiquement, en ramenant la détermination

de chaque unité particulière à la *diversité* (1) qui le constitue, c'est-à-dire de chaque point, à la mesure de n grandeurs (coordonnées), variables d'une manière continue et indépendamment les unes des autres. Lorsque la connaissance de n de ces quantités sera nécessaire, l'espace sera, comme l'appelle Riemann, une *diversité* étendue dans n sens (2), et nous dirons qu'il a n dimensions.

Le système des couleurs forme aussi une *diversité* analogue, triplement étendue.

Or, dans l'espace, tout élément linéaire, quelle que soit sa direction, est comparable à un autre quelconque sous le rapport de la grandeur. Soient u, v, w les mesures de nature quelconque qui déterminent la position d'un point, et $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ celles qui déterminent la position d'un point voisin. La mesure de l'élément linéaire ds, dans notre espace réel, est toujours la racine carrée d'une fonction homogène du second degré des quantités du, dv, dw, quelle que soit la nature des mesures u, v, w. Nous pouvons donner à cette propriété le nom de *théorème de Pythagore généralisé*. Ce théorème forme la base de notre étude; il possède un haut degré de généralité, parce qu'il est entièrement indépendant de l'établissement de tout système particulier de mesure.

Riemann admet cette expression comme hypothèse, en démontrant qu'elle est la forme algébrique la plus simple qui réponde aux conditions du problème. Mais il reconnaît expressément que c'est une hypothèse, et mentionne, comme pouvant être légitime, la supposition que ds soit la racine quatrième d'une fonction homogène du quatrième degré.

La suite des recherches de Riemann devient très claire, lorsqu'on se restreint à deux dimensions. Dans ce cas, il résulte déjà des recherches de Gauss sur la courbure des surfaces, que la forme la plus générale d'un espace à deux dimensions dans lequel a lieu, pour l'élément linéaire, le théorème de Pythagore sous la forme généralisée dont nous venons de parler, est une surface courbe quelconque de notre espace réel, sur laquelle les déterminations

---

(1) *Varietas* (Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum*, Comm. 2da, art. 38, *Werke*, t. II, p. 110). — *Mannigfaltigkeit* (Gauss, *Anzeige zu derselben*, ibid., p. 176, 178).— *(Note du trad.)*

(2) *Eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*

d'étendue se font suivant les règles ordinaires de la Géométrie analytique.

Pour que des figures de grandeur finie soient mobiles dans tous les sens sur une telle surface, sans altération de leurs mesures prises sur la surface même, et pour qu'on puisse les faire tourner autour d'un point quelconque, il faut que la surface ait dans toutes ses parties une mesure de courbure constante. Si cette mesure de courbure est positive, la surface sera une surface sphérique, ou pourra s'appliquer par flexion sans extension sur une surface sphérique. Cette sphère devient un plan, lorsque la mesure de courbure est nulle, ou, lorsqu'elle est négative, une des surfaces que le professeur Beltrami a étudiées sous le nom de surfaces pseudo-sphériques.

Riemann étend maintenant ces propositions à un nombre quelconque de dimensions; il montre dans ce cas comment il faut déterminer la mesure de courbure. La forme la plus générale d'un espace de trois dimensions est, comme il résulte de ses recherches, une figure limitée par trois équations dans un espace à six dimensions.

Après avoir résolu le problème général, il restreint finalement la solution, en ajoutant la condition que les figures finies soient mobiles dans toutes les directions et puissent tourner dans tous les sens, sans altération de forme. Alors, la mesure de courbure d'un tel espace imaginaire doit être constante, et pour que cet espace soit infiniment étendu, il faut que cette mesure de courbure soit égale à zéro. Dans ce dernier cas, cet espace a les mêmes attributs que notre espace réel, et peut recevoir le nom d'*espace plan*, par comparaison avec les espaces imaginaires de dimensions plus élevées.

Mes propres recherches avec leurs résultats sont en grande partie contenues implicitement dans les recherches de Riemann. Sur un seul point, elles ajoutent quelque chose de nouveau; c'est en ce qui concerne l'établissement du théorème de Pythagore généralisé, tel que Riemann l'emploie au début de son travail. La condition que Riemann n'introduit qu'à la fin de son étude, savoir, que les figures possèdent, sans changement de forme, le degré de mobilité que suppose la Géométrie, je l'avais introduite dès le début, et cette condition restreint alors le champ des hypothèses

que l'on peut faire sur l'expression de l'élément linéaire, à ce point que la forme acceptée par Riemann subsiste seule à l'exclusion de toutes les autres.

Mon point de départ était que toute mesure primordiale de l'étendue repose sur la constatation de la coïncidence, et qu'ainsi un système de mesures de l'étendue doit supposer ces conditions, sans lesquelles il ne peut être question de constater la coïncidence.

Les hypothèses admises dans mes recherches sont les suivantes :

1. *Concernant la continuité et les dimensions :* Dans l'espace de n dimensions, le lieu de chaque point peut être déterminé par la mesure de n grandeurs, variables d'une manière continue et indépendamment les unes des autres; de sorte que (en exceptant, lorsqu'il y a lieu, certains points, lignes ou surfaces, ou en général certaines figures de moins de n dimensions), dans chaque mouvement du point, les grandeurs qui servent de coordonnées varient d'une manière continue, et il y en a au moins une parmi elles qui ne reste pas constante.

2. *Concernant l'existence des corps mobiles et solides par eux-mêmes :* Entre les $2n$ coordonnées de chaque couple de points d'un corps solide par lui-même et mis en mouvement, il existe une équation, qui est la même pour tous les couples de points superposables.

Quoiqu'on ne dise rien de plus sur la nature de cette équation, elle est renfermée cependant dans d'étroites limites, parce que, pour m points, il existe $\frac{m(m-1)}{2}$ équations, renfermant mn grandeurs inconnues, parmi lesquelles $\frac{n(n-1)}{2}$ doivent rester variables arbitrairement, en vertu du postulat suivant. Si m est plus grand que $n+1$, il y aura plus d'équations que d'inconnues, et comme toutes ces équations doivent être formées d'une manière identique, on a ainsi une condition qui ne peut être remplie que par des équations de nature particulière.

3. *Concernant la liberté du mouvement :* Tout point peut se transporter d'une manière continue en tout autre point. Seulement, pour les différents points d'un seul et même système solide par lui-même, il existe des restrictions à ces mouvements, qui sont assujettis aux équations qui existent entre les coordonnées des points pris deux à deux.

Des hypothèses 2 et 3, il résulte que, si un système solide de points A peut, dans une certaine position, être amené à coïncider avec un second système B, la même chose peut encore avoir lieu dans toute autre position de A; car, de la même manière que A peut être amené à sa seconde position, B peut aussi y être amené.

4. *Concernant l'indépendance entre la forme des corps solides et leur rotation :* Si un corps se meut de façon que $n-1$ de ses points restent immobiles, et que ceux-ci soient choisis de telle manière que tout autre point du corps ne puisse plus parcourir qu'une ligne, la rotation, étant prolongée, ramène sans retournement le corps à sa position initiale.

Cette dernière proposition, qui, comme le montrent nos recherches, n'est pas contenue implicitement dans les précédentes, correspond à la propriété que, dans les fonctions complexes, on appelle la *monodromie*.

Dès que ces trois conditions seront remplies, on en déduira, par une voie purement analytique, qu'il existe une fonction homogène du second degré des quantités du, dv, dw, qui reste invariable dans la rotation, et qui donne ainsi une mesure de l'élément linéaire indépendante de la direction (1).

Nous sommes ainsi parvenus au point de départ de Riemann, et l'on en conclut ensuite, d'après la méthode même suivie par ce géomètre, que si le nombre des dimensions est fixé à trois, et que l'on exige l'extension infinie de l'espace, aucune autre Géométrie n'est possible que celle qui a été enseignée par Euclide, ou celle de Lobatchefsky, qui, comme Beltrami l'a démontré, se trouve réalisée dans les surfaces pseudo-sphériques.

Le premier postulat, que Riemann aussi a établi, n'est autre chose que la définition analytique de la continuité de l'espace et de la multiplicité de son étendue.

Les postulats 2, 3, 4 doivent évidemment être supposés satisfaits pour qu'il puisse être question de superposition. Ces hypothèses sont donc les conditions de possibilité de la superposition, et quoiqu'elles ne soient pas, la plupart du temps, énoncées explici-

(1) La démonstration mathématique sera donnée prochainement avec développement dans les *Comptes rendus des séances de la Société Royale de Gœttingue.*

tement, elles servent de base aux démonstrations élémentaires de la Géométrie, laquelle fonde toutes ses mesures d'étendue sur la superposition.

Le système de ces postulats ne fait donc aucune supposition que l'on ne fasse aussi dans la Géométrie ordinaire. Au point de vue théorique, il offre l'avantage que, par cela seul qu'il est complet, il est plus facile à contrôler.

Il est à remarquer qu'ici nous avons fait plus clairement ressortir comment il faut supposer aux corps de la nature une solidité d'un caractère déterminé et un degré particulier de mobilité, pour qu'un système de mesures, tel que celui de la Géométrie, puisse présenter une signification réelle. L'indépendance entre la superposition des systèmes solides de points, et le lieu, la position et la rotation relative de ces systèmes est un fait sur lequel est fondée la Géométrie.

Cela devient encore plus manifeste, quand on compare l'espace avec d'autres *diversités* étendues dans plusieurs sens, par exemple, avec le système des couleurs. Tant que nous n'avons pas dans celui-ci d'autre moyen de mesure que celui qui est donné par la loi du mélange, il n'existe pas, comme pour l'espace, de relation de grandeur entre les points pris *deux à deux,* qui puisse être comparée avec la relation qui a lieu entre deux autres points; mais il n'en existe qu'entre des groupes de *trois* points, lesquels doivent, de plus, être situés en ligne droite, c'est à dire, entre des groupes de trois couleurs, dont une peut résulter du mélange des deux autres.

On trouve une autre différence dans le champ visuel de chacun des deux yeux, où aucune rotation n'est possible, tant que nous nous restreignons aux mouvements naturels des yeux. Quels sont les changements particuliers qui en résultent pour les mesures au coup d'œil? C'est ce que j'ai expliqué dans mon *Traité d'Optique physiologique,* ainsi que dans une communication faite à la Société d'Histoire naturelle et de Médecine de Heidelberg, le 5 mars 1865.

Comme toute mesure physique, celle de l'espace doit aussi s'appuyer sur une loi invariable d'uniformité dans les phénomènes naturels.

SUR UNE

FORMULE DE LEIBNIZ

PAR J. HOÜEL.

Dans le numéro de juin 1868 du *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, publié à Rome par M. le prince Boncompagni, on lit un article de M. le professeur Tardy, recteur de l'Université de Gênes, intitulé : *Intorno ad una formola del Leibniz* (1), et contenant l'historique de la découverte de cette formule, et la démonstration de son extension, que l'inventeur avait simplement énoncée.

Cet article a été l'objet d'une Note présentée le 10 janvier dernier à l'Académie des Sciences de Turin par M. Angelo Genocchi. Cette Note discute et complète la partie historique du travail de M. Tardy, et se termine par la reproduction d'une lettre de Lagrange, document précieux et devenu fort rare.

Je vais essayer de donner une idée du contenu de ces deux intéressants Mémoires, qui fixent désormais un point important de l'histoire du calcul infinitésimal.

I.

On trouve dans tous les Traités modernes de Calcul infinitésimal une formule, connue sous le nom de *formule de Leibniz*, qui sert à exprimer une dérivée d'ordre quelconque d'un produit au moyen des dérivées des facteurs. Cette formule présente une

(1) Une traduction de ce Mémoire a paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (numéro de février 1869).

composition tout à fait analogue à celle de la formule de Newton pour le développement d'une puissance d'un binôme. On la trouve indiquée pour la première fois dans une lettre de Leibniz à Jean Bernoulli, en date du $\frac{6}{16}$ mai 1695; mais l'auteur ne l'a publiée que quinze années plus tard, dans une Note insérée au tome I des *Miscellanea Berolinensia*, et ayant pour titre : *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de Lege Homogeneorum transcendentali*. Cette Note a été reproduite, depuis, dans les éditions des Œuvres complètes de Leibniz (1). Pour mieux faire ressortir l'analogie des deux formules, Leibniz représente les puissances par la caractéristique p, de sorte que le développement de la puissance de degré e de $x + y$ prend la forme

$$p^e(x+y) = 1.p^e x.p^0 y + \frac{e}{1}.p^{e-1}x.p^1 y + \frac{e(e-1)}{1.2}.p^{e-2}x.p^2 y + \cdots$$

Il suffit alors de changer, dans le second membre, la caractéristique p en d, pour avoir le développement de $d^e(xy)$ (2).

Leibniz ne crut pas que l'analogie entre les puissances et les différentielles dût s'arrêter au cas des indices entiers et positifs; car, dit-il dans sa lettre du $\frac{6}{16}$ mai, *ubi succedit extractio, succedet et summatio*. Seulement, il ne semble pas encore complètement fixé, à cette date, sur les moyens de parvenir à cette généralisation. Il se demande si l'on ne pourrait pas tirer quelque chose de la comparaison des expressions $(x - y)^m$ et $d^m(x.y^{-1})$.

---

(1) *G. G. Leibnitii Opera omnia*. Édit. L. Dutens. Genève 1768 (t. III, p. 421-425).

Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben von C. I. Gerhardt. Berlin und Halle, 1849-1863 (t. V, p. 377-382).

(2) M. Genocchi mentionne, comme une des extensions les plus remarquables qui aient été données à la formule de Leibniz, la formule suivante de Pfaff (*Disquisitiones analyticæ*, p. 246),

$$d^n(pq) = pd^n q + \frac{n}{1}udp.d^{n-1}\left(\frac{q}{u}\right)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}d(u^2dp.d^{n-2}\left(\frac{q}{u^2}\right) + \ldots + d^{n-1}(u^n dp).\frac{q}{u^n},$$

p, q, u étant trois fonctions quelconques de la variable indépendante.

Cependant, dans un *Post-scriptum* à une lettre datée de Hanovre, le 28 février 1695, il communique à Bernoulli une remarque que lui avait suggérée la considération de la célèbre série publiée par ce dernier dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig pour l'année 1694. Après avoir établi, au moyen de l'intégration par parties, la formule (1)

$$\int z^e d^m n = z^e d^{m-1} n - e z^{e-1} . d^{m-2} n . dz + e(e-1) z^{e-2} d^{m-} n . dz^2 - \cdots$$

il ajoute : *Notandum est posse quidem e esse numerum non integrum, sed m semper integrum esse; nisi quis adinstar metaphysicarum potentiarum (seu logarithmorum) etiam metaphysicas nescio quas differentias (vel summas) fingere vellet.*

Cependant, il interprète le cas où l'indice m serait entier et négatif, en changeant les différentielles d'indices négatifs en intégrales d'indices positifs, en sorte que

$$d^0 n = \int^0 n = n \ , \qquad d^{-1} n = \int n \ , \qquad d^{-2} n = \iint n = \int^2 n \ , \text{ etc...},$$

ce qui met en évidence la relation de réciprocité qui existe entre les différentielles et les intégrales.

Dans sa lettre du $\frac{8}{18}$ juin 1695, Jean Bernoulli revient sur cette analogie des puissances et des différentielles, pour des indices tant positifs que négatifs. Il soupçonne qu'il en pourra résulter une extension de la formule que Leibniz lui a communiquée pour les différentielles d'un produit. En attendant qu'il ait eu le loisir d'examiner cette question, il propose l'emploi d'un nouveau calcul algébrique, appliqué aux seules caractéristiques de la différentiation, et dans lequel on traiterait ces caractéristiques d comme des quantités élevées à diverses puissances, tandis que les lettres qui les accompagnent joueraient le rôle de simples signes distinctifs. D'après cette convention, on aurait, par exemple,

$$\frac{d^2 y}{d^2 y} = d^0 y = y \ , \qquad \frac{d^2 y}{d^2 x} = d^2 y d^{-2} x = d^2 y \int^2 x, \qquad \sqrt[2]{d^2 y} = d^1 y.$$

Bernoulli jette, dans cette lettre, les premiers fondements du calcul

---

(1) Leibniz donna d'abord cette formule avec des erreurs de calcul, que Bernoulli lui fit apercevoir dans sa lettre du mois d'avril suivant.

symbolique des caractéristiques, qui a reçu, depuis, d'importants développements par les travaux de Lagrange, de Cauchy et des géomètres anglais, et dont il entrevoit déjà la fécondité. *Video me hic inter scribendum et quidem ex insperato, incidisse in methodum universalem summandi vel per, vel citra seriem, quantitatem differentialem cujuscumque gradus. Video etiam infinita alia adhucdum abscondita hic latere....* Il corrige ensuite quelques conjectures hasardées de Leibniz sur l'extension dont celui-ci croyait sa formule susceptible.

Un mois plus tard, il donne à Leibniz une application de son calcul symbolique à la démonstration de sa série pour le développement d'une intégrale $\int ndz$. Pour cela, il remarque que l'on a

$$d(ndz) = d^0 n\, d^1 z + dn\, dz.$$

Or, d'après la règle établie dans la lettre précédente, $\int ndz$ doit être une troisième proportionnelle à $d(ndz)$ et à ndz. On a donc

$$\int ndz = \frac{(d^0 n\, dz)^2}{d^0 n\, d^1 z + dn\, dz}.$$

ou, en divisant les deux termes de la fraction par dz, et observant que $(d^0)^2 = d^0$,

$$\int ndz = \frac{d^0 ndz}{d^0 n\, dz + dn\, d^0 z}.$$

Si l'on développe maintenant $(d^0 n\, dz + dn\, d^1 z)^{-1}$ en une série ordonnée suivant les puissances descendantes de dz, il vient

$$\begin{aligned}\int ndz &= d^0 n\, d^0 z - dn\, d^{-1} z + d^1 n\, d^{-2} z - \dots \\ &= nz - dn \int z + d^1 n \int^2 z - \dots \\ &= nz - dn\, \frac{z^1}{1.2.dz} + d^2 n\, \frac{z^2}{1.2.3.dz^2} - \dots,\end{aligned}$$

ce qui est précisément la série connue.

II.

Jusqu'ici il n'a été question que d'indices entiers, positifs ou négatifs. On trouve cependant dans la lettre de Leibniz du $\frac{6}{16}$ mai

une phrase d'où il semble résulter que l'auteur songeait déjà au cas des indices fractionnaires. Après avoir émis sous forme dubitative l'idée d'assimiler les expressions $(x-y)^m$ et $d^m(xy^{-1})$, il ajoute : *Imo videndum, annon in summationibus concipere aliquid liceat respondens radicibus irrationalibus, imo affectis* (1). Leibniz aurait-il voulu établir par là quelque analogie entre les différentielles à indices fractionnaires et les intégrales? Telle n'est pas l'opinion de M. Genocchi, qui attribue à cette phrase un sens plus général et plus profond, en appuyant sa manière de voir sur plusieurs passages des écrits postérieurs de Leibniz. On lira avec intérêt dans la Note originale cette discussion, qui met en lumière la pénétration de l'inventeur du Calcul infinitésimal.

C'est dans le *Post-scriptum* d'une lettre adressée au marquis de l'Hospital, le 30 septembre (N. St.) 1695 (2), que Leibniz indique pour la première fois d'une manière précise l'extension de sa formule pour la différentielle d'un produit au cas des indices fractionnaires, « quoique », dit-il, « cela paroisse eloigné de la Geometrie, qui ne connoist ordinairement que les differences à exposans entiers affirmatifs, ou les negatifs à l'egard des sommes, et pas encore celles dont les exposans sont rompus. »

Il fait allusion à cette extension dans sa lettre à Bernoulli du $\frac{20}{30}$ octobre 1695. Après avoir tiré de sa formule, par le changement du signe de l'indice de la différentielle, la formule d'intégration

$$\int^n y\,dz = d^0y\cdot\int^{n-1}z - \frac{n}{1}d^1y\cdot\int^n z + \frac{n(n-1)}{1.2}d^2y\cdot\int^{n+1}z - \cdots,$$

il ajoute que, au moyen de cette formule, *summæ singulatim iniri possunt, et quidem finite, si sit n integer.*

Le $\frac{17}{27}$ décembre suivant, Bernoulli lui demande des explications sur cette dernière phrase. *Interim si m sit numerus fractus, vel irrationalis, dicas mihi, quæso, quid sit* $d^m(xy)$ *: an quantitas, an quid aliud?*

---

(1) On appelait, du temps de Leibniz, *radix affecta* la racine d'une équation algébrique de plus de deux termes, par opposition à la racine d'une équation binôme, *radix pura.*

(2) *Leibnizens mathematische Schriften*, t. II, p. 300,sqq.

A quoi Leibniz répond, le 28 décembre (A. St.), qu'il a déjà expliqué cette notation au marquis de l'Hospital. *Exempli gratia,* $d^{\frac{1}{2}}x$ *sit differentia proposita. Sint* x *progressionis geometricæ* (1); *assumpta differentiali constante* dh, *ut fiat* $\frac{xdh}{a} = dx$, *erit*

$$d^2x = \frac{dx\,dh}{a} = \frac{x\,dh\,dh}{aa},$$

et similiter

$$d^3x = \frac{xdh^3}{a^3}, \text{ et generaliter } d^ex = \frac{x\,dh^e}{a^e},$$

adeoque

$$d^{\frac{1}{2}}x = \frac{xdh^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = x\sqrt{\frac{dh}{a}}.$$

Unde vides talium differentialium valores haberi posse, per radicem vel potentiam ordinariæ differentiæ (2).

Dans la suite des travaux de Leibniz, il n'est plus question de ces différentielles à indices fractionnaires. Il les passe complètement sous silence dans sa note de Berlin : *Symbolismus memorabilis,* etc. A ce propos, Bernoulli lui fait remarquer (10 décembre 1710) que les analogies qu'il établit entre le calcul algébrique et le calcul infinitésimal *nondum exhauriunt omnia, quæ ante hos quindecim annos inter nos fuerunt agitata.* Il ajoute : *Forte quod brevitati studere voluisti.* Leibniz lui répond, en effet, le 10 février suivant : *Symbolismum calculi algebraici et infinitesimalis dare volui simpliciter.*

---

(1) Il manque ici un mot dans le texte, peut-être *termini*.

(2) La relation entre x et h peut s'écrire, e étant la base des logarithmes naturels,

$$x = e^{\frac{h}{a}}, \text{ d'où } d^ex = \frac{1}{a^e}e^{\frac{h}{a}}dh^e = \left(\frac{dh}{a}\right)^e x.$$

Cette définition coïncide avec celle que M. Liouville a adoptée dans ses deux Mémoires insérés dans le 21e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 1-186.

III.

La question des différentielles à indices fractionnaires offrant nécessairement quelque chose d'arbitraire et de conventionnel, il n'est pas étonnant que les géomètres qui s'en sont occupés après Leibniz, tels que Euler, Laplace, Fourier, Liouville, l'aient résolue à des points de vue différents. M. Tardy a proposé, en 1844, dans le Congrès scientifique tenu à Milan, une nouvelle définition de ces symboles, qui l'a conduit très simplement à la démonstration de la formule de Leibniz généralisée.

Pour cela, il part de la formule connue

$$\int^{\mu} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-t)^{\mu-1} \varphi(t)\, dt,$$

établie pour le cas de μ entier et positif (en faisant abstraction des constantes arbitraires de l'intégration). En développant $\varphi(t)$ par le théorème de Taylor suivant les puissances de $x-t$, et intégrant la série, la formule devient

$$\int^{\mu} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{\mu} \varphi(x) - \frac{x}{\mu+1} \frac{\varphi'(x)}{1} + \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{\mu+k} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{1.2\ldots k} + \ldots \right\}.$$

C'est cette expression que M. Tardy prend comme définition de l'intégrale d'ordre μ, pour des valeurs quelconques de cet indice.

Si l'on remplace $\varphi(x)$ par le produit uv, et que l'on développe par la formule de Leibniz les dérivées d'ordre entier et positif de ce produit, il vient

$$\int^{\mu} uv\, dx^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{\mu} uv - \frac{x}{\mu+1} \frac{uv' + u'v}{1} + \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{\mu+k} \cdot \frac{uv^{(k)} + \frac{k}{1} u'v^{(k-1)} + \cdots + u^{(k)}v}{1.2\ldots k} + \ldots \right\}.$$

Par des transformations algébriques très simples, M. Tardy donne à cette équation la forme

$$\int^{\mu} uv\,dx^{\mu} = u\int^{\mu} v\,dx^{\mu} + (-\mu)_1\,D_x u\cdot\int^{\mu+1} v\,dx^{\mu+1} + \cdots$$
$$+ (-\mu)_k D_x^k u \int^{\mu+k} v\,dx^{\mu+k} + \cdots,$$

$(-\mu)_1$, $(-\mu)_2$,... étant les coefficients binomiaux relatifs à la puissance $-\mu$.

Pour arriver maintenant à la formule de Leibniz généralisée, il ne reste plus qu'à donner à l'indice μ des valeurs négatives. En changeant donc μ en $-\mu$, et désignant par m le plus grand nombre entier positif contenu dans μ, on obtient enfin la formule cherchée

$$D_x^{\mu}(uv) = u\,D_x^{\mu}v + (\mu)_1\,D_x u\,D_x^{\mu-1}v + \cdots + (\mu)_m D_x^m u\,D_x^{\mu-m}v$$
$$+ (\mu)_{m+1} D_x^{m+1} u \int^{m-\mu+1} v\,dx^{m-\mu+1} + \cdots.$$

IV.

A l'historique de cette question se rattache un épisode intéressant de la jeunesse du grand géomètre que sa ville natale et sa patrie d'adoption revendiquent chacune à des titres différents (1).

La formule de Leibniz, publiée, comme nous l'avons dit, en 1710, dans le Recueil de l'Académie de Berlin, pour le seul cas d'un indice entier et positif, avait été peu remarquée. Euler n'en fait pas mention dans ses *Institutiones calculi differentialis*, imprimées à Berlin même en 1755. L'extension de la formule aux valeurs quelconques de l'indice ne put être connue qu'après la publication de la Correspondance de Leibniz et de Jean Bernoulli (2). Il n'est donc pas surprenant qu'en 1754 cette découverte n'eût pas encore traversé les Alpes, et fût encore inconnue aux géomètres italiens, et en particulier à un jeune homme de dix-huit ans et demi. De nos jours même, malgré la rapidité des communications, que de découvertes mettent plus de dix années à franchir la frontière!

---

(1) La ville de Turin a élevé une statue à Lagrange en 1867, en même temps que la France consacrait à sa mémoire un monument non moins glorieux, en publiant une édition complète de ses Œuvres.

(2) *Virorum celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum.* Lausannæ et Genevæ, 1745.

Dans une lettre écrite le 23 juillet 1754 au comte Fagnano, inventeur du célèbre théorème sur les arcs d'ellipse (1), le jeune Lagrange expose la découverte qu'il vient de faire d'une nouvelle série pour les différentielles et les intégrales de tous les ordres, correspondante à la formule de Newton pour les puissances et les racines. Cette lettre, qui est la première production du grand géomètre, et la seule qu'il ait écrite en langue italienne, sera comprise dans le sixième volume de l'édition de ses Œuvres complètes.

Peu de temps après l'impression de sa lettre, Lagrange retrouva sa formule dans la Correspondance de Leibniz et de Bernoulli. Arago raconte, dans son Éloge de Fresnel (2), que le jeune auteur fut saisi d'un si violent chagrin, qu'il s'évanouit, et que ce premier échec faillit le faire renoncer pour toujours aux Mathématiques. De nos jours, comme le fait remarquer M. Tardy en rapportant cette anecdote, plus d'un auteur aurait la fibre moins sensible, et (pour employer une expression habituelle de Fresnel, qui avait, lui aussi, débuté par une semblable mésaventure) se consolerait plus aisément d'avoir *enfoncé des portes ouvertes*.

La lettre de Lagrange fut reproduite trois ans plus tard dans une Revue publiée à Modène par le jésuite Zaccaria, avec cette indication, fournie sans doute par Lagrange, que la série « n'était pas tout à fait neuve, l'auteur l'ayant retrouvée dans la Correspondance de Leibniz. » Malgré cela, dans l'édition des *Institutiones Calculi differentialis* d'Euler, publiée à Pavie en 1787, sous la direction du P. Speroni, la Note ajoutée au Chap. VIII ne désigne cette série que sous le nom de *formula Grangiana*.

Lagrange a, depuis, repris et complété ses recherches dans son Mémoire intitulé : *Sur une nouvelle espèce de Calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables* (3).

---

(1) *Lettera di Luigi De La Grange Tournier Torinese all' illustrissimo signor conte Giulio Carlo da Fagnano, Marchese de' Toschi e di S. Onorio, Nobile Romano, e Senegagliese, Matematico celeberrimo : Contenente una nuova serie per i differenziali, ed integrali di qualsivoglia grado corrispondente alla Newtoniana per le potestà, e le radici. In Torino, MDCCLIV. Nella Stamperia Reale. Con lic. de' Sup.* (6 pag.).

(2) *Œuvres d'Arago*, t. I, p. 119.

(3) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1772. — *Œuvres de Lagrange*, t III, p. 441-476.

L'édition originale de la lettre à Fagnano était devenue tellement rare que la vaste érudition bibliographique de M. le prince Boncompagni n'a pu en signaler que cinq exemplaires, dont un appartenant à la Bibliothèque de l'Académie des Sciences de Turin. Aussi doit-on être reconnaissant envers M. Genocchi, qui a tiré de l'oubli cette intéressante production, en la réimprimant à la suite de sa Note.

M. Genocchi termine son travail en défendant le caractère de Lagrange contre les attaques dont il a été l'objet dans une récente publication. Il montre, par des témoignages empruntés à ses divers biographes, combien l'âme du grand géomètre est toujours restée inaccessible à tout sentiment d'orgueil ou d'amertume vis-à-vis de ses contradicteurs les plus obstinés. Lagrange n'eut jamais d'autres ennemis que les envieux de son mérite. Ses relations avec d'Alembert furent toujours affectueuses, et il n'en eût pas été de même si, comme le dit d'Alembert lui-même, citant les paroles de Montaigne, Lagrange eût procédé, dans leurs polémiques scientifiques, d'*une trogne trop impérieusement magistrale*. Si, plus tard, Lagrange s'est laissé faire sénateur et comte de l'Empire, on n'est pas fondé pour cela à l'accuser de mauvais procédés envers l'illustre enfant trouvé des marches de Saint-Jean-le-Rond.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DES TAUTOCHRONES

DANS LE CAS

OU LA FORCE EST FONCTION DE L'ARC A PARCOURIR

PAR M. LESPIAULT

Professeur à Faculté des Sciences de Bordeaux.

Le problème des tautochrones est un de ceux qui ont le plus occupé les géomètres. Huyghens a trouvé que la cycloïde était tautochrone dans le vide pour les corps pesants. Newton a montré ensuite qu'elle conservait cette propriété dans un milieu résistant proportionnellement à la vitesse. Il a fait voir aussi qu'une courbe donnée était tautochrone pour un de ses points, lorsque la force tangentielle qui sollicite le mobile était constamment proportionnelle à la longueur de l'arc qui sépare ce point du mobile. Mais il n'a pas démontré la réciproque de ce théorème, à savoir que, pour qu'une courbe soit tautochrone sous l'action d'une force fonction de l'arc qui reste à parcourir, il faut que cette force soit proportionnelle à cet arc. Les démonstrations de cette réciproque qui ont été données jusqu'ici, sont fondées sur des considérations d'analyse tout à fait analogues à celles que l'on emploie habituellement pour faire voir que la cycloïde est la seule tautochrone dans le vide pour un point pesant. L'usage exclusif de ce genre de démonstration a conduit la plupart des auteurs des traités de mécanique rationnelle à s'occuper exclusivement du tautochronisme de la cycloïde et à laisser de côté, malgré son importance, la propriété générale de la force tangentielle que nous venons d'énoncer. Il en aurait probablement été autrement, si l'on s'était moins éloigné de la méthode de Newton, fondée, on le sait, sur l'analyse directe de l'action des forces. J'ai cherché à revenir à l'esprit de cette méthode, en démontrant géométriquement non seulement la proposition établie par Newton, mais encore la réciproque de

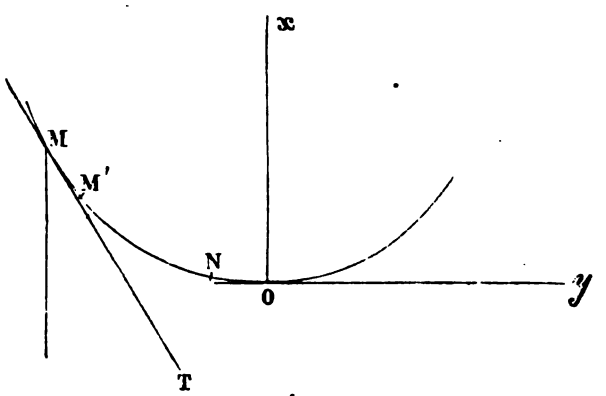
cette proposition, de manière à faire dépendre de considérations élémentaires toute cette partie de la théorie des tautochrones.

THÉORÈME. — *Si la composante tangentielle de la force motrice est constamment proportionnelle à l'arc à parcourir sur une courbe, jusqu'à un point fixe, la courbe est tautochrone par rapport à ce point.*

Considérons, en effet, sur une courbe MO *(fig. 1)*, un point M partant du repos et sollicité par une force dont la composante tangentielle MT soit constamment proportionnelle à MO. Je dis que, quel que soit le point de départ, le mobile met toujours le même temps à parvenir au point O.

Supposons, en effet, deux mobiles M et M′ placés tous deux en repos en des points différents de la courbe, et sollicités par des forces tangentielles respectivement proportionnelles aux arcs qui séparent ces mobiles du point O. Dans le premier instant *dt*, les

Fig. 1.



chemins élémentaires parcourus par M et M′ sont proportionnels aux forces qui les sollicitent, et par conséquent aux arcs entiers qu'ils ont à parcourir. Les vitesses acquises au bout du premier instant seront aussi dans le même rapport, et il en sera de même par conséquent des arcs élémentaires parcourus dans le second instant *dt;* car ces arcs se composent des chemins parcourus en vertu des vitesses acquises pendant le premier instant, et des chemins parcourus en vertu des accélérations acquises pendant le second instant *dt*.

Au bout de ce second instant, les vitesses seront donc encore

proportionnelles aux chemins déjà parcourus, et par suite aux arcs entiers. Le même raisonnement s'appliquera pendant le troisième instant, pendant le quatrième, et ainsi de suite; de telle sorte que les chemins parcourus dans un temps quelconque, fini ou infiniment petit, sont constamment proportionnels aux arcs OM et OM'. Donc, quand M aura parcouru OM, M' aura parcouru OM', et les deux mobiles arriveront au même instant au point O.

Remarquons d'ailleurs qu'il résulte de notre raisonnement qu'à chaque instant les chemins déjà parcourus sont proportionnels aux chemins qui restent à parcourir, et qu'il en est de même des vitesses acquises.

RÉCIPROQUE. — Supposons la courbe donnée tautochrone par rapport au point O. Supposons, en outre, que la force motrice soit fonction de l'arc à parcourir, ce qui exclut le cas des résistances et des frottements. Je dis que la composante tangentielle est, en chaque point, proportionnelle à l'arc OM.

En effet, désignons par τ le temps que le mobile, sous l'action de la force donnée, met à arriver, d'un certain point M pris sur la courbe, au point O. On pourra toujours déterminer la constante k, de telle manière que, sous l'action d'une force égale à ks, le mobile parcoure le même arc MO dans le même temps. Cela posé, je dis que la force tangentielle donnée $\varphi(s)$ est idendique à ks. En effet, si ces forces ne sont pas identiques, $\varphi(s)$ est nécessairement alternativement plus grande et plus petite que ks, et, en outre, ces alternatives se succèdent à intervalles finis; car on ne peut concevoir deux forces différentes, dont l'une serait alternativement plus grande et plus petite que l'autre, par intervalles infiniment petits; cette idée n'aurait aucun sens. On pourra donc toujours trouver sur la courbe un point N assez voisin du point O, bien qu'à une distance finie de ce point, pour que, entre N et O, la force $\varphi(s)$ soit constamment plus grande ou constamment plus petite que ks. Supposons-la constamment plus grande pour fixer les idées, ou tout au moins supposons qu'entre N et O, $\varphi(s)$ ne devienne jamais plus petite que ks; car elle pourrait lui devenir égale, pendant un intervalle de temps quelconque, sans que le raisonnement cessât d'être rigoureux. Cela posé, plaçons un mobile sans vitesse au point N. Sous l'action de la force $\varphi(s)$, il arrivera évidemment au point O en moins de temps que sous l'action de la force ks, qui

est constamment moindre ou tout au plus égale, c'est à dire en un temps moindre que τ; car, en vertu de notre proposition directe, τ représente le temps que le mobile mettrait à parcourir NO sous l'action de la force ks. La courbe n'est donc pas tautochrone, sous l'action de la force $\varphi(s)$, si cette force diffère de ks.

REMARQUE. — Notre démonstration suppose que la force tangentielle est fonction de s; car, s'il en était autrement et que cette force fût par exemple fonction de la vitesse du mobile, elle n'aurait pas la même valeur au point N, dans les deux mouvements de M en O et de N en O, que nous comparons entre eux, et notre raisonnement ne pourrait plus s'appliquer.

APPLICATION A LA CYCLOÏDE. — Cherchons la courbe qui est tautochrone par rapport à son point le plus bas, lorsque la force motrice est la pesanteur.

Prenons le point le plus bas O *(fig. 1)* pour origine; prenons pour axe des y la tangente en O, qui est horizontale, et pour axe des x la verticale dirigée en sens contraire de la pesanteur.

Pour que la courbe MO soit tautochrone, il faut et il suffit que l'on ait

$$g\frac{dx}{ds} = ks.$$

On tire de là

$$gdx = ksds \qquad \text{et} \qquad s^2 = \frac{2g}{k}x,$$

en faisant commencer les arcs au point O. Cette dernière équation exprime une propriété qui appartient exclusivement à la cycloïde. Donc la cycloïde est tautochrone pour la pesanteur dans le vide, et, en outre, elle est la seule tautochrone.

On peut démontrer, par un raisonnement tout à fait analogue, que la cycloïde reste tautochrone dans un milieu qui offre une résistance proportionnelle à la vitesse.

Considérons, en effet, deux mobiles pesants placés en repos, dans un tel milieu, en M et M'. Dans le premier instant dt, la pesanteur est la seule force qui agisse; on voit donc, par ce qui précède, que les premiers éléments parcourus sont proportionnels aux arcs MO et M'O. Par conséquent, ils sont aussi proportionnels aux arcs qui restent à parcourir, c'est à dire aux composantes

tangentielles de la pesanteur, telles qu'elles sont au bout du temps dt. D'autre part, les vitesses acquises sont proportionnelles aux arcs parcourus, et par suite à ceux qui restent à parcourir. Les forces motrices sont donc diminuées, par la résistance du milieu, de quantités qui leur sont proportionnelles, et dès lors les éléments parcourus dans le second instant dt sont encore dans le rapport des arcs MO et M'O. Le même raisonnement s'applique dans le troisième, dans le quatrième instant, etc., et l'on voit que les arcs parcourus au bout d'un temps quelconque sont proportionnels aux arcs entiers. Donc ces derniers sont parcourus dans le même temps.

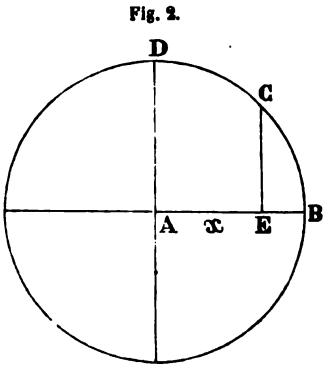
Ce même raisonnement démontre que toute courbe tautochrone dans le vide reste tautochrone dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

Les considérations qui nous ont servi dans ces démonstrations doivent surtout leur importance à ce qu'elles permettent d'assimiler tout mouvement curviligne, sous l'action d'une composante tangentielle, à un mouvement rectiligne dû à l'action d'une force constamment dirigée vers un centre situé sur la droite parcourue. Ces considérations conduisent souvent à des solutions très simples.

Cherchons, par exemple, sans sortir de notre sujet, à déterminer le temps constant τ que le mobile met à arriver au point O, dans le cas général du tautochronisme dans le vide.

Prenons *(fig. 2)* une droite AB égale à l'arc MO, et plaçons au point B un mobile que nous supposerons sollicité vers le point O par une force constamment égale à la composante tangentielle de notre mouvement curviligne, et par conséquent constamment proportionnelle à la distance du mobile au point O. D'autre part, traçons la circonférence AB, et faisons partir du point B un mobile C qui parcoure le quadrant BD dans le temps τ, avec une vitesse constante v. La force accélératrice qui sollicite le point n'est autre que la force centripète $\frac{v^2}{r}$, r désignant le rayon AB. La force accéléra-

Fig. 2.



trice qui sollicite la projection E du point C sur AB a donc pour expression

$$\varphi = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{x}{r}.$$

Donc le point E parcourt l'espace BA, dans le temps τ, sous l'action d'une force proportionnelle à la distance du point au centre d'attraction. Donc ce point coïncide constamment avec le mobile que nous avons placé en B, et si l'on désigne, comme précédemment, par k la force accélératrice qui agit sur ce mobile, à l'unité de distance, l'équation précédente donne

$$k = \frac{v^2}{r^2}.$$

D'autre part,

$$v = \frac{\pi r}{2\tau}.$$

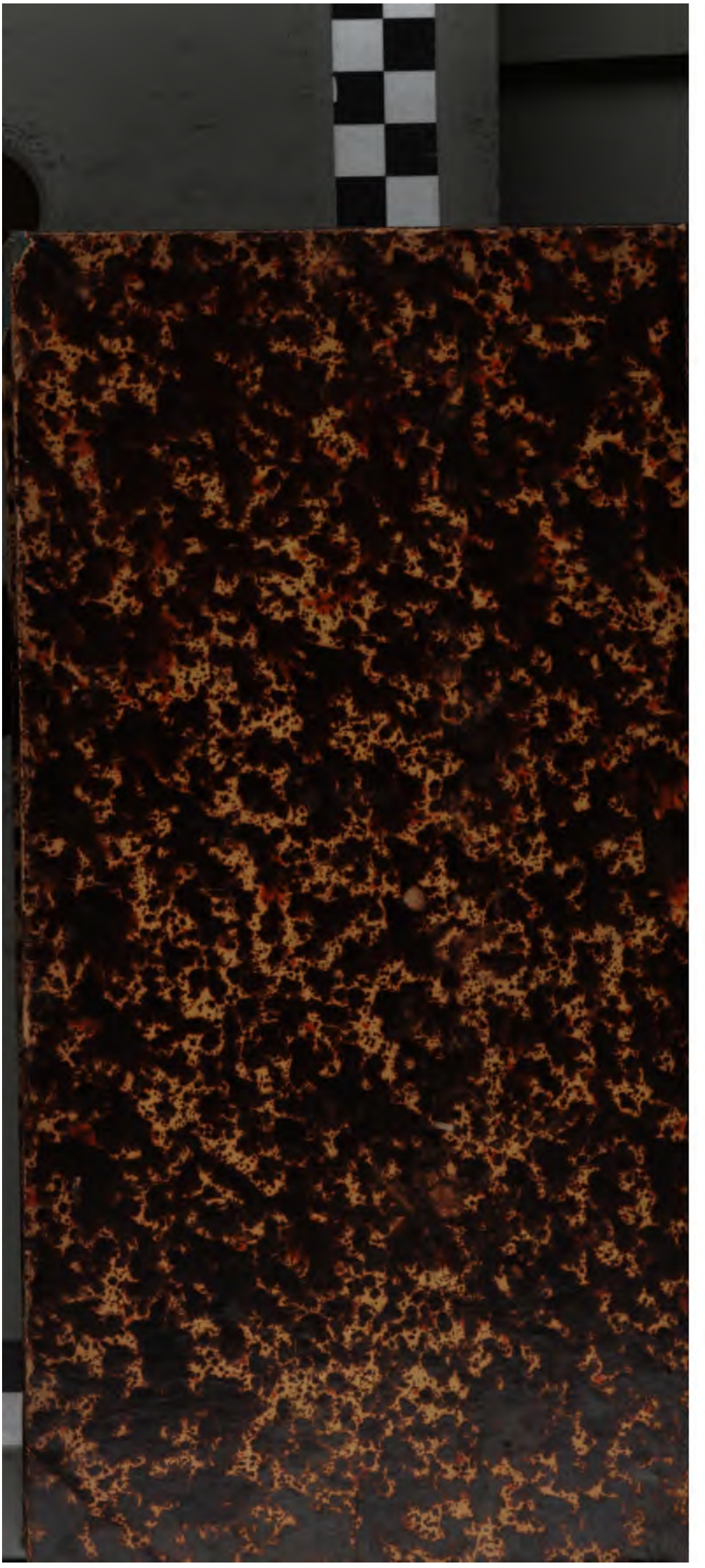
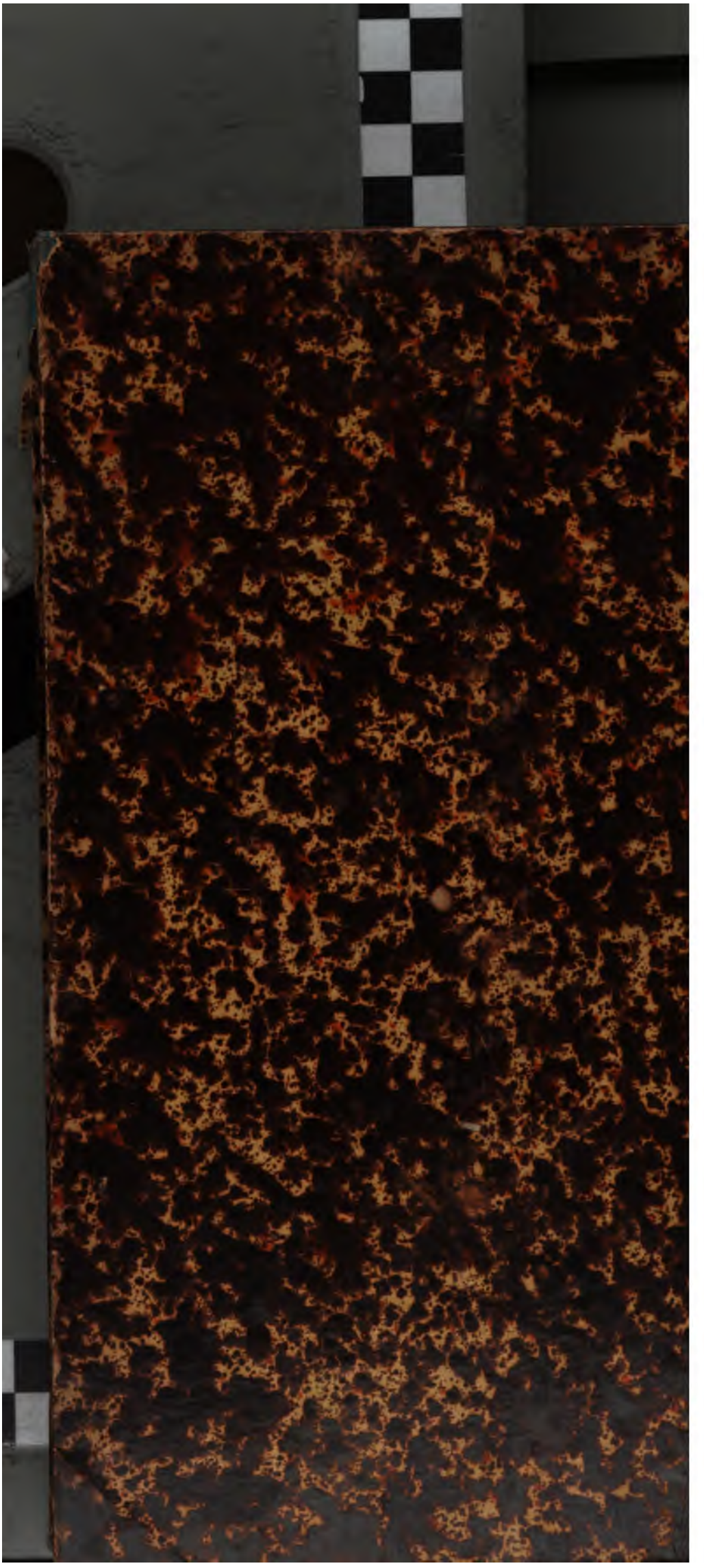
Donc

$$k = \frac{\pi^2}{4\tau^2}$$

et

$$\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$$

Nous laissons de côté, dans cette note, la recherche des tautochrones, dans le cas général où il y a résistance ou frottement. M. Brioschi a donné, dans les *Annales de Tortolini*, l'expression générale de la force tangentielle dans le mouvement tautochrone. M. Bertrand avait déjà démontré que la formule donnée d'abord par Lagrange comme générale était loin de renfermer tous les cas.

UNIV. OF MICHIGAN,

JUL 20 1912